

Задача 1. Кошки мышки

- а) Тангенциальное ускорение постоянное, значит можно записать уравнения движения вдоль траектории:

$$S = \frac{at^2}{2} \quad (1)$$

$$at = v_M \quad (2)$$

Где t – время, за которое мышка перешла от одной стенки, до другой:

$$t = \frac{S_M}{v_M} \quad (3)$$

Решая совместно эти уравнения, получаем:

$$S = \frac{S_M}{2} \quad (4)$$

$$S = 1.6\text{м} \quad (5)$$

- б) По определению:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} \quad (6)$$

И используя значение из предыдущего пункта:

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_M}{2} \quad (7)$$

Кошки-мышки (6 баллов)		
а)	4 балла	Формула (1) – 1 балл Формулы (2) и (3) – 1 + 1 балла Правильный ответ – 0.7 балла Численное значение – 0.3 балла
б)	2 балла	Определение средней скорости – 1 балл Ответ – 1 балл

Задача 2. Злые школьники (10 баллов)

- а) Чтобы достичь Ерсултана, школьникам потребуется время $t = \frac{L}{v}$, но чтобы улететь от них, Ерсултан должен иметь ускорение $a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2hv^2}{L^2}$. Расписав все силы которые действуют на систему Ерсултан-шар, мы получим:

$$(N(m_b + m_h) + m_m)a = Ng(\rho_1 V - m_b - m_h) - m_m g.$$

$$m_m(a + g) = N(\rho_1 g V - (m_b + m_h)(g + a))$$

$$N = \frac{m_m(a + g)}{\rho_1 g V - (m_b + m_h)(a + g)} = \frac{m_m}{\frac{\rho_1 g V}{a + g} - (m_b + m_h)}$$

Масса гелия в одном шарике:

$$m_h = \rho_2 V = \rho_2 \frac{4}{3} \pi R^3$$

И тогда, получаем количество шариков, равное:

$$N = \frac{m_m}{\frac{\rho_1 g \cdot 4\pi R^3}{3(a + g)} - \left(m_b + \frac{\rho_2 \cdot 4\pi R^3}{3}\right)} = 1948$$

- б) Распишем траекторию камня по оси x и y :

$$\begin{cases} L = u \cos \alpha t \\ h = u \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} \\ t = \frac{L}{u \cos \alpha} \end{cases}$$

Находим зависимость $h(L)$ и используя выражение для ускорения Ерсултана, находим:

$$\frac{at^2}{2} = L \operatorname{tg} \alpha - \frac{gL^2}{2u^2 \cos^2 \alpha} = \frac{aL^2}{2u^2 \cos^2 \alpha}$$

И выражаем $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\frac{(a + g)}{2u^2} \frac{L}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Подставляя в формулу тригонометрическое равенство $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, составляем квадратное уравнение:

$$\frac{(a+g)}{2u^2} L \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg} \alpha + \frac{(a+g)L}{2u^2} = 0$$

Решая это уравнение, находим решение:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(1 \pm \sqrt{D})u^2}{(a+g)L} \quad \alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{(1 \pm \sqrt{D})u^2}{(a+g)L} \right) \quad \alpha = 13^\circ, 77^\circ, \text{ где } D = 1 - \frac{(a+g)^2 L^2}{u^4}$$

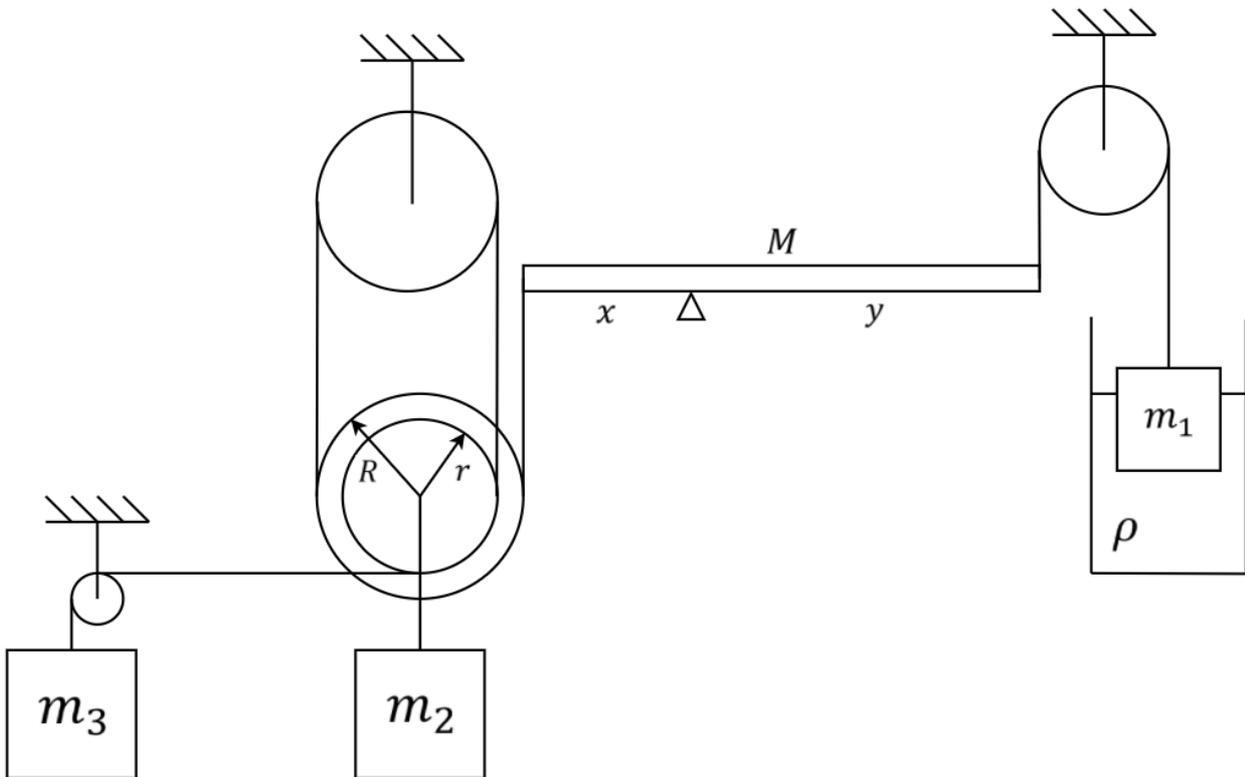
с) при $D = 0$ u будет минимальной, значит: $1 - \frac{(a+g)^2 L^2}{u^4} = 0$ Решая это уравнение, находим ответ:

$$u = \sqrt{(a+g)L} = 7,97 \text{ м/с} \quad \alpha = \operatorname{arctg}(1) = 45^\circ$$

Злые школьники (10 баллов)

a)	4 балла	$t = \frac{L}{v}$ – 0.5 балла $a = \frac{2h}{t^2}$ – 0.5 балла 2 закон Ньютона – 1 балл Масса гелия в одном шарике – 0.5 балла Ответ – 1 балл Численное значение – 0.5 балла
b)	4 балла	Уравнения движения – 0.5 балла за каждое Квадратное уравнение – 0,8 балла Ответ – 1.2 балла Численное значение – 0.5 балла
c)	2 балла	Условие минимума – 0.5 балла Минимальная скорость – 0.5 балла Угол при минимальной скорости – 0.5 балла Численные значения – 0.25 за каждое

Задача 3. Статика (7 баллов)



- а) Нить слева имеет силу натяжения T_2 , а справа T_1 .
Расписывая 1 закон Ньютона для первого груза:

$$m_1 g = T_1 + \rho V g \Rightarrow T_1 = (m_1 - \rho V) g \quad (1)$$

Расстояние от точки опоры, до центра стержня:

$$l_{\text{ц}} = \frac{y - x}{2} \quad (2)$$

По условию равновесия, для стержня:

$$T_2 y + T_1 x = M g l_{\text{ц}} \Rightarrow T_2 = \frac{M g l_{\text{ц}} - T_1 x}{y} \quad (3)$$

Согласно первому закону Ньютона для 2 и 3 грузов:

$$m_3 g = T_2 \Rightarrow m_3 = \frac{T_2}{g} = \frac{M(y - x) - 2(m_1 - \rho V)x}{2y} \quad (4)$$

$$m_2 g = 3T_2 \Rightarrow m_2 = \frac{3T_2}{g} = 3 \frac{M(y - x) - 2(m_1 - \rho V)x}{2y} \quad (5)$$

- б) После того, как верёвка оборвалась, она ещё натянута, поэтому для грузов можно записать второй закон Ньютона (так как

верёвка оборвалась, конец верёвки можно считать ненапрянутым):

$$m_3g - T = m_3a_3(6)$$

$$-m_2g + 2T = m_2a_2(7)$$

Пусть левый груз поднимается на Δx_3 , а правый на Δx_2 . Так как нить перекинута через блок три раза, можно записать равенство: $\Delta x_3 = 3\Delta x_2$. Соответственно, для ускорений $a_3 = 2a_2$.
(8)

Решая совместно уравнения (6) – (8), получаем:

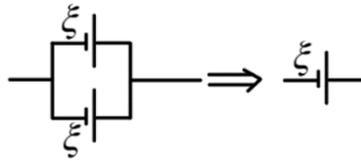
$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_3}{m_2 + 4m_3}g$$

$$a_3 = 3 \frac{m_2 - 2m_3}{m_2 + 4m_3}g$$

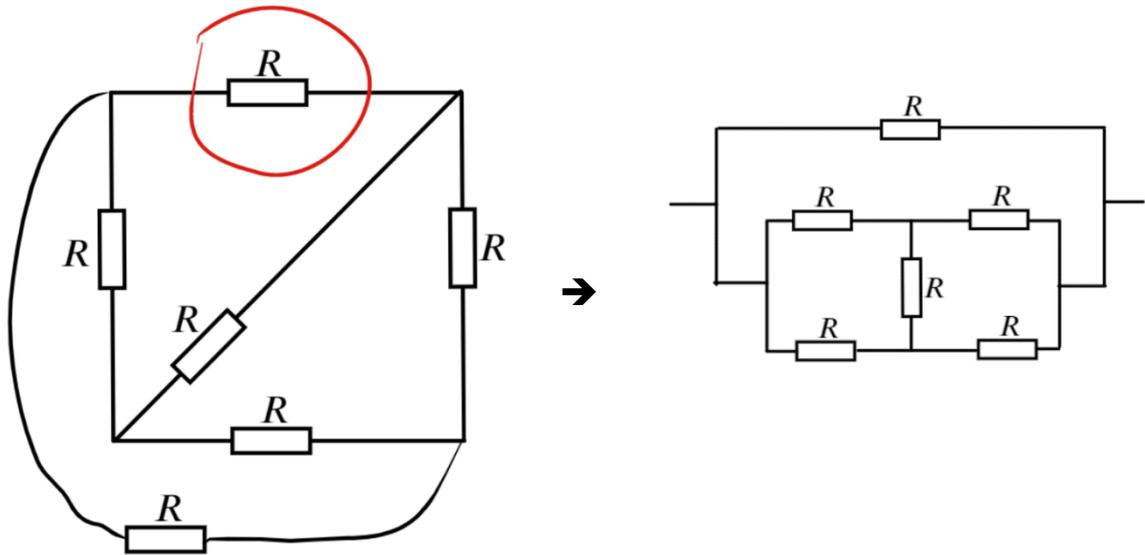
Статика (7 баллов)		
a)	3 балла	Формулы (1)-(3) – 0.5 балла за каждое уравнение Формулы (4)-(5) – 0.75 балл за каждую
b)	4 балла	Уравнения (6)-(7) – 0,6 за каждое Кинематическая связь (8) – 1 балл Решение (6)-(8) – 0,9 балла за каждое уравнение

Задача 4. Феноменальное охлаждение (7 баллов)

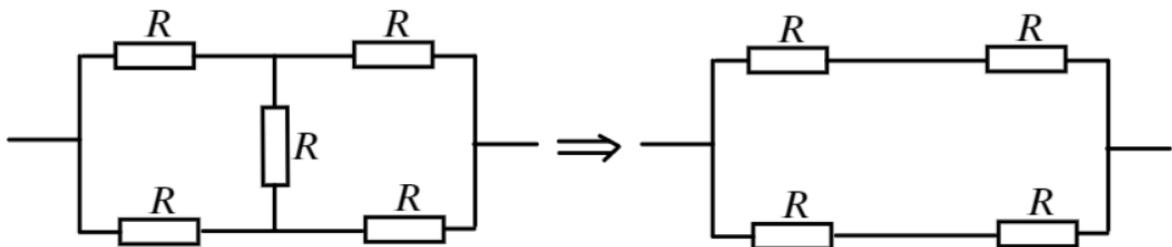
На параллельных участках цепи напряжение одинаковое. Батареи одинаковые, следовательно 2 параллельных источника можно заменить на 1:



Далее, перерисовав внешнюю часть схему (то, что вне батареи), можно увидеть, что участок, обведенный красным параллелен всему остальному:



Если перевернуть нижнюю ветвь цепи, то ничего не изменится, то есть она симметрична относительно горизонтальной оси. Значит, по резистору, который служит перемычкой, ток не течёт, значит её эквивалентная цепь:



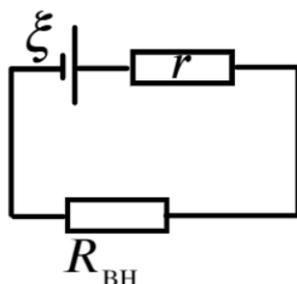
Сопротивление этого участка цепи можно записать в виде:

$$R_1 = \frac{2R \cdot 2R}{2R + 2R} = R$$

И тогда, внешнее сопротивление равно:

$$R_{\text{вн}} = \frac{R \cdot R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

Всю цепь можно нарисовать в виде:



Записывая закон Кирхгофа:

$$\xi = I \cdot (r + R_{\text{вн}})$$

$$I = \frac{\xi}{r + \frac{R}{2}}$$

Источники идеальные $\Rightarrow P_{\text{ист}} = 0$

$$P_{\text{батареи}} = P_{\text{ист}} + P_r = 0 + I^2 r$$

$$P_{\text{батареи}} = \frac{\xi^2 r}{\left(r + \frac{R}{2}\right)^2}$$

Запишем закон сохранения энергии для льда:

$$P_{\text{батареи}} \Delta t = \lambda \Delta m$$

$$\mu = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P_{\text{батареи}}}{\lambda} = \frac{\xi^2 r}{\lambda \left(r + \frac{R}{2}\right)^2} = 8.5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{г}}{\text{с}}$$

Феноменальное сопротивление

7 баллов

Эквивалентный источник – 0.6 балла

Эквивалентная цепь – 0.8 балла

Сбалансированный мостик (формула или симметрия) – 0.8 балла

Внешнее сопротивление – 0.6 балла

Закон Кирхгофа – 0.5 балла

	Выражение для мощности – 0.5 балла Закон сохранения энергии – 0.5 балла Ответ – 2.1 балла Численное значение – 0.6 балла
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------