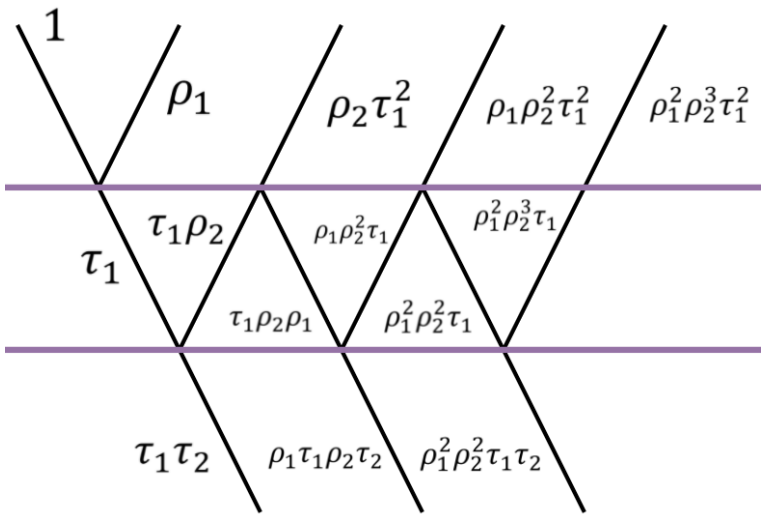
Есеп 1.

Бөлім А: Жарық қарқындылығы (6.5 ұпай)

a) a) перископ арқылы өтетін жарық әйнек ауа интерфейсін төрт рет жеңеді. Демек, өтетін жарықтың қарқындылығы $\mathcal{J} = \mathcal{J}_0\tau^4$-ге тең ($\mathcal{J}_0$ – жарықтың бастапқы қарқындылығы. Жарық ағынының жоғалған үлесі:

$$\frac{\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = 1 - \tau^4 = 15\%.$$

b) Пластиналар арқылы өтетін жарық көп еселі шағылысуды бастан кешіреді, суретті қараңыз. Суретте түсінікті болу үшін барлық қарқындылық $\mathcal{J}_0$ бірліктерінде көрсетілген.



Баламалы шағылысу коэффициентін $\rho = \frac{\mathcal{J}_\rho}{\mathcal{J}_0}$ есептейік. Ол үшін барлық шағылысқан сәулелердің қарқындылығын қосындылайық.

$$\rho = \rho_1 + \rho_2\tau_1^2 + \rho_1\rho_2^2\tau_1^2 + \ldots = \rho_1 + \rho_2\tau_1^2(1 + \rho_1\rho_2 + (\rho_1\rho_2)^2 + \ldots) =$$

$$= \rho_1 + \frac{\rho_2\tau_1^2}{1 - \rho_1\rho_2}.$$

Мұнда шексіз кемімелі геометриялық прогрессияның қосындысына арналған формула қолданылды. Энергияның сақталу заңы негізінде $\rho_1 + \tau_1 = 1$, сонда:

$$\mathcal{J}_\rho = \mathcal{J}_0\left(\rho_1 + \frac{\rho_2(1-\rho_1)^2}{1 - \rho_1\rho_2}\right) = \mathcal{J}_0\frac{\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_1\rho_2}{1 - \rho_1\rho_2}.$$

Сол сияқты біз балама сыну коэффициентін τ табамыз:

$$\tau = \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_2\rho_1\rho_2 + \tau_1\tau_2(\rho_1\rho_2)^2 + \ldots = \frac{\tau_1\tau_2}{1 - \rho_1\rho_2}.$$

Осылайша,

$$\mathcal{J}_\tau = \mathcal{J}_0 \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)}{1-\rho_1\rho_2} = \mathcal{J}_0 \frac{1-\rho_1-\rho_2+\rho_1\rho_2}{1-\rho_1\rho_2}.$$

c) Осы тармақты шешу үшін m жазықтықтарын ρ_m және τ_m коэффициенттері бар эквивалентті жазығына ауыстырып, $m+1$ пластинасын қосуға болады. Алдыңғы тармақтың нәтижелерін қолдана отырып, қайталанатын қатынасты жазамыз:

$$\tau_{m+1} = \frac{\tau\tau_m}{1-\rho\rho_m} = \frac{\tau\tau_m}{1-\rho(1-\tau_m)} = \frac{\tau\tau_m}{\tau+\rho\tau_m}.$$

Сызықтық түрге түрлендіреміз:

$$\tau\tau_{m+1} + \rho\tau_{m+1}\tau_m = \tau\tau_m,$$
$$\tau(\tau_{m+1}-\tau_m) + \rho\tau_{m+1}\tau_m = 0$$

Математикалық нұсқаның бірінші теңдеуімен салыстыра отырып, біз $A=\tau,\ B=\rho$ аламыз, осылайша:

$$\tau_m = \frac{\tau}{1+\rho(m-1)} = \frac{1-\rho}{1+(m-1)\rho}.$$

ρ_m-ді $\rho_m = 1-\tau_m$ қатынастан табуға болады немесе екінші математикалық анықтама теңдеуін қолдана отырып, ұқсас қайталанатын қатынасты шешуге болады:

$$\rho_m = \frac{m\rho}{1+(m-1)\rho}.$$

В бөлімі: Сантехник (4 ұпай)

a) Біріншіден, сол мен оң жақтарына бөлек Бернулли теңдемелерің жазамыс:

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_{\text{оң}}^2 + p_A (1)$$
$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_{\text{сол}}^2 + p_A (2)$$

Теңдемелерді шығарсақ, $v_0 = v_{\text{сол}} = v_{\text{оң}}$ (3) деген қорытындыға келеміз

Массаның сақталу заңы бойынша, уақыттың бір бөлігін ішінде, ағыстын ажырату нүктесіне келген және сол нүктеден шыққан су массалары тең, сондықтан:

$$\rho S_0 v_0 \Delta t = \rho S_{\text{оң}} v_{\text{оң}} \Delta t + \rho S_{\text{сол}} v_{\text{сол}} \Delta t \quad (4)$$

Металлдың парағынын жағынан күштері суға тек қана вертикальды өсінен әсер етеді (горизонтальды өстер бойнша күштер бір бірлерін теңгереді немесе олар жоқ), сол үшін өс бойы импульстың сақтандыру заңы бойынша:

$$\rho S_0 v_0 \Delta t \cdot v_0 \sin\varphi = \rho S_{\text{оң}} v_{\text{оң}} \Delta t \cdot v_{\text{оң}} - \rho S_{\text{сол}} v_{\text{сол}} \Delta t \cdot V_{\text{сол}} (5)$$

(3)-(5) теңеулерді шығара отырып, шауапқа жетеміз:

$$\frac{S_{\text{оң}}}{S_{\text{лев}}} = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \quad (6)$$

$$S_{\text{сол}} = \frac{1+\sin\varphi}{2} S_0 (7)$$

b) Уаққыттың бір бөліктің ішінде, құбырдан өтететін судың массасы тұрақты болғаннан, кранды жапқаннан жылжымайтын судын массаның өзгеруіне теңдеуді жазуға болады.

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S_{\text{оң}} v_{\text{оң}}$$

Бұл формуланы және (3) пен (7) теңдеулерін қолданып, кранды жапқаннан уақытқа тәуелді жылжымайтын судын массасын табуға болады:

$$m(t) = \frac{1+\sin\varphi}{2} \rho S_0 v_0 t$$

Ал судын қабаттың қалындығы:

$$H_{\text{в}}(t) = \frac{m(t)}{\rho S_0} = \frac{1+\sin\varphi}{2} v_0 t$$

Сонда, судың ақырғы жылдамдығы:

$$v_k = \sqrt{2g\big(H_0 + h - H_{\text{в}}(t)\big) + v_{\text{пр}}^2}$$

Судың кішкентай қабаттын құлауын қарастырсақ, сол кездегі импульстың өзгеруі:

$$\Delta p = v_k \cdot \Delta m$$

Қысым күші-демалу суының қысым күшінің және уақыттың бөлегіндегі импульстың өзгеруіне тең:

$$F = m(t)g + \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F = \frac{1+\sin\varphi}{2} \rho S_0 v_0 \left(gt + \sqrt{\left(2g\big(H_0 + h - H_{\text{в}}(t)\big) + v_{\text{оң}}^2\right)} \right)$$

$$F = \frac{1+\sin\varphi}{2} \rho S_0 v_0 \left(gt + \sqrt{2g\left(H_0 + h - \frac{1+\sin\varphi}{2} v_0 t\right) + v_0^2} \right)$$

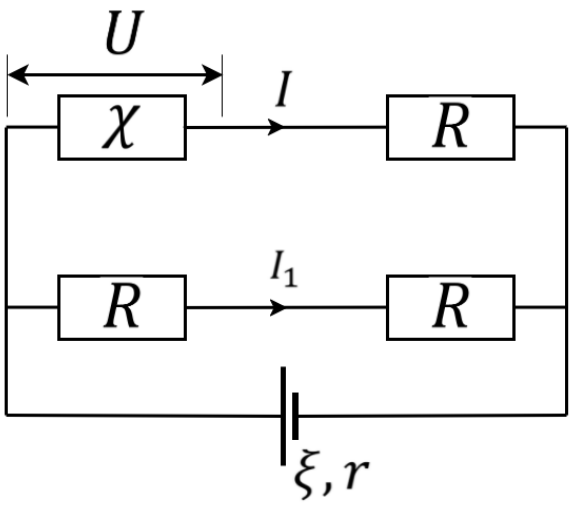
Су құбырдың ішін толықтырған кезде, ол сыртына аға бастайды. Сол $T = \frac{S_0 H_0}{S_{\text{пр}} v_0} = \frac{2H_0}{(1+\sin\varphi)v_0}$, уақыттан кейін болады. Сол кезде қысымның күші тұрақты болады:

$$F = \rho g S_0 H_0 + \frac{1+\sin\varphi}{2}\rho S_0 v_0 \sqrt{2gh + v_0^2}.$$

Қоспа (11 ұпай)		
Бөлім А: Жарық қарқындылығы (6.5 ұпай)		
a)	1 ұпай	$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 \tau^4$ – *0.5 ұпай.* $\frac{\mathcal{J}_0 - \mathcal{J}}{\mathcal{J}_0} = 1 - \tau^4 = 15\%$ – *0.5 ұпай.*
b)	3 ұпай	Кейбір сәулелердің саналған жарық қарқындығымен сызла – 1 ұпай. $\rho, \tau -$ ның шығаруы– 1.5 ұпай. $\rho + \tau = 1$ – 0.5 ұпай
c)	2.5 ұпай	Дұрыс рекуренттік ара қатынас – 1 балл. $\rho_m, \tau_m -$ ның шығаруы – 1.5 балла.
Бөлім В: Сантехник (4.5 балла)		
a)	1.5 ұпай	Бернулли теңдеуі және $v_0 = v_{\text{сол}} = v_{\text{оң}}$ – 0.5 ұпай Импульс сақтандыру заңы – 0.5 ұпай $\frac{S_{\text{оң}}}{S_{\text{сол}}}$ – 0.5 ұпай.
b)	3 ұпай	$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho S_{\text{оң}} v_{\text{оң}}$ – 0.25 ұпай $H_{\text{в}}(t) = \frac{1+\sin\varphi}{2} v_0 t$ – 0.5 ұпай $v_k = \sqrt{2g\left(H_0 + h - H_{\text{в}}(t)\right) + v_{\text{пр}}^2}$ – 0.5 ұпай $\Delta p = v_k \cdot \Delta m$ – *0.25 ұпай* F-тың шығаруы – 0.75 ұпай. $t > T$ болғанда F – 0.75 ұпай.

2 есеп. Бейсызық элемент (9 ұпай)

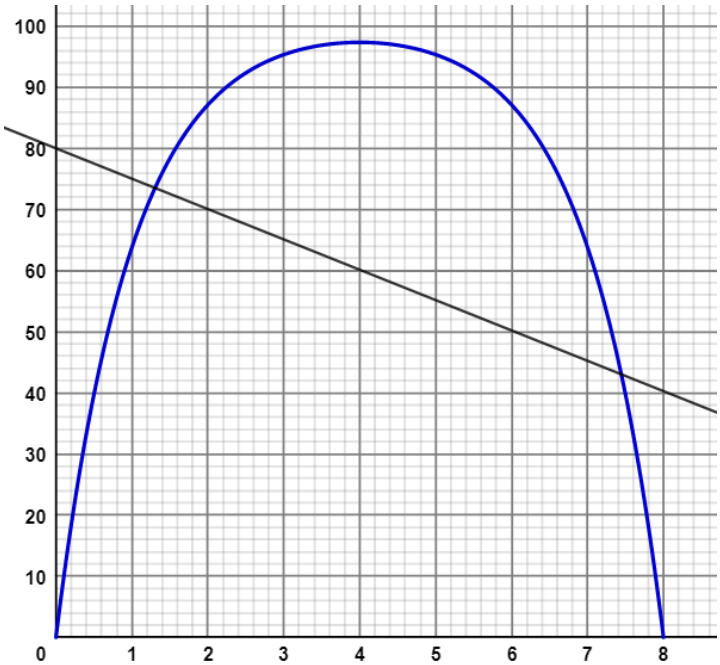
a) Есепті шешу үшін ашық және жабық диодқа сәйкес келетін екі жағдайды қарастыру қажет. Жабық диод үшін Кирхгоф заңдарына сәйкес теңдеулерді жазамыз.



$$\begin{cases} \xi = U + IR + (I + I_1)r \\ 2I_1R = U + IR \\ I = I(U) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} I = \dfrac{2\xi}{2R + 3r} - \dfrac{U}{R}\dfrac{2R + r}{2R + 3r} \\ I = I(U) \end{cases}$$

Алынған теңдеулер жүйесін графикалық түрде шешеміз. Түзу сызық салу үшін $(0\ \text{В},\ 80\ \text{мА})$ және $(8\text{В},\ 40\text{мА})$ нүктелерді алу жеткілікті. Сонда, екі жауап боп шығады: $(U = 1.3\text{В},\ I = 73.5\ \text{мА})$ және $(U = 7.4\ \text{В},\ I = 43.0\ \text{мА})$. Бірінші шешім тұрақты болады, өйткені кернеудің шамалы жоғарылауымен ток күші тұрақты мәнге оралады (екі графиктың келбеуілердің тағбалары $\frac{\delta I}{\delta U}$ қарама-қарсы).



Сонымен, тоқ күші $I = 73.5\ \text{мА}$-ға тең. Егер төменгі түйіндегі кернеудің төмендеуі жоғарғы түйінге қарағанда аз болса, диод жабық болады. Бұл теңсіздікті I_1 білдіру арқылы жазамыз:

$$\xi - U > \xi - I_1R \quad \rightarrow \quad U < IR$$

$$1.3\ \text{В} < 0.0735\ A * 145\ \text{Ом} = 10.7\ \text{В}$$

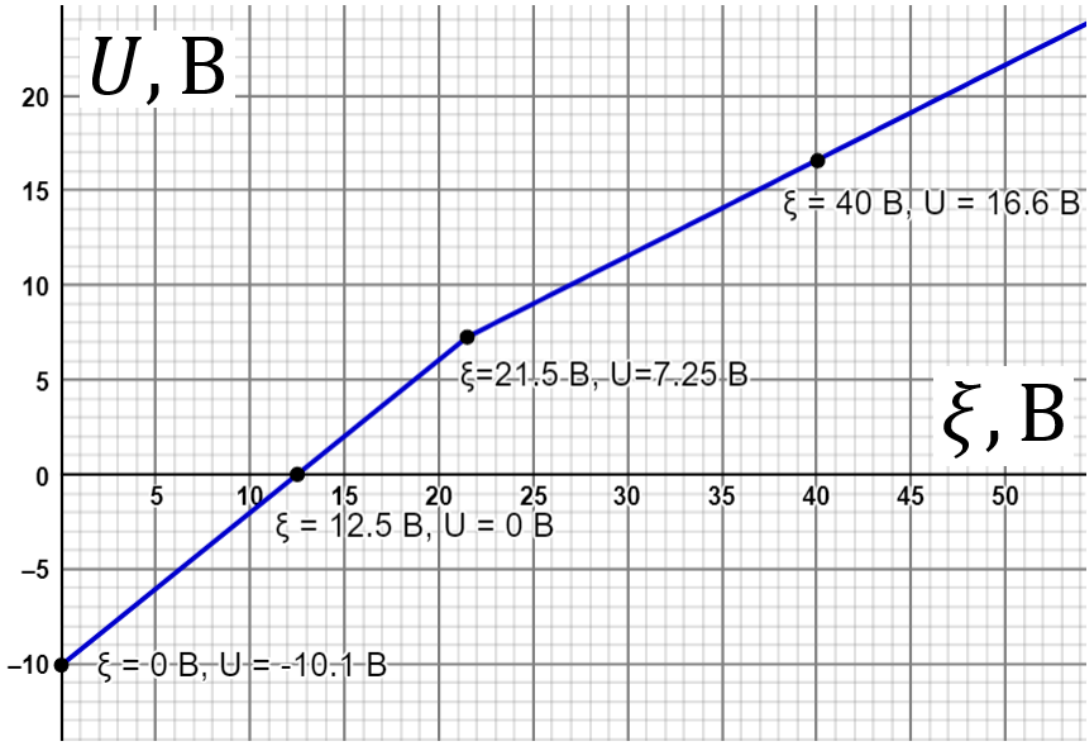
b) $I \rightarrow I_0$ ауыстыруды қолдана отырып, жоғарыдағы тармаққа ұқсас есептеулер жүргіземіз. Содан кейін жабық диод үшін:

$$\begin{cases} U = \xi \dfrac{2R}{2R + r} - I_0 R \dfrac{2R + 3r}{2R + r} \\ U < I_0 R = 7.25 \text{ В} \end{cases}$$

Онда, ашық диод үшін:

$$\begin{cases} U = \xi \dfrac{2R}{3R + 2r} - I_0 R \dfrac{R + 2r}{3R + 2r} \\ U > 7.25 \text{ В} \end{cases}$$

Ақыры, кейбір нүктелерді белгілеп, $U(\xi)$ функциясын сүреттейміз:



Нелинейный элемент (9 ұпай)		
Пункт	**Ұпай**	**Критерий**
a)	4 ұпай	Кирхгофтың заңдары – 0.5 ұпай. $I(U)$ түзуның – 0.5 ұпай. Екі шешім – 1 ұпай. Біріншісі тепе-теңді – 0.5 ұпай. Оның себебі – 0.5 ұпай. Диод жабық болғанның дәлелі – 1 ұпай.
b)	5 ұпай	Жабық диод үшін $U(\xi)$ функциясы және $U < I_0 R$ шарты – 1 ұпай. Ашық диод үшін $U(\xi)$ функциясы және $U > I_0 R$ шарты – 1.5 балла. Сызба – 1 балл. Нүктелердің салуы – 1.5 балла.

Есеп 3. Электрогитара физикасы

a) Жіп жылжытылған кезде оған қайтару күші әсер етеді, бұл салыстырмалы түрде аз бәсеңдеудің тербелістерін тудырады.

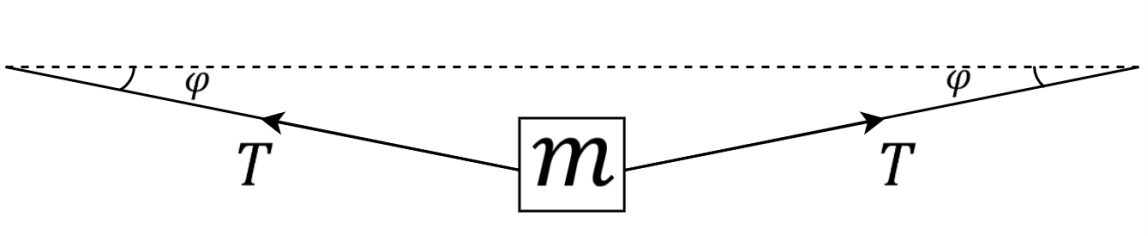
$$m\ddot{x} = -2T\sin\varphi \approx -2T\varphi$$

$$x = \frac{L}{2}\varphi, \qquad m = \rho L\frac{\pi d^2}{4}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{16T}{\pi\rho L^2 d^2}\varphi = 0$$

Содан кейін тербеліс периодын келесідей табуға болады:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\rho L^2 d^2}{16T}} = \frac{\pi L d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho}{T}}$$



b) Есеп шартында берілген формуласына массаны алмастырамыз:

$$f_e = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_e L_0}{m}} = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}.$$

Сондықтан,

$$T_e = \pi\rho(f_e d L_0)^2 = 60\ \text{Н}.$$

Бір қызығы, бұл керілу күші шамамен 29000 (!) жіптің керілген бөлігінің салмағынан есе көп, бірақ мұндай механикалық кернеу болат үшін беріктік шегінен ~5 есе аз.

c) (b) тармақтың түрлендірілген формуласынан тербеліс жиілігі ұзындыққа кері пропорционал екенін көруге болады. Сонда:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sqrt[12]{2}.$$

Осы формуладан жиіліктер геометриялық прогрессия құрайтындығы шығады. Сонда біз оларды келесідей білдіре аламыз:

$$f_n = f_e\left(\sqrt[12]{2}\right)^n, \qquad L_n = \frac{L_0}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$$

n-ші перненің енін осылай таба аламыз:

$$H_n = L_{n-1} - L_n = L_{n-1}\left(\sqrt[12]{2} - 1\right) = L_0\frac{\sqrt[12]{2} - 1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}.$$

Дыбыс жиілігі мен перненің енін реттік нөміріне тәуелділігін көрсететін кестесін жасайық:

n	0	1	2	3	4	5	6
f_n, Гц	330	349.62	370.41	392.43	415.77	440.49	466.69
H_n, см	-	3.87	3.65	3.44	3.25	3.07	2.90

d) Бесінші пернедегі екінші ішектің тербеліс жиілігі бірінші ішектің ашық жиілігімен сәйкес келеді, төртінші пернедегі үшінші ішектің жиілігі екінші ішектің жиілігімен сәйкес келеді және т. б:

$$f_B\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_e, \qquad f_B = f_e \cdot 2^{-\frac{5}{12}};$$
$$f_G\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = f_B, \qquad f_G = f_e \cdot 2^{-\frac{9}{12}};$$
$$f_D\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_G, \qquad f_D = f_e \cdot 2^{-\frac{14}{12}};$$
$$f_A\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_D, \qquad f_A = f_e \cdot 2^{-\frac{19}{12}};$$
$$f_E\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_A, \qquad f_E = f_e \cdot 2^{-\frac{24}{12}}.$$

Ішектің диаметрі дыбыстық тербелістердің жиілігіне кері пропорционал (бірдей керілу күштерімен), сондықтан біз барлық ішектердің диаметрін есептей аламыз:

$$d_B = d_e \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 0.31 \text{ мм},$$
$$d_G = d_e \cdot 2^{\frac{9}{12}} = 0.39 \text{ мм},$$
$$d_D = d_e \cdot 2^{\frac{14}{12}} = 0.52 \text{ мм},$$
$$d_A = d_e \cdot 2^{\frac{19}{12}} = 0.69 \text{ мм},$$
$$d_E = d_e \cdot 2^{\frac{24}{12}} = 0.92 \text{ мм}.$$

Шындығында, бұл жолдардың диаметрлері 0.28, 0.41, 0.66, 0.91 және 1.17 миллиметрді құрайды.

e) Гук заңы арқылы жолдың кернеуін білдіреміз:

$$T_e = \frac{ES}{L_0}\Delta L_0,$$

мұндағы S – жолдың көлденең қимасы, ал ΔL_0 – ішектің бастапқы созылуы. Термиялық кеңеюге байланысты ішектің созылуы өзгереді:

$$L_1 = L_0(1 + \alpha\Delta t),$$
$$\Delta L_1 = (L_0 + \Delta L_0) - L_1 = \Delta L_0 - L_0 \cdot \alpha\Delta t$$
$$T_e' = \frac{ES}{L_1}\Delta L_1 \approx \frac{ES}{L_0}\Delta L_1 = \frac{ES}{L_0}\Delta L_0\left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta L_0/L_0}\right) = T_e\left(1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}\right).$$

$\Delta f_e = f_e' - f_e$:

$$\Delta f_e = \frac{1}{dL_0\sqrt{\pi\rho}}\left(\sqrt{T_e'} - \sqrt{T_e}\right) = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}} - 1\right)$$

$$\approx -f_e\frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{2T_e}.$$

Минус белгісі дыбыс биіктігінің төмендегенін көрсетеді, тербеліс жиілігі тиісінше $\Delta f_e = 5.48$ Гц-ке төмендеді. Температураның өзгеруі ішектерден алынған дыбыстың биіктігіне айтарлықтай әсер етеді.

f) Ішектің жалпы ұзындығы артты, ал бұл ұзарту::

$$\Delta L = \sqrt{L_5^2 + x^2} + \sqrt{(L_0 - L_5)^2 + x^2} - L_0 \approx$$

$$\approx L_5\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{L_5^2}\right) + (L_0 - L_5)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{(L_0 - L_5)^2}\right) - L_0 =$$

$$= \frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5}.$$

Тербелістің жаңа жиілігі:

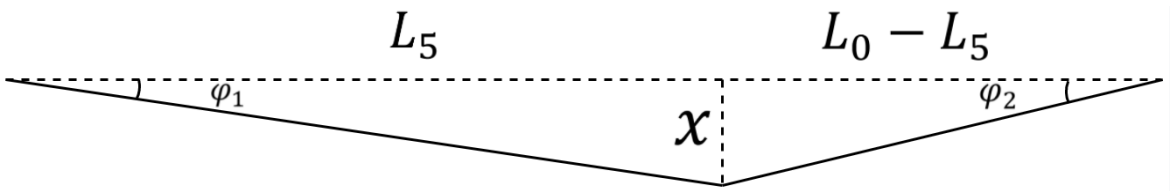
$$f_e' = \frac{1}{dL_5}\sqrt{\frac{T_e'}{\pi\rho}} = \frac{1}{dL_5}\sqrt{\frac{T_e + \frac{ES}{L_0}\Delta L}{\pi\rho}},$$

$$\frac{f_e'}{f_e} = \sqrt{1 + \frac{ES}{T_e L_0}\Delta L} = \sqrt[12]{2}.$$

Сондықтан, ΔL ді теңеп,

$$\frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5} = \frac{T_e L_0}{ES}\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{2T_e L_5(L_0 - L_5)}{ES}\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = L_0\sqrt{\frac{8T_e}{E\pi d^2}\left(1 - 2^{-\frac{5}{12}}\right)\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = 1.37 \text{ см}$$



Электрогитара физикасы (10 ұпай)		
a)	1 ұпай	$m\ddot{x} = -2T\varphi$ – 0.5 ұпай $\tau = \frac{\pi L d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho}{T}}$ – 0.5 ұпай *соңғы жауапта m көрсетілмеді – -0.25 ұпай.*
b)	1 ұпай	$f_e = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}$ – 0.5 ұпай $T_e = \pi\rho(f_e d L_0)^2 = 60\ \text{Н}$ – 0.5 ұпай *Сандық жауап жоқ – -0.25 ұпай.*
c)	2 ұпай	$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sqrt[12]{2}$ – 0.5 ұпай $f_n = f_e\left(\sqrt[12]{2}\right)^n,\ L_n = \frac{L_0}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$ – 0.5 ұпай. $H_n = L_{n-1} - L_n = L_0\frac{\sqrt[12]{2}-1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}$ – 0.5 ұпай. Дұрыс кесте – 0.5 ұпай.
d)	1.5 ұпай	Бүкіл теңдеулері дұрыс – 1 балл Бүкіл сандық шамалары дұрыс – 0.5 ұпай. *Мына пунктта ұпайлар бөлектермен берілуі мүмкін.*
e)	2 ұпай	$\Delta L_1 = \Delta L_0 - L_0 \cdot \alpha\Delta t$ – 0.5 ұпай $T_e' = T_e\left(1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}\right)$ - 0.5 ұпай $\Delta f_e = -f_e\frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{2T_e} = -5.48\text{Гц}$ – 1 ұпай
f)	2.5 ұпай	$\Delta L = \frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5}$ – 0.5 ұпай $\sqrt{1 + \frac{ES}{T_e L_0}\Delta L} = \sqrt[12]{2}$ – 1 ұпай $x = L_0\sqrt{\frac{8T_e}{E\pi d^2}(1 - 2^{-\frac{5}{12}})(\sqrt[6]{2} - 1)} = 1.37\ \text{см}$ – 1 ұпай