

Задача 1. Солянка (9 баллов).

Часть А: Магнитное поле проводов.

- а) Этот пункт задачи тривиален. Используя теорему о циркуляции магнитного поля ($\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$), запишем для случая $r > R$.

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I,$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

С учётом направления магнитного поля, можно записать его через векторное произведение:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} (\vec{r} \times \hat{z}).$$

Для случая $r < R$, только часть тока проходит через площадь, ограниченную кругом радиуса r . Тогда запись уравнения видоизменяется:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2},$$

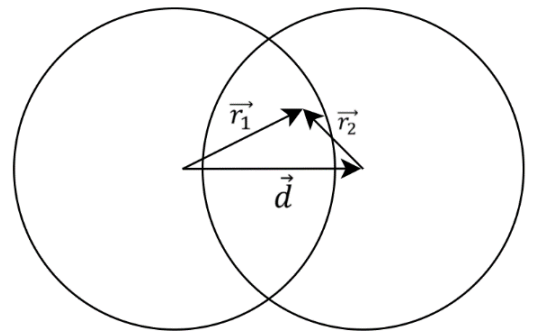
$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2},$$

или, векторно:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} (\vec{r} \times \hat{z}).$$

Линии магнитного поля B представляют собой концентрические окружности в правовинтовом направлении.

- б) Полость можно представить, как пересечение двух противоположно направленных токов. Тогда магнитная индукция в полости является суперпозицией магнитных полей от двух проводов. Проведём радиус-векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ из центров проводов к определённой точке полости. Тогда, (см. рисунок), $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}$. Для магнитной индукции:



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} ((\vec{r}_1 \times \hat{z}) - (\vec{r}_2 \times \hat{z})) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} ((\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \hat{z}).$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} (\vec{d} \times \hat{z})$$

Если ток левого провода направлен от читателя, то магнитное поле направлено вниз, в ином случае – вверх.

Часть В: Неизвестное вещество.

Исходя из уравнения изохоры, давление $P = \text{const} \cdot (T - T_0)$. Его производная по температуре:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \text{const} = \frac{P}{T - T_0}.$$

Возьмём производную внутренней энергии U по объёму V при постоянной температуре T :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{am^2}{V^2} = a\rho^2.$$

Объединяя, подставляем в формулу $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$:

$$a\rho^2 = T \cdot \frac{P}{T - T_0} - P = \frac{PT_0}{T - T_0}.$$

Окончательно выходит:

$$P = \frac{am^2(T - T_0)}{V^2 T_0}.$$

При $T = \text{const}$, давление пропорционально объёму в степени -0.5 ($P \propto \frac{1}{\sqrt{V}}$), так что уравнение изотермы:

$$PV^2 = \text{const}.$$

Возьмём производную плотности по температуре в адиабатическом процессе:

$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{K}{T}.$$

С другой стороны, используя первый закон термодинамики,

$$pdV + dU = 0,$$

дифференцируя внутреннюю энергию и используя $dV = -\frac{m d\rho}{\rho^2}$, получаем:

$$\left(\frac{a\rho^2(T - T_0)}{T_0} + a\rho^2\right)\left(-\frac{m d\rho}{\rho^2}\right) + b dT = 0$$
$$\frac{d\rho}{dT} = \frac{bT_0}{am} \frac{1}{T} \rightarrow K = \frac{bT_0}{am}$$

Солянка (9 баллов)

Часть А: Магнитное поле проводов (4 балла)

а)	1.5 балла	Теорема о циркуляции (общая формула либо верная запись уравнения к задаче) – 0.5 баллов $\vec{B}$ ($r > R$) – 0.4 баллов
----	-----------	---

		$\vec{B}$ ($r < R$) – 0.6 баллов Если не описано направление, но верна векторная запись, то ставится полный балл
b)	2.5 балла	$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ – 1.5 балла. $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{d}$ – 0.5 балла. Конечный ответ для $\vec{B}$ – 0.5 балла.
Часть В: Неизвестное вещество (5 баллов)		
Верно взята производная $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ – 0.5 баллов Верно взята производная $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T$ – 0.5 баллов. Вывод Р – 1 балл. $P^2V = \text{const}$ – 0.5 баллов. $\frac{d\rho}{dT} = \frac{K}{T}$ – 0.5 баллов $p dV + dU = 0$ – 0.5 баллов $dV = -\frac{m d\rho}{\rho^2}$ – 0.5 баллов $K = \frac{bT_0}{am}$ – 1 балл.		

Задача 2. Параболическое зеркало (10 баллов)

- а) Рассматривая луч, который ударяется о край зеркала в точке А и попадая на край диска в точке В (диск расположен в точке С, $OC = \frac{R}{2}$), получаем:

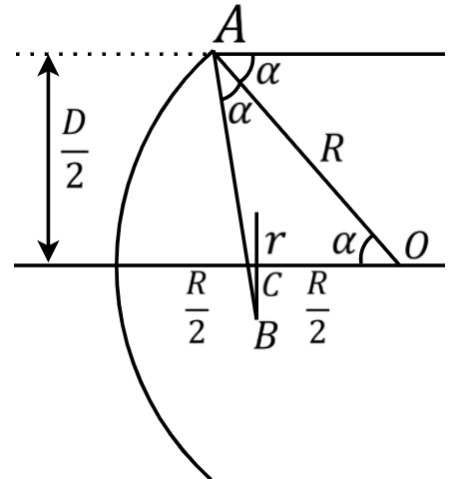
$$\sin \alpha = \frac{D}{2R}.$$

Рассматривая, например, проекции АВ и ОА на главную оптическую ось, получим выражение:

$$\left(r + \frac{D}{2}\right) \cos 2\alpha = R \cos \alpha - \frac{R}{2}.$$

Выражая α в этом уравнении, получаем ответ:

$$r = \frac{R}{2} \cdot \frac{2R\sqrt{4R^2 - D^2}}{2R^2 - D^2} - \frac{D}{2}.$$



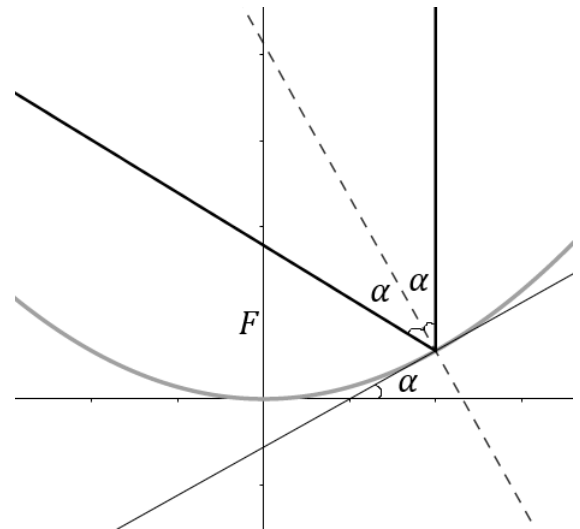
- б) Возьмём произвольно взятый участок ртути на поверхности. Его наклон к горизонту равен α , причём $\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$. С другой стороны, из условия равновесия получаем $\tan \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$. Проинтегрируем это выражение:

$$\int_0^y dy = \int_0^x \frac{\omega^2 x}{g} dx$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2,$$

то есть поверхность ртути действительно является параболоидом вращения.

- с) Луч, идущий параллельно зеркалу, отражается и сходится в фокусе этого зеркала. Пусть координаты точки отражения



будут x и y . Тогда, используя $\tan \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$,

$$F = y + x \cot 2\alpha = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + x \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha} =$$

$$= \frac{\omega^2}{2g} x^2 + \frac{x}{2} (\cot \alpha - \tan \alpha) = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + \frac{x}{2} \left(\frac{g}{\omega^2 x} - \frac{\omega^2 x}{g} \right) = \frac{g}{2\omega^2}.$$

В выражении для F переменная x сократилась, а это означает, что у этой оптической системы нет аберрации.

- d) Раскручивание ведра ограничено двумя условиями: ртуть не должна выливаться из ведра; вершина параболоида должна быть выше дна ведра. В таком случае, используя уравнение

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2,$$

положим, что при $x = R$, $y = H$:

$$H = \frac{\omega_{max}^2}{2g} R^2, \quad \omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}} = 16.3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Рассчитаем объём ртути в этом случае:

$$V = \int_0^R 2\pi x dx \cdot y = \frac{\pi \omega_{max}^2}{g} \int_0^R x^3 dx = \frac{\pi \omega_{max}^2 R^4}{4g} = \frac{\pi R^2 H}{2} = 10.6 \text{ л.}$$

Параболическое зеркало (8 баллов)		
a)	2.5 балла	Диск расположен на $R/2$ от центра кривизны – 0.5 баллов Отражённый от края зеркала свет попадает на противоположный край диска – 0.5 баллов. $\sin \alpha = \frac{D}{2R}$ – 0.5 баллов Любое уравнение, из которого можно верно вывести r – 0.5 баллов. r – 0.5 баллов.
b)	2 балла	$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$ – 0.75 балл $\tan \alpha = \frac{\omega^2 x}{g}$ – 0.75 балл $y = \frac{\omega^2}{2g} x^2$ – 0.5 баллов
c)	1.5 балла	Любое уравнение, из которого можно верно вывести F – 0.5 балл. $F = \frac{g}{2\omega^2}$ – 1 балл
d)	2 балла	$H = \frac{\omega_{max}^2}{2g} R^2$ – 0.5 баллов. $\omega_{max} = \sqrt{\frac{2gH}{R^2}} = 16.3 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ – 0.5 баллов. $V = \int_0^R 2\pi x dx \cdot y$ – 0.5 балл $V = \frac{\pi R^2 H}{2} = 10.6 \text{ л}$ – 0.5 баллов

Задача 3. Изучение движения ядра планет (13 баллов).

Часть А. Влияние гравитации (2 балла)

А.1. Найдите гравитационное поле внутри ядра планеты при таком смещении. (1.5 балл)

Решение:

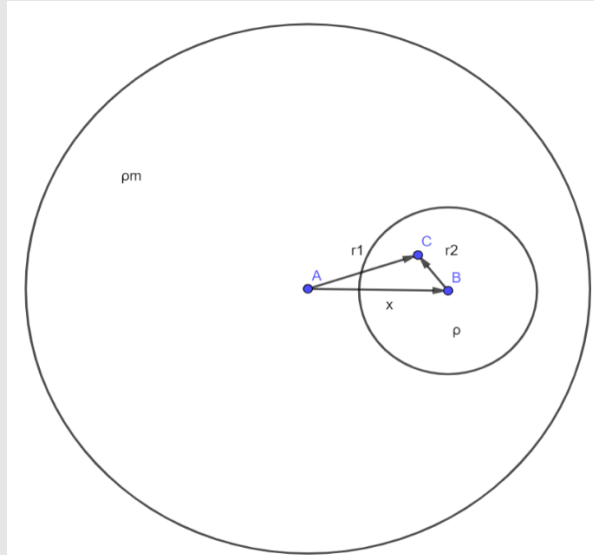


Рис. 1. Планета с включением.

Для решения данной задачи найдем поле внутри однородного шара плотности ρ_m на расстоянии r от центра.

По теореме Гаусса в гравитации: $4\pi r^2 g = 4\pi G \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m \rightarrow g = \frac{4}{3}\pi G \rho_m r$ (0.5)

Рассмотрим теперь планету с сферической полостью, центр которой на расстоянии x , тогда полость можно рассмотреть, как 2 шарообразных включения с плотностью ρ_m и $-\rho_m$ в полости. Тогда наше поле внутри полости представится суперпозицией оставшейся планеты и включения ρ_m , что есть полный однородный шар, а также включения $-\rho_m$, которое также дает поле однородного шара внутри полости. (2)

Поле внутри полости: $\vec{g}_1 = -\frac{4}{3}\pi G \rho_m (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{4}{3}\pi G \rho_m \vec{x}$ (0.5)

Однако наше ядро – это не полость, и она также имеет массу, так что следует учесть ее поле тоже: $\vec{g}_2 = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}_2$. (0.2)

Полное поле будет:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -\frac{4}{3}\pi G \rho \vec{r}_2 - \frac{4}{3}\pi G \rho_m \vec{x} \quad (0.3)$$

А.2. Найдите силу, действующую на ядро из-за влияния гравитации (0,5 балла)

Решение:

Известно, что сила определяется как $\vec{F} = m\vec{g}$ (1)

В случае неоднородного поля можно записать общую силу как:

$$\vec{F} = \sum \vec{g} \Delta m = -\frac{4}{3} \pi G \rho_m \vec{x} \sum \Delta m - \frac{4}{3} \pi G \rho \sum \vec{r}_2 \Delta m = -\frac{4}{3} \pi G \rho_m m \vec{x} \quad (0.5)$$

Потому что $\sum \vec{r}_2 \Delta m$ представляет собой положение центра масс ядра, который находится в центре ядра, что значит $\sum \vec{r}_2 \Delta m = 0$. (3)

Часть В. Учет движения мантии вместе с ядром (5 баллов)

В.1. Найдите граничные условия для скорости жидкости. (0,5 баллов)

Решение: Граничные условия данной задачи очевидны и представляют собой:

$$v_n = 0 \quad (0.25)$$

$$v_\infty = v_0 \quad (0.25)$$

так как движение шара неспособно повлиять на движение мантии на бесконечности, а также мантия не способна проникнуть в ядро и нормальная составляющая скорости равна нулю.

В.2. Покажите, что можно провести аналогию между скоростью жидкости вокруг шара при его обтекании и индукцией магнитного поля при помещении сверхпроводящего шара в однородное магнитное поле. (1 балл)

Решение: для начала, найдем что из себя представляет задача о нахождении скоростей. В нашем случае безвихревого движения жидкости циркуляция скорости равна нулю. ($\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$) (1)

Вследствие этого, наше поле скоростей можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции, т.е. $\vec{v} = -grad(\alpha)$ (2)

Также заметим, что для жидкости должно выполняться уравнение непрерывности:

$$div(\rho \vec{v}) = 0 \rightarrow \rho \cdot div(\vec{v}) = 0 \rightarrow div(\vec{v}) = 0 \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) получим дифференциальное уравнение для нахождения скорости жидкости: $\Delta \alpha = 0$ (4)

Теперь рассмотрим задачу о помещении сверхпроводящего шара в однородное магнитное поле. Заметим, что граничные условия данной задачи совпадают с условиями для скорости:

$B_n = 0$; $B_\infty = B_0$, так как поток магнитной индукции внутри сверхпроводника равен 0. (5)

Также, так как мы работаем в магнитоэстатическом случае, то $div(\vec{B}) = 0$ (6)

А из-за того, что мы работаем с сверхпроводниками, то будут отсутствовать токи, что значит $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$ (7) и наше поле можно представить в виде градиента магнитного потенциала: $\vec{B} = -grad(\varphi)$. (8)

Подставляя (8) в (6) получим то же уравнение, что и для $\vec{v}$, т.е. $\Delta \varphi = 0$ (9)

То есть мы получили одни и те же дифференциальные уравнения с одинаковыми граничными условиями для нахождения индукции и скорости. То есть $\vec{v}$ и $\vec{B}$ совпадают с точностью до умножения на произвольную постоянную.

За идею в решении участника даются частичные баллы.

В.3. Найдите установившуюся скорость жидкости во всем пространстве вокруг шара. (2 балла)

Решение: как мы уже доказали в пункте В.2. нашу задачу о нахождении скорости жидкости можно свести к задаче о нахождении поля вокруг проводящего шара.

Рассмотрим проводящий шар в однородном магнитном поле $\vec{B}_0$. Заметим, что в таком случае нам требуется получить такое решение, что на поверхности шара нормальная составляющая поля равна нулю. Предположим, что магнитное поле шара можно представить в виде поля диполя. (1)

Тогда поле сверхпроводящего шара вместе с однородным будет в виде

$$\vec{B} = \frac{3k(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{k\vec{m}}{r^3} + \vec{B}_0 \quad (0.2)$$

Запишем граничное условие для направления, составляющего угол θ с направлением диполя:

$$\frac{3km}{R^3} \cdot \cos(\theta) - \frac{km}{R^3} \cdot \cos(\theta) + B_0 \cos(\theta) = 0 \rightarrow m = -\frac{B_0 R^3}{2k} \quad (1.0)$$

Тогда поле вокруг сверхпроводящего шара будет:

$$\vec{B} = -\frac{3R^3(\vec{B}_0 \cdot \vec{r})\vec{r}}{2r^5} + \frac{\vec{B}_0 R^3}{2r^3} + \vec{B}_0 \quad (0.2)$$

Теперь мы можем записать скорость в пространстве вокруг шара в системе отсчета шара:

$$\vec{v} = -\frac{3R^3(\vec{v}_0 \cdot \vec{r})\vec{r}}{2r^5} + \frac{\vec{v}_0 R^3}{2r^3} + \vec{v}_0 \quad (0.2)$$

А перейдя в покоящуюся систему отсчета это будет:

$$\vec{v} = -\frac{3R^3(\vec{v}_0 \cdot \vec{r})\vec{r}}{2r^5} + \frac{\vec{v}_0 R^3}{2r^3} \quad (0.4)$$

В.4. Найдите присоединенную массу μ . (1,5 балла)

Решение: Для нахождения присоединенной массы жидкости надо определить кинетическую энергию жидкости.

$$E_k = \int \frac{dmv^2}{2}$$

$$dm = 2\pi r \sin \theta \cdot dr \cdot r d\theta$$

$$E_k = \int_R^\infty \int_0^\pi \pi r^2 \sin \theta v^2 dr d\theta \quad (0.5)$$

При подстановке v из предыдущего пункта $v^2 = \frac{v_0^2(1+3\cos^2 \theta)R^6}{r^6} \quad (0.5)$

$$E_k = \frac{\pi \rho v_0^2 R^6}{4} \int_R^\infty \frac{dr}{r^4} \int_\pi^0 (1 + 3 \cos^2 \theta) d(\cos \theta) = \frac{\pi \rho R^3 v_0^2}{3} \quad (0.5)$$

Часть С. Учет влияния давления мантии.

С.1. Выразите давление жидкости в произвольной точке внутри планеты как функцию от гравитационного потенциала φ в данной точке. **(1 балл)**

Решение: Наша жидкость находится в равновесии, значит все приложенные к ней силы уравновешены. Рассмотрим силы вдоль x :

Сила давления: $F_{pressure} = -\frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot V$ (0.4)

Сила гравитации: $F_{grav} = \rho V g = -\frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cdot \rho V$ (0.4)

Учитывая условие равновесия $F_{pressure} + F_{grav} = 0$, можно получить, что

$$p = -\rho \varphi(x, y, z) + C \quad (0.2)$$

С.2. Найдите гравитационный потенциал внутри ядра как функцию расстояний от центра планеты $\vec{r}_1$, ядра $\vec{r}_2$ и смещения $\vec{x}$, и напишите уравнение, связывающее эти три величины. **(2 балла)**

Решение: Для начала найдем потенциал в однородном шаре с плотностью ρ . Для начала найдем потенциал поверхности шара:

$$\varphi(R) = \int_{\infty}^R \frac{GM}{r^2} dr = -\frac{GM}{R} \quad (0.3)$$

Теперь найдем потенциал, создаваемый мантией на расстоянии r_1 от центра планеты. Для этого используем результат из А.1. для поля в однородном шаре:

$$\begin{aligned} \varphi(R) - \varphi(r_1) &= \int_{r_1}^R g dr = \int_{r_1}^R \frac{4}{3} \pi G \rho r dr = \frac{4}{3} \pi G \rho \frac{R^2 - r_1^2}{2} = \frac{GM}{2R} - \frac{GM r_1^2}{2R^3} \\ \varphi(r_1) &= -\frac{3}{2} \frac{GM}{R} + \frac{GM r_1^2}{2R^3} \quad (0.6) \end{aligned}$$

К нему в силу суперпозиции должен добавиться потенциал ядра $\varphi(r_2)$:

$$\varphi(r_2) = -\frac{3}{2} \frac{Gm}{r} + \frac{Gm r_2^2}{2r^3}$$

Здесь r – радиус ядра, а $m = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho - \rho_m)$ (0.4)

Тогда потенциал внутри шара будет:

$$\varphi = -\frac{3}{2} \frac{GM}{R} + \frac{GM r_1^2}{2R^3} - \frac{3}{2} \frac{Gm}{r} + \frac{Gm r_2^2}{2r^3} \quad (0.2)$$

Причем r_1, r_2 связаны теоремой косинусов и $r_1^2 = x^2 + r_2^2 + 2x r_2 \cos(\theta)$ (0.5)
 θ – угол между $\vec{x}$ и $\vec{r}_2$.

С.3. Найдите силу давления жидкости, действующую на ядро планеты. **(1.5 балла)**

Решение: Заметим, что сила давления на ядро будет нормальна поверхности ядра. (1)

$$dF = 2\pi r^2 p(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (0.5)$$

Полная сила, в силу симметрии, будет направлена вдоль x , тогда

$$dF_x = 2\pi r^2 p(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = -2\pi r^2 p(\theta) \cos(\theta) d(\cos(\theta)) \quad (0.3)$$

Тогда полную силу можно найти как:

$$F_p = \int_{\pi}^0 2\pi r^2 \rho \cdot \frac{GM}{2R} \cdot \frac{2xr}{R^2} \cos^2(\theta) d(\cos(\theta))$$

Так как части не пропорциональные косинусу обратятся в ноль при интегрировании.

$$F_p = \frac{16\pi^2}{9} G \rho_m^2 r^3 x \quad (0.7)$$

Часть D. Определение движения ядра планеты

D.1. Качественно покажите, что уравнение движения ядра планеты будет представлять собой гармонические колебания и найдите частоту малых колебаний ядра планеты. Считайте известной плотность мантии $\rho_m = 4,8 \text{ г/см}^3$, а плотность ядра $\rho = 12,7 \text{ г/см}^3$. **(1,5 балла)**

Решение: из частей А и С видно, что $F = F_g - F_p \propto x$, а также $F < 0$, значит уравнение движения планеты можно представить как $M\ddot{x} = -Cx$, что является уравнением гармонических колебаний.

Найдем силу

$$F = F_g - F_p = -\frac{16}{9} \pi^2 G \rho_m (\rho - \rho_m) r^3 x \quad (0.2)$$

Также заметим, что из части В мы можем найти эффективную массу ядра как:

$$M = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho + \frac{2}{3} \pi r^3 \rho_m = \frac{2}{3} \pi r^3 (2\rho + \rho_m) \quad (0.5)$$

Тогда из уравнения движения $M\ddot{x} = -Cx$ получим

$$\omega^2 = \frac{C}{M} = -\frac{F}{Mx} = \frac{8}{3} \pi G \cdot \frac{\rho_m (\rho - \rho_m)}{2\rho + \rho_m} \quad (0.6)$$

$$\omega = 8.367 \cdot 10^{-4} \text{ Гц} \quad (0.2)$$