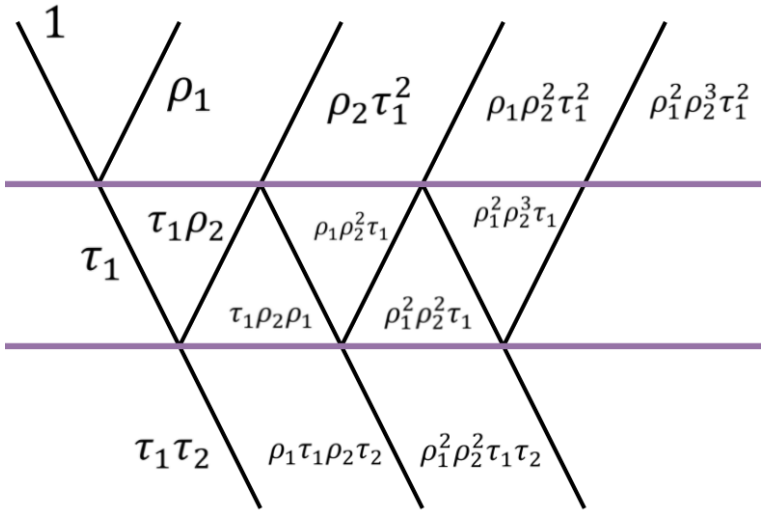
Задача 1. Солянка (10 баллов)

Часть А: Интенсивность света (7 баллов)

a) Свет, проходя через перископ, четыре раза преодолевает границу раздела стекло-воздух, следовательно, интенсивность проходящего света равна $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0\tau^4$, где $\mathcal{J}_0$ – изначальная интенсивность. Теряемая доля светового потока равна:

$$\frac{\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = 1 - \tau^4 = 15\%.$$

b) Свет, проходя сквозь пластинки, испытывает многократные отражения, смотрите рисунок. Для наглядности на рисунке все интенсивности указаны в единицах $\mathcal{J}_0$.



Рассчитаем эквивалентный коэффициент отражения $\rho = \frac{\mathcal{J}_\rho}{\mathcal{J}_0}$. Для этого просуммируем интенсивности всех отражённых лучей.

$$\rho = \rho_1 + \rho_2\tau_1^2 + \rho_1\rho_2^2\tau_1^2 + \ldots = \rho_1 + \rho_2\tau_1^2(1 + \rho_1\rho_2 + (\rho_1\rho_2)^2 + \ldots) =$$

$$= \rho_1 + \frac{\rho_2\tau_1^2}{1 - \rho_1\rho_2}.$$

Здесь была использована формула для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. На основании закона сохранения энергии, $\rho_1 + \tau_1 = 1$, тогда окончательно:

$$\mathcal{J}_\rho = \mathcal{J}_0\left(\rho_1 + \frac{\rho_2(1-\rho_1)^2}{1 - \rho_1\rho_2}\right) = \mathcal{J}_0\frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_1\rho_2}{1 - \rho_1\rho_2}.$$

Аналогично находим эквивалентный коэффициент преломления τ:

$$\tau = \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_2\rho_1\rho_2 + \tau_1\tau_2(\rho_1\rho_2)^2 + \ldots = \frac{\tau_1\tau_2}{1 - \rho_1\rho_2}.$$

И, наконец,

$$\mathcal{J}_\tau = \mathcal{J}_0 \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_1\rho_2} = \mathcal{J}_0 \frac{1-\rho_1-\rho_2+\rho_1\rho_2}{1-\rho_1\rho_2}.$$

c) Для решения этой части можно заменить m пластин на эквивалентную пластинку с коэффициентами ρ_m и τ_m и добавить $m+1$ –ую пластину. Используя результаты предыдущего пункта, распишем рекуррентное соотношение:

$$\tau_{m+1} = \frac{\tau\tau_m}{1-\rho\rho_m} = \frac{\tau\tau_m}{1-\rho(1-\tau_m)} = \frac{\tau\tau_m}{\tau+\rho\tau_m}.$$

Преобразуем в линейный вид:

$$\tau\tau_{m+1} + \rho\tau_{m+1}\tau_m = \tau\tau_m,$$
$$\tau(\tau_{m+1}-\tau_m) + \rho\tau_{m+1}\tau_m = 0$$

Сравнивая с первым уравнением математической подсказки, получаем $A = \tau,\ B = \rho$, и тогда:

$$\tau_m = \frac{\tau}{1+\rho(m-1)} = \frac{1-\rho}{1+(m-1)\rho}.$$

Можно найти ρ_m из соотношения $\rho_m = 1-\tau_m$ либо решая аналогичное рекуррентное соотношение с использованием второго уравнения математической подсказки:

$$\rho_m = \frac{m\rho}{1+(m-1)\rho}.$$

Часть B: Сантехник (4 балла).

а) По уравнению Бернулли (правую и левую струи следует рассматривать отдельно):

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_{\text{пр}}^2 + p_A (1)$$

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_{\text{лев}}^2 + p_A (2)$$

Исходя из этого: $v_0 = v_{\text{лев}} = v_{\text{пр}} \quad (3)$

Согласно закону сохранения массы, в точке разъединения струи количество пришедшей воды за единицу времени равно количеству ушедшей, следовательно,

$$\rho S_0 v_0 \Delta t = \rho S_{\text{пр}} v_{\text{пр}} \Delta t + \rho S_{\text{лев}} v_{\text{лев}} \Delta t \quad (4)$$

Лист металла может влиять на воду только вдоль вертикальной оси (по одной горизонтальной оси сил нет, а по другой все силы

симметричны, поэтому они уравновешиваются), поэтому по закону сохранения импульса вдоль оси:

$$\rho S_0 v_0 \Delta t \cdot v_0 \, sin\, \varphi = \rho S_{\text{пр}} v_{\text{пр}} \Delta t \cdot v_{\text{пр}} - \rho S_{\text{лев}} v_{\text{лев}} \Delta t \cdot V_{\text{лев}} (5)$$

Решая уравнения (3)-(5) получаем:

$$\frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{лев}}} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi} \quad (6)$$

$$S_{\text{пр}} = \frac{1 + \sin\varphi}{2} S_0 (7)$$

b) Так как масса воды, которая проходит через площадь в единицу времени, остаётся постоянной, для изменения массы воды в трубе после закрытия крана можно написать:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S_{\text{пр}} v_{\text{пр}}$$

Подставляя в это уравнения (3) и (7) и суммируя по времени, получаем зависимость массы покоящейся воды в трубе от времени:

$$m(t) = \frac{1 + \sin\varphi}{2} \rho S_0 v_0 t$$

А толщина слоя воды от времени:

$$H_{\text{в}}(t) = \frac{m(t)}{\rho S_0} = \frac{1 + \sin\varphi}{2} v_0 t$$

И конечная скорость падающей на поверхность воды струи от времени:

$$v_k = \sqrt{2g\big(H_0 + h - H_{\text{в}}(t)\big) + v_{\text{пр}}^2}$$

Изменение импульса малого слоя струи, после падения на поверхность покоящейся воды, равно:

$$\Delta p = v_k \cdot \Delta m$$

Сила давления является суммой сил давления покоящейся воды и изменению импульса Δp за Δt:

$$F = m(t) g + \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F = \frac{1 + \sin\varphi}{2} \rho S_0 v_0 \left(gt + \sqrt{\left(2g\big(H_0 + h - H_{\text{в}}(t)\big) + v_{\text{пр}}^2\right)} \right)$$

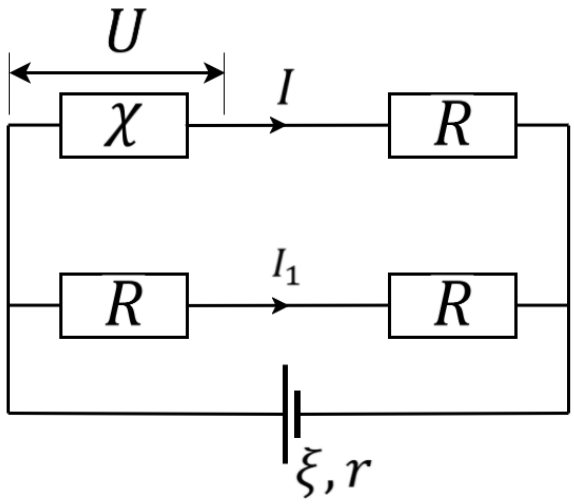
$$F = \frac{1+\sin\varphi}{2}\rho S_0 v_0\left(gt + \sqrt{2g\left(H_0 + h - \frac{1+\sin\varphi}{2}v_0 t\right) + v_0^2}\right)$$

Когда вода полностью восполнит трубу, она начнёт вытекать из её края. Это произойдёт через время $T = \frac{H_0}{S_{\text{пр}}v_0} = \frac{2H_0}{(1+\sin\varphi)v_0}$. Тогда сила давления воды о клапан трубы будет постоянной и равной

$$F = \rho g S_0 H_0 + \frac{1+\sin\varphi}{2}\rho S_0 v_0\sqrt{2gh + v_0^2}.$$

Солянка (11 баллов)		
Часть A: Интенсивность света (6.5 баллов)		
a)	1 балл	$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0\tau^4$ – *0.5 баллов.* $\frac{\mathcal{J}_0-\mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = 1-\tau^4 = 15\%$ – *0.5 баллов.*
b)	3 балла	Чертёж с расчётом интенсивности некоторых лучей – 1 балл. Вывод ρ, τ – 1.5 балла. $\rho + \tau = 1$ – 0.5 баллов
c)	2.5 балла	Верное рекуррентное соотношение – 1 балл. Вывод ρ_m, τ_m – 1.5 балла.
Часть B: Сантехник (4.5 балла)		
a)	1.5 балла	Уравнения Бернулли и $v_0 = v_{\text{лев}} = v_{\text{пр}}$ – 0.5 баллов Закон сохранения импульса – 0.5 баллов $\frac{S_{\text{пр}}}{S_{\text{лев}}}$ – 0.5 баллов.
b)	3 балла	$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S_{\text{пр}} v_{\text{пр}}$ – 0.25 баллов $H_{\text{в}}(t) = \frac{1+\sin\varphi}{2}v_0 t$ – 0.5 баллов $v_k = \sqrt{2g\left(H_0 + h - H_{\text{в}}(t)\right) + v_{\text{пр}}^2}$ – 0.5 баллов $\Delta p = v_k \cdot \Delta m$ – *0.25 баллов* Вывод F – 0.75 баллов. F при $t > T$ – 0.75 баллов.

Задача 2. Нелинейный элемент (9 баллов)

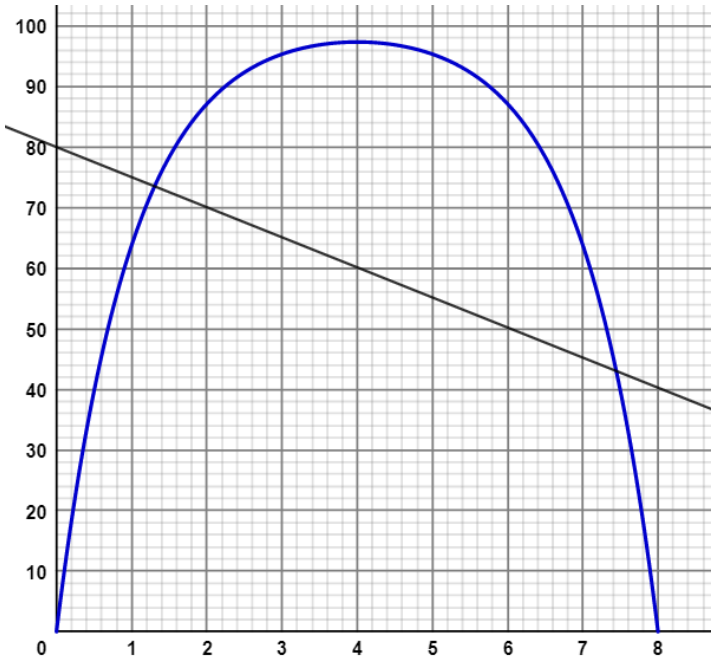


a) Для решения задачи нужно рассматривать два случая, соответствующих открытому и закрытому диоду. Для закрытого диода запишем уравнения согласно законам Кирхгофа.

$$\begin{cases} \xi = U + IR + (I + I_1)r \\ 2I_1R = U + IR \\ I = I(U) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{2\xi}{2R + 3r} - \dfrac{U}{R}\dfrac{2R + r}{2R + 3r} \\ I = I(U) \end{cases}$$

Решим полученную систему уравнений графически. Для построения прямой достаточно взять точки (0 В, 80 мА) и (8В, 40мА) (примерно). Получатся два решения, соответствующие точкам ($U = 1.3$В, $I = 73.5$ мА) и ($U = 7.4$ В, $I = 43.0$ мА). Устойчивым будет первое решение, так как при незначительном увеличении напряжения сила тока возвращается к устойчивому значению (наклоны обоих графиков $\frac{\delta I}{\delta U}$ имеют разные знаки). Итак, сила тока равна $I = 73.5$ мА. Диод закрыт, если падение напряжения в нижнем узле меньше, чем в верхнем. Запишем это неравенство, выражая I_1:



$$\xi - U > \xi - I_1R \quad \rightarrow \quad U < IR$$

$$1.3 \text{ В} < 0.0735\ A * 145 \text{ Ом} = 10.7 \text{ В}$$

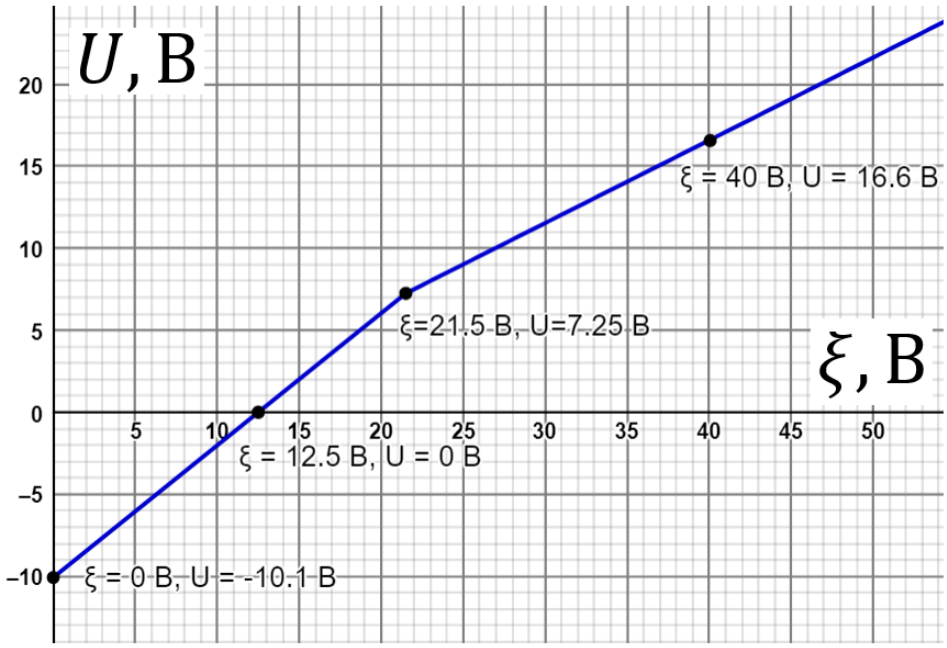
b) Проводим расчёты, аналогичные пункту выше, используя замену $I \rightarrow I_0$. Тогда для закрытого диода:

$$\begin{cases} U = \xi \dfrac{2R}{2R + r} - I_0 R \dfrac{2R + 3r}{2R + r} \\ U < I_0 R = 7.25 \text{ В} \end{cases}$$

Для открытого диода:

$$\begin{cases} U = \xi \dfrac{2R}{3R + 2r} - I_0 R \dfrac{R + 2r}{3R + 2r} \\ U > 7.25 \text{ В} \end{cases}$$

Наконец, нарисуем зависимость $U(\xi)$, с обозначением некоторых точек:



Нелинейный элемент (9 баллов)		
Пункт	**Балл**	**Критерий**
a)	4 балла	Законы Кирхгофа – 0.5 баллов. Уравнение прямой $I(U)$ – 0.5 балл. Два решения – 1 балл. Первое устойчиво – 0.5 баллов. Объяснение – 0.5 баллов. Доказательство того, что диод должен быть закрытым – 1 балл.
b)	5 баллов	Зависимость $U(\xi)$ для закрытого диода и условие $U < I_0 R$ – 1 балл. Зависимость $U(\xi)$ для открытого диода и условие $U > I_0 R$ – 1.5 балла. Чертёж – 1 балл. Расчёт характерных точек – 1.5 балла.

Задача 3. Физика электрогитары.

a) При смещении струны на неё действует возвращающая сила, которая вызывает колебания относительно малого затухания.

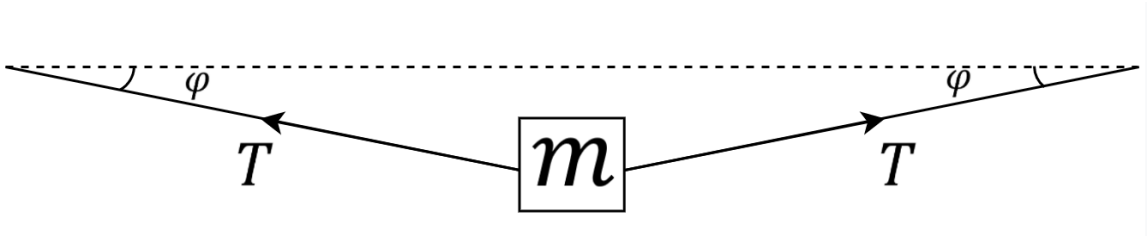
$$m\ddot{x} = -2T\sin\varphi \approx -2T\varphi$$

$$x = \frac{L}{2}\varphi, \qquad m = \rho L\frac{\pi d^2}{4}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{16T}{\pi\rho L^2 d^2}\varphi = 0$$

Тогда период колебаний равен:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\rho L^2 d^2}{16T}} = \frac{\pi L d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho}{T}}$$



b) Выразим массу в заданной в условии формуле:

$$f_e = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_e L_0}{m}} = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}.$$

Следовательно,

$$T_e = \pi\rho(f_e d L_0)^2 = 60\ \text{Н}.$$

Интересно отметить, что эта сила натяжения примерно в 29000 (!) раз больше веса натянутой части струны, но такое механическое напряжение всё ещё в ~5 раз меньше предела прочности для стали.

c) Как мы видим из преобразованной формулы пункта (b), частота колебаний обратно пропорциональна длине. Тогда:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sqrt[12]{2}.$$

Эти величины образуют геометрическую прогрессию, тогда их можно выразить как:

$$f_n = f_e\left(\sqrt[12]{2}\right)^n, \qquad L_n = \frac{L_0}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$$

Ширина n-ного лада равна

$$H_n = L_{n-1} - L_n = L_{n-1}\left(\sqrt[12]{2} - 1\right) = L_0\frac{\sqrt[12]{2} - 1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}.$$

Оформим таблицу численных значений частоты звука и ширины лада от порядкового номера:

n	0	1	2	3	4	5	6
f_n, Гц	330	349.62	370.41	392.43	415.77	440.49	466.69
H_n, см	-	3.87	3.65	3.44	3.25	3.07	2.90

d) Частота колебаний второй струны на пятом ладу совпадает с частотой открытой первой струны, третьей струны на четвёртом ладу совпадает со второй струной и так далее:

$$f_B\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_e, \qquad f_B = f_e \cdot 2^{-\frac{5}{12}};$$
$$f_G\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = f_B, \qquad f_G = f_e \cdot 2^{-\frac{9}{12}};$$
$$f_D\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_G, \qquad f_D = f_e \cdot 2^{-\frac{14}{12}};$$
$$f_A\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_D, \qquad f_A = f_e \cdot 2^{-\frac{19}{12}};$$
$$f_E\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_A, \qquad f_E = f_e \cdot 2^{-\frac{24}{12}}.$$

Диаметр струны обратно пропорционален частоте звуковых колебаний (при равных силах натяжения), поэтому получаем:

$$d_B = d_e \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 0.31 \text{ мм},$$
$$d_G = d_e \cdot 2^{\frac{9}{12}} = 0.39 \text{ мм},$$
$$d_D = d_e \cdot 2^{\frac{14}{12}} = 0.52 \text{ мм},$$
$$d_A = d_e \cdot 2^{\frac{19}{12}} = 0.69 \text{ мм},$$
$$d_E = d_e \cdot 2^{\frac{24}{12}} = 0.92 \text{ мм}.$$

В действительности, диаметры этих струн составляют 0.28, 0.41, 0.66, 0.91 и 1.17 миллиметра.

e) Выразим натяжение струны через закон Гука:

$$T_e = \frac{ES}{L_0}\Delta L_0,$$

где S – площадь поперечного сечения струны, а ΔL_0 – начальное растяжение струны. Из-за термического расширения растяжение струны изменяется:

$$L_1 = L_0(1 + \alpha\Delta t),$$
$$\Delta L_1 = (L_0 + \Delta L_0) - L_1 = \Delta L_0 - L_0 \cdot \alpha\Delta t$$
$$T_e' = \frac{ES}{L_1}\Delta L_1 \approx \frac{ES}{L_0}\Delta L_1 = \frac{ES}{L_0}\Delta L_0\left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta L_0/L_0}\right) = T_e\left(1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}\right).$$

Тогда разность частот $\Delta f_e = f_e' - f_e$:

$$\Delta f_e = \frac{1}{dL_0\sqrt{\pi\rho}}\left(\sqrt{T_e'} - \sqrt{T_e}\right) = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}} - 1\right)$$
$$\approx -f_e\frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{2T_e}.$$

Знак минус говорит о том, что высота звука снизилась, частота колебаний соответственно стала ниже на $\Delta f_e = 5.48$ Гц. Перепады температур довольно заметно влияют на высоту извлекаемого из струн звука.

f) Общая длина струны увеличилась, при этом это удлинение равно:

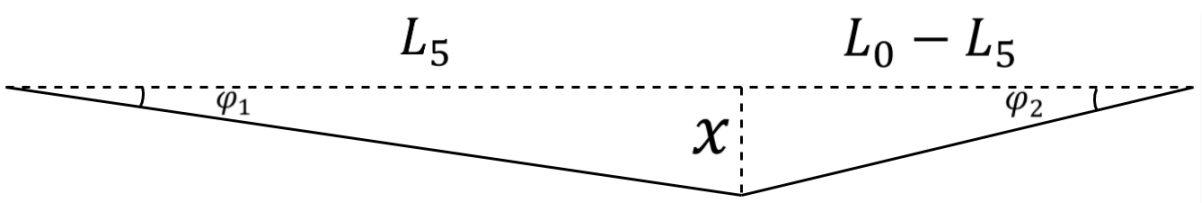
$$\Delta L = \sqrt{L_5^2 + x^2} + \sqrt{(L_0 - L_5)^2 + x^2} - L_0 \approx$$
$$\approx L_5\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{L_5^2}\right) + (L_0 - L_5)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{(L_0 - L_5)^2}\right) - L_0 =$$
$$= \frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5}.$$

Новая частота колебаний равна:

$$f_e' = \frac{1}{dL_5}\sqrt{\frac{T_e'}{\pi\rho}} = \frac{1}{dL_5}\sqrt{\frac{T_e + \frac{ES}{L_0}\Delta L}{\pi\rho}},$$
$$\frac{f_e'}{f_e} = \sqrt{1 + \frac{ES}{T_e L_0}\Delta L} = \sqrt[12]{2}.$$

Таким образом, приравнивая ΔL,

$$\frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5} = \frac{T_e L_0}{ES}\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)$$
$$x = \sqrt{\frac{2T_e L_5(L_0 - L_5)}{ES}\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = L_0\sqrt{\frac{8T_e}{E\pi d^2}\left(1 - 2^{-\frac{5}{12}}\right)\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = 1.37 \text{ см}$$



Физика электрогитары (10 баллов)		
a)	1 балл	$m\ddot{x} = -2T\varphi$ – 0.5 баллов $\tau = \frac{\pi L d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho}{T}}$ – 0.5 баллов *Не выражен m в конечном ответе – -0.25 баллов.*
b)	1 балл	$f_e = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}$ – 0.5 баллов $T_e = \pi\rho(f_e d L_0)^2 = 60\ \text{Н}$ – 0.5 баллов *Нет численного ответа – -0.25 баллов.*
c)	2 балла	$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sqrt[12]{2}$ – 0.5 баллов $f_n = f_e\left(\sqrt[12]{2}\right)^n,\ L_n = \frac{L_0}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$ – 0.5 баллов. $H_n = L_{n-1} - L_n = L_0\frac{\sqrt[12]{2}-1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}$ – 0.5 баллов. Верная таблица – 0.5 баллов.
d)	1.5 балла	Верны все уравнения – 1 балл Верны все численные значения – 0.5 баллов. *В этом пункте баллы могут выдаваться частично.*
e)	2 балла	$\Delta L_1 = \Delta L_0 - L_0 \cdot \alpha\Delta t$ – 0.5 баллов $T_e' = T_e\left(1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}\right)$ - 0.5 баллов $\Delta f_e = -f_e\frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{2T_e} = -5.48\text{Гц}$ – 1 балл
f)	2.5 балла	$\Delta L = \frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5}$ – 0.5 баллов $\sqrt{1 + \frac{ES}{T_e L_0}\Delta L} = \sqrt[12]{2}$ – 1 балл $x = L_0\sqrt{\frac{8T_e}{E\pi d^2}\left(1 - 2^{-\frac{5}{12}}\right)\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = 1.37\ \text{см}$ – 1 балл