

**Комплект задач
Beyond Olympiad #1
по физике
11-12 классы
24 июня 2021**

Регламент олимпиады

На выполнение олимпиады Вам дается 4 часа. Начало олимпиады: 10:00 по времени Алматы, конец олимпиады – 14:00. По завершении ваши решения необходимо отправить с помощью платформы [Gradescope](#). (Инструкции по отправке см. ниже.)

Инструкция по выполнению и оформлению:

Выполнять задания Вы можете в любом порядке, при этом **необходимо**

- Оформлять каждую задачу на отдельном листе;
- Вверху листа писать номер задачи, но при этом **запрещается** писать ФИО, инициалы или какие-либо другие личные идентификаторы.
- Если решение задачи требует больше одного листа, то в конце страницы следует написать (Продолжение задачи номер __ на следующей странице). При этом вверху следующей страницы необходимо пометить, что это является продолжением определенной задачи;
- **Рекомендуется** придерживаться понятного и разборчивого почерка, избегать грязи и зачеркиваний.

Инструкции по отправке решений:

Необходимо завершить выполнение заданий не позднее 14:00 по времени Алматы. По окончании работы, вам необходимо объединить сканы ваших решений в один pdf-файл. Отметим, что в Google Play и AppStore есть множество приложений (PDF scanner, scanner app, scanbot и другие), предназначенных для этих целей. PDF-файл необходимо загрузить на сайт gradescope.com. Код курса: **P536BW**.

Памятка участнику:

- Из канцелярских принадлежностей **разрешаются только**: карандаши, ручки, ластик, линейка, циркуль и калькулятор.
- **Строго запрещается** пользоваться помощью посторонних людей и дополнительной литературой, включая интернет-источники и учебные пособия.
- Попытки списывания и нарушения академической честности будут наказаны **баном** на ask.bc-pf.org сроком на год.

Результаты будут оглашены до 10 июля 2021 года.

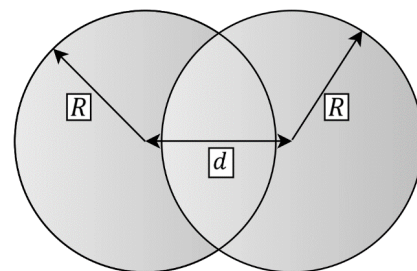
При наличии вопросов по проведению олимпиады следует также писать на форум ask.bc-pf.org или в официальные аккаунты соц. сетей ОФ “Beyond Curriculum”.

Задача 1. Солянка (9 баллов)

Часть А: Магнитное поле проводов. (4 балла)

а) По длинному цилиндрическому проводу радиусом R течёт ток I вдоль положительного направления оси z . Изобразите магнитное поле в плоскости поперечного сечения провода, определите направление и величину магнитной индукции B на расстоянии r от оси провода. Запишите в векторном виде уравнение для $\vec{B}$, используя радиус-вектор $\vec{r}$, единичный вектор $\hat{z}$, радиус R и магнитную постоянную μ_0 . (1.5 балла)

б) Два длинных цилиндрических провода радиусами R расположены так, что расстояние между их центрами равно $d < 2R$, а на месте их пересечения находится полость (см. рисунок). По этим проводам в разных направлениях вдоль оси z текут одинаковые токи силой I . Вычислите величину магнитной индукции B внутри полости и её направление. (2.5 балла)



Часть В: Неизвестное вещество. (5 баллов)

Внутренняя энергия U неизвестного вещества является функцией объёма V и температуры T :

$$U = -\frac{am^2}{V} + bT.$$

Уравнением изохоры для этого вещества является

$$\frac{P}{T - T_0} = \text{const},$$

а зависимость плотности ρ от температуры при адиабате имеет вид:

$$\rho(T) = \rho_1 + K \ln \frac{T}{T_1}$$

Масса m , параметры a , b и T_0 известны. Какой вид имеет уравнение изотермы для этого вещества? Чему равен коэффициент K ? (5 баллов)

При решении данной задачи вам могут пригодиться формулы:

$$(\vec{a} \times \vec{c}) - (\vec{b} \times \vec{c}) = ((\vec{a} - \vec{b}) \times \vec{c})$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

Индекс у частного производного говорит о том, что данный параметр остаётся постоянным при дифференцировании.

Автор задачи: Алишер Еркебаев.

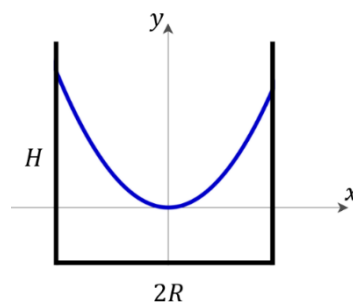
Задача 2. Параболическое зеркало (8 баллов)

По мере развития геометрической оптики, человек изобретал различные оптические приборы. В этой задаче мы рассмотрим два вида зеркал: сферическое и параболическое.

- а) Широкий пучок света падает параллельно оси сферического зеркала с радиусом кривизны R и диаметром D . В оптическом фокусе такого зеркала расположили круглый диск. Какого радиуса r должен быть диск, чтобы он собирал весь отражённый от зеркала свет? **(2.5 балла)**

Как мы видим, в случае со сферическим зеркалом на его фокус точно попадают лишь *параксиальные* лучи, то есть лучи, идущие близко к главной оптической оси. Чтобы устранить такой недостаток, в астрономических исследованиях широко используются параболические зеркала.

Цилиндрическое ведро со ртутью радиусом R и высотой H начали вращать вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Вследствие этого поверхность ртути образует поверхность вращения, кривая которого описывает некоторую функцию $y(x)$, где y – высота от наинизшей точки полученной поверхности, а x – расстояние до оси ведра. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.



- б) Рассматривая условие равновесия ртути, покажите, что эта кривая является параболой и найдите зависимость $y(x)$. **(2 балла)**
- с) На ведро параллельно его оси падает широкий пучок света. Покажите, что весь пучок сходится в одной точке и найдите его расстояние F . **(2 балла)**
- д) Пусть $R = 15 \text{ см}$ и $H = 30 \text{ см}$. Какой максимальной угловой скорости $\omega_{\max}$ можно раскрутить ведро? Какой объём ртути V при этом потребуется? **(1.5 балла)**

При решении этой задачи вам, возможно, пригодятся следующие математические формулы:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Автор задачи: Алишер Еркебаев.

Задача 3. Изучение движения ядра планет (13 баллов)

Введение

Изучение движения ядра в планете представляет собой очень сложную задачу. Для ее решения требуется учесть вязкость, гравитацию, давление жидкости и движение мантии вместе с ядром. Решение задачи о движении ядра сможет позволить нам лучше понять строение Земли и объяснить множество процессов в геологии. В данной задаче мы постараемся учесть вклад мантии в движение ядра планеты без учета ее вязкости. Будем предполагать, что строение некоторой планеты представляет собой ядро плотности ρ и радиуса r , мантию, которая является несжимаемой невязкой жидкостью плотности ρ_m и радиуса R . Одной из планет, обладающих подобной структурой, является Нептун, если пренебрегать влиянием атмосферы и льдов в мантии на движение ядра.

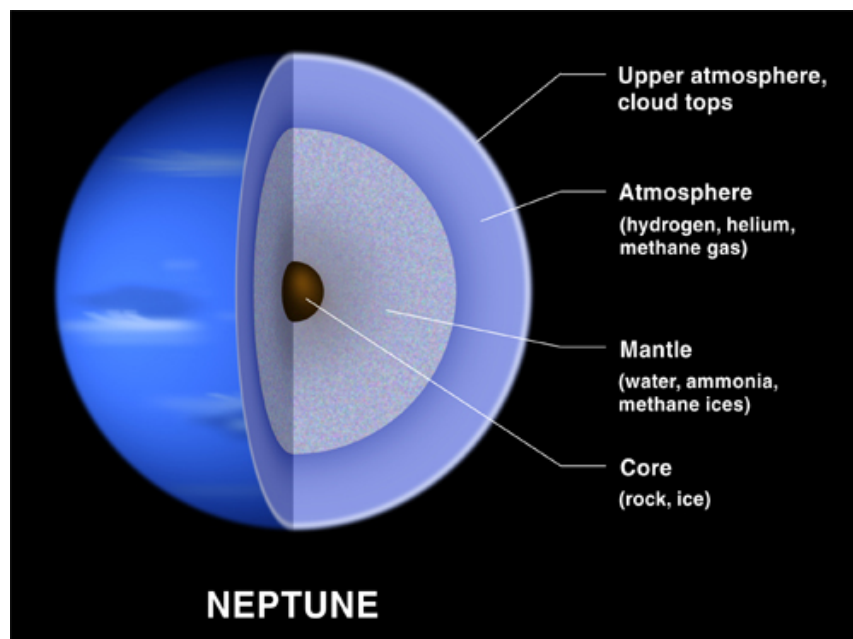


Рис. 1. Структура Нептуна

Часть А. Влияние гравитации (2 балла)

Для учета влияния гравитации на движение ядра рассмотрим ядро, центр которого сместился на расстояние x от геометрического центра планеты. Будем считать, что x мало по сравнению с R .

A.1. Найдите гравитационное поле внутри ядра планеты при таком смещении. (1.5 балл)

A.2. Найдите силу, действующую на ядро из-за влияния гравитации (0,5 балла)

Часть В. Учет движения мантии вместе с ядром (5 баллов)

В данной части вам может пригодиться формула поля магнитного диполя

$$\vec{B} = \frac{3k(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{m}}{r^3}, \quad k = \frac{\mu_0}{4\pi},$$

где μ_0 – магнитная постоянная, $\vec{m}$ – дипольный момент.

Теперь постараемся учесть влияние движения мантии вместе с ядром. Как мы знаем, движение тела в жидкости приводит эту жидкость также в движение, из-за чего эффективная масса тела возрастает. В данной части постараемся найти данную присоединенную массу.

Рассмотрим движение некоторого тела в бесконечной жидкости. Пусть наше тело является шаром радиуса R и массы m и движется равномерно со скоростью v_0 в несжимаемой невязкой жидкости плотности ρ . Будем считать, что в нашей жидкости отсутствуют вихри, то есть циркуляция равна нулю ($\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$)

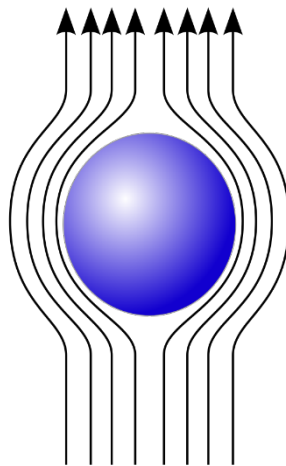


рис. 2. Обтекание тела жидкостью

Перейдем в систему отсчета, связанную с шаром.

В.1. Найдите граничные условия для скорости жидкости. (0,5 баллов)

В.2. Покажите, что можно провести аналогию между скоростью жидкости вокруг шара при его обтекании и индукцией магнитного поля при помещении сверхпроводящего шара в однородное магнитное поле. (1 балл)

Теперь вернемся в покоящуюся систему отсчета.

В.3. Найдите установившуюся скорость жидкости во всем пространстве вокруг шара. (2 балла)

Как вы можете заметить, жидкость имеет ненулевую скорость. Тогда энергию жидкости можно представить в виде

$$E_k = \frac{\mu v_0^2}{2},$$

где μ является присоединенной массой жидкости.

В.4. Найдите присоединенную массу μ . (1,5 балла)

Часть С. Учет влияния давления мантии (4,5 балла)

Теперь рассмотрим влияние давления мантии на движение ядра планеты. В данной части мы постараемся найти силу давления мантии на ядро.

Для начала рассмотрим равновесие жидкости плотности ρ в некотором поле с гравитационным потенциалом φ ($\vec{g} = -\text{grad } \varphi$).

С.1. Выразите давление жидкости в произвольной точке внутри планеты как функцию от гравитационного потенциала φ в данной точке. (1 балл)

Теперь найдем силу давления жидкости, действующую на планету.

С.2. Найдите гравитационный потенциал внутри ядра как функцию расстояний от центра планеты $\vec{r}_1$, ядра $\vec{r}_2$ и смещения $\vec{x}$, и напишите уравнение, связывающее эти три величины. (2 балла)

С.3. Найдите силу давления жидкости, действующую на ядро планеты. (1.5 балла)

Часть D. Определение движения ядра планеты (1,5 балла)

Теперь постараемся определить уравнение движения ядра планеты.

D.1. Качественно покажите, что уравнение движения ядра планеты будет представлять собой гармонические колебания и найдите частоту малых колебаний ядра планеты. Считайте известной плотность мантии $\rho_m = 4,8 \text{ г/см}^3$, а плотность ядра $\rho = 12,7 \text{ г/см}^3$. (1,5 балла)

Автор задачи: Ерсултан Питебай.