Задача 1. Физика электрогитары.

a) При смещении струны на неё действует возвращающая сила, которая вызывает колебания относительно малого затухания.

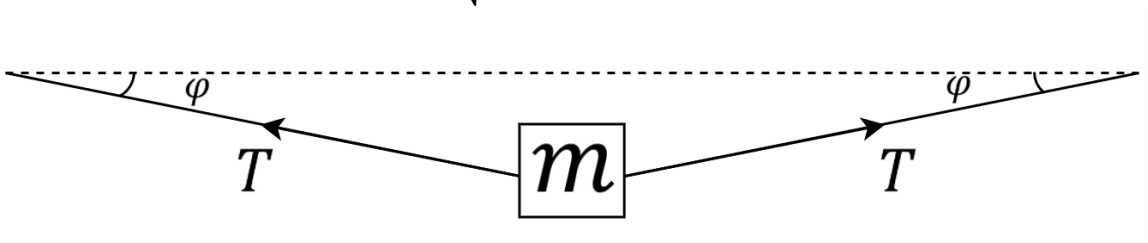
$$m\ddot{x} = -2T\sin\varphi \approx -2T\varphi$$

$$x = \frac{L}{2}\varphi, \qquad m = \rho L\frac{\pi d^2}{4}$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{16T}{\pi\rho L^2 d^2}\varphi = 0$$

Тогда период колебаний равен:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\pi\rho L^2 d^2}{16T}} = \frac{\pi L d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho}{T}}$$



b) Выразим массу в заданной в условии формуле:

$$f_e = \frac{1}{2L_0}\sqrt{\frac{T_e L_0}{m}} = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}.$$

Следовательно,

$$T_e = \pi\rho(f_e d L_0)^2 = 60\ \text{Н}.$$

Интересно отметить, что эта сила натяжения примерно в 29000 (!) раз больше веса натянутой части струны, но такое механическое напряжение всё ещё в ~5 раз меньше предела прочности для стали.

c) Как мы видим из преобразованной формулы пункта (b), частота колебаний обратно пропорциональна длине. Тогда:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sqrt[12]{2}.$$

Эти величины образуют геометрическую прогрессию, тогда их можно выразить как:

$$f_n = f_e\left(\sqrt[12]{2}\right)^n, \qquad L_n = \frac{L_0}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$$

Ширина n-ного лада равна

$$H_n = L_{n-1} - L_n = L_{n-1}\left(\sqrt[12]{2} - 1\right) = L_0\frac{\sqrt[12]{2} - 1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}.$$

Оформим таблицу численных значений частоты звука и ширины лада от порядкового номера:

n	0	1	2	3	4	5	6
f_n, Гц	330	349.62	370.41	392.43	415.77	440.49	466.69
H_n, см	-	3.87	3.65	3.44	3.25	3.07	2.90

d) Частота колебаний второй струны на пятом ладу совпадает с частотой открытой первой струны, третьей струны на четвёртом ладу совпадает со второй струной и так далее:

$$f_B\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_e, \qquad f_B = f_e \cdot 2^{-\frac{5}{12}};$$
$$f_G\left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = f_B, \qquad f_G = f_e \cdot 2^{-\frac{9}{12}};$$
$$f_D\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_G, \qquad f_D = f_e \cdot 2^{-\frac{14}{12}};$$
$$f_A\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_D, \qquad f_A = f_e \cdot 2^{-\frac{19}{12}};$$
$$f_E\left(\sqrt[12]{2}\right)^5 = f_A, \qquad f_E = f_e \cdot 2^{-\frac{24}{12}}.$$

Диаметр струны обратно пропорционален частоте звуковых колебаний (при равных силах натяжения), поэтому получаем:

$$d_B = d_e \cdot 2^{\frac{5}{12}} = 0.31 \text{ мм},$$
$$d_G = d_e \cdot 2^{\frac{9}{12}} = 0.39 \text{ мм},$$
$$d_D = d_e \cdot 2^{\frac{14}{12}} = 0.52 \text{ мм},$$
$$d_A = d_e \cdot 2^{\frac{19}{12}} = 0.69 \text{ мм},$$
$$d_E = d_e \cdot 2^{\frac{24}{12}} = 0.92 \text{ мм}.$$

В действительности, диаметры этих струн составляют 0.28, 0.41, 0.66, 0.91 и 1.17 миллиметра.

e) Выразим натяжение струны через закон Гука:

$$T_e = \frac{ES}{L_0}\Delta L_0,$$

где S – площадь поперечного сечения струны, а ΔL_0 – начальное растяжение струны. Из-за термического расширения растяжение струны изменяется:

$$L_1 = L_0(1 + \alpha\Delta t),$$
$$\Delta L_1 = (L_0 + \Delta L_0) - L_1 = \Delta L_0 - L_0 \cdot \alpha\Delta t$$
$$T_e' = \frac{ES}{L_1}\Delta L_1 \approx \frac{ES}{L_0}\Delta L_1 = \frac{ES}{L_0}\Delta L_0\left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{\Delta L_0/L_0}\right) = T_e\left(1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}\right).$$

Тогда разность частот $\Delta f_e = f_e' - f_e$:

$$\Delta f_e = \frac{1}{dL_0\sqrt{\pi\rho}}\left(\sqrt{T_e'} - \sqrt{T_e}\right) = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}} - 1\right)$$
$$\approx -f_e\frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{2T_e}.$$

Знак минус говорит о том, что высота звука снизилась, частота колебаний соответственно стала ниже на $\Delta f_e = 5.48$ Гц. Перепады температур довольно заметно влияют на высоту извлекаемого из струн звука.

f) Общая длина струны увеличилась, при этом это удлинение равно:

$$\Delta L = \sqrt{L_5^2 + x^2} + \sqrt{(L_0 - L_5)^2 + x^2} - L_0 \approx$$
$$\approx L_5\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{L_5^2}\right) + (L_0 - L_5)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{(L_0 - L_5)^2}\right) - L_0 =$$
$$= \frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5}.$$

Новая частота колебаний равна:

$$f_e' = \frac{1}{dL_5}\sqrt{\frac{T_e'}{\pi\rho}} = \frac{1}{dL_5}\sqrt{\frac{T_e + \frac{ES}{L_0}\Delta L}{\pi\rho}},$$
$$\frac{f_e'}{f_e} = \sqrt{1 + \frac{ES}{T_e L_0}\Delta L} = \sqrt[12]{2}.$$

Таким образом, приравнивая ΔL,

$$\frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5} = \frac{T_e L_0}{ES}\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)$$
$$x = \sqrt{\frac{2T_e L_5(L_0 - L_5)}{ES}\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = L_0\sqrt{\frac{8T_e}{E\pi d^2}\left(1 - 2^{-\frac{5}{12}}\right)\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = 1.37 \text{ см}$$

Физика электрогитары (10 баллов)		
a)	1 балл	$m\ddot{x} = -2T\varphi$ – 0.5 баллов $\tau = \frac{\pi L d}{2}\sqrt{\frac{\pi\rho}{T}}$ – 0.5 баллов *Не выражен m в конечном ответе – -0.25 баллов.*
b)	1 балл	$f_e = \frac{1}{dL_0}\sqrt{\frac{T_e}{\pi\rho}}$ – 0.5 баллов $T_e = \pi\rho(f_e d L_0)^2 = 60\ \text{Н}$ – 0.5 баллов *Нет численного ответа – -0.25 баллов.*
c)	2 балла	$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{L_n}{L_{n+1}} = \sqrt[12]{2}$ – 0.5 баллов $f_n = f_e\left(\sqrt[12]{2}\right)^n,\ L_n = \frac{L_0}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^n}$ – 0.5 баллов. $H_n = L_{n-1} - L_n = L_0\frac{\sqrt[12]{2}-1}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{n-1}}$ – 0.5 баллов. Верная таблица – 0.5 баллов.
d)	1.5 балла	Верны все уравнения – 1 балл Верны все численные значения – 0.5 баллов. *В этом пункте баллы могут выдаваться частично.*
e)	2 балла	$\Delta L_1 = \Delta L_0 - L_0 \cdot \alpha\Delta t$ – 0.5 баллов $T_e' = T_e\left(1 - \frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{T_e}\right)$ - 0.5 баллов $\Delta f_e = -f_e\frac{\alpha\Delta t \cdot ES}{2T_e} = -5.48\text{Гц}$ – 1 балл
f)	2.5 балла	$\Delta L = \frac{x^2}{2L_5}\cdot\frac{L_0}{L_0 - L_5}$ – 0.5 баллов $\sqrt{1 + \frac{ES}{T_e L_0}\Delta L} = \sqrt[12]{2}$ – 1 балл $x = L_0\sqrt{\frac{8T_e}{E\pi d^2}\left(1 - 2^{-\frac{5}{12}}\right)\left(\sqrt[6]{2} - 1\right)} = 1.37\ \text{см}$ – 1 балл

Задача 2. Определение силы взаимодействия по свойствам траектории (10 баллов)

Часть А. Определение силы взаимодействия

А.1. Найдите возможные значения α по рисунку 1. **(1 балл)**

Решение: По виду траектории можно легко определить, что это эллипс. (1)
Известно, что существуют лишь 2 вида взаимодействия, при котором траекторией будет эллипс: $F \propto r^{-2}$ (2) (гравитационное или кулоновское взаимодействие) и $F \propto r$ (3) (закон Гука).

Таким образом, $\alpha = 1;\ -2$

А.2. Для каждого значения α найдите возможные положения точки А. **(1 балл)**

Решение: По 1 закону Кеплера при гравитационном взаимодействии тело движется по эллипсу вокруг центрального тела в фокусе. В этом случае точка А будет в фокусе эллипса. (1)

С другой стороны, при взаимодействии $F \propto r$ мы можем разложить силу вдоль x и y, тем самым получив гармонические колебания (пружинный маятник). Тогда уравнение движения можно представить в виде $x = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ и $y = y_0 \sin(\omega t + \delta)$, так что при определенном выборе начальных фаз можем получить уравнение эллипса в параметрическом виде. В этом случае точка А это центр эллипса. (2)

Возможные положения А: А(-8; 0) и А(0; 0), А(-16, 0) (3)

Часть В. Определение точного вида взаимодействия

В.1. По этой записи укажите верное значение α и возможные положения тела А. **(0,5 балла)**

Решение: Описанная в записи Самата ситуация возможна только при α=-2, так как при α=1 сила прямо пропорциональна удалению тела, а значит тело вначале будет ускоряться быстрее. Положение тела А это все еще фокусы: А(0; 0), А(-16, 0).

Часть C. Определение значения постоянной

C.1. По этим данным определите постоянную C для возможных положений тела A. **(3,5 балла)**

Решение: Как мы можем заметить, значения $\Delta t, \Delta x$ и Δy малы. Это значит, что мы можем определить по ним значения скорости и ускорения тела. (1)

1) Найдем постоянную при A в точке (0, 0)

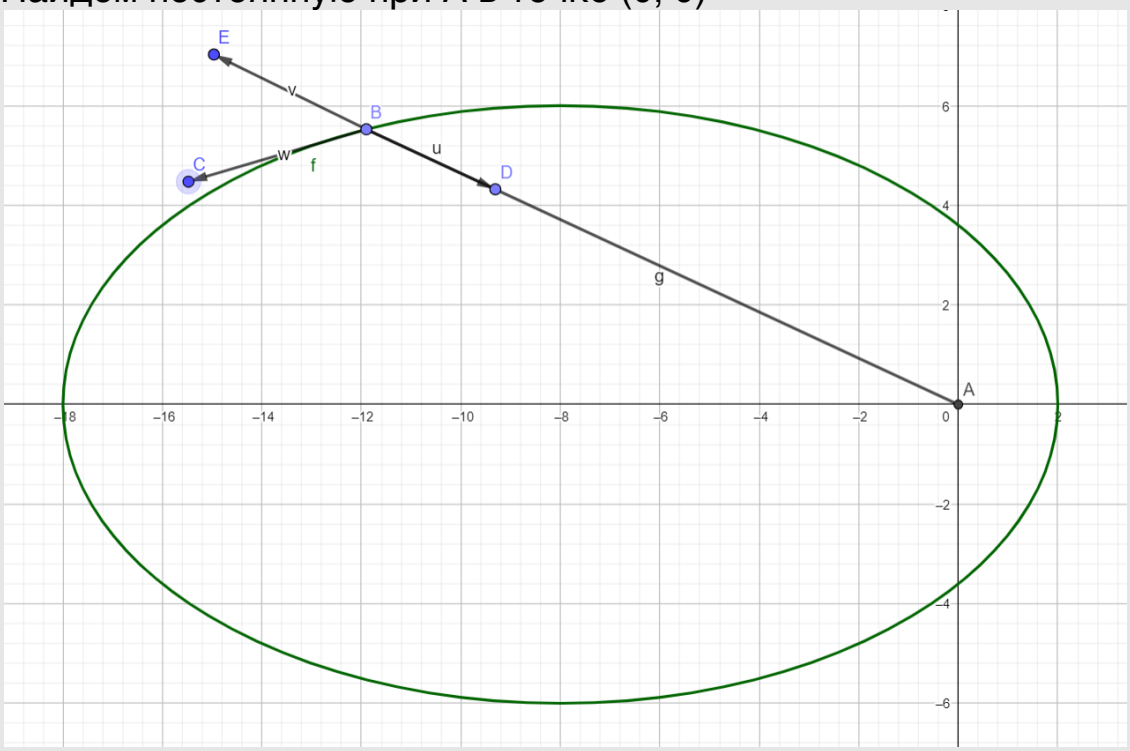


Рис.1. Обозначение сил, действующих на тело B и его скорости.

Рассмотрим силы вдоль вектора g на рисунке. Вдоль него действуют только 2 силы – сила взаимодействия с A и центробежная.

Переведем наши декартовы координаты в полярные:

r, см	ф, °	t, секунда
13.110	24.806	0
13.712	22.694	0.05
14.255	20.749	0.10
14.749	18.95	0.15
15.217	17.280	0.20

Теперь есть 2 способа решения данной задачи:

1) Определения постоянной по уравнению движения. (менее точный)
Уравнение движения тела вдоль g: $m_B\ddot{r} = m_B\dot{\varphi}^2 r - Cr^{-2}$ (2)
Тогда взяв произвольные 3 строки таблицы, можем получить ускорение тела и среднюю угловую скорость на пути. Возьмем первые три строки:

$$\dot{\varphi} = 0.7081\frac{\text{рад}}{\text{с}};\ \ddot{r} = \frac{\Delta\dot{r}}{\Delta t} = -23.6\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Отсюда $C = 1.146 \cdot 10^{-3}\ \text{Н} \cdot \text{м}^2$
2) Определение постоянной по сохранению энергии. (более точный)
Найдем энергию движения тела при взаимодействии с А:

$$E_0 = \frac{m_B}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{C}{r} \to r\dot{r}^2 + r^3\dot{\varphi}^2 = \frac{2C}{m_B} + \frac{2E_0}{m_B}r$$

Так как производные мы определяем по двум точкам, то будем брать $\langle r \rangle$

r, м	$\dot{r}, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\dot{\varphi}, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$r\dot{r}^2 + r^3\dot{\varphi}^2, 10^{-3}\frac{\text{м}^3}{c^2}$
0.13411	0.1204	0.737230	3.255
0.139835	0.1086	0.678933	2.910
0.14502	0.0988	0.627969	2.618
0.14983	0.0936	0.582940	2.456

Тогда зависимость $r\dot{r}^2 + r^3\dot{\varphi}^2$ от r можно линеаризовать.
После линеаризации получим:

$$\frac{2C}{m_B} = 0.0101\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}} \to C = 10^{-3}\text{Н} \cdot \text{м}^2$$

Также мы смогли получить значение энергии равное: $E_0 = -0.00516\ \text{Дж}$
При этом коэффициент корреляции составил: $r = 0.993$, что довольно неплохо.

2) Найдем постоянную при точке А в (-16, 0)
В этом случае переход к полярным координатам будет относительно точки А.

r, см	ф, °/рад	t, секунда
6.86003	53.297 /0.9302	0
6.26152	57.655 /1.0063	0.05
5.71240	62.134 /1.0844	0.10
5.21024	66.830 /1.1664	0.15
4.75303	71.984 /1.2564	0.20

Как мы видим, данный метод будет иметь сильную погрешность, так как изменения $\Delta r \sim r; \frac{\Delta r}{r} \approx 10\%$. Поэтому мы увеличили число чисел после запятой.
1) Снова для первого способа возьмем три первые строки таблицы. Тогда получим:

$$\dot{\varphi} = 1.542\,\frac{\text{рад}}{\text{с}};\ \ddot{r} = \frac{\Delta\dot{r}}{\Delta t} = 19.756\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$$

Тогда $C < 0$ – невозможно
2)

r, м	$\dot{r}, \frac{\text{м}}{\text{с}}$	$\dot{\varphi}, \frac{\text{рад}}{\text{с}}$	$r\dot{r}^2 + r^3\dot{\varphi}^2, 10^{-3}\,\frac{\text{м}^3}{c^2}$
0.065608	0.119702	1.522	1.59422
0.059869	0.109824	1.562	1.24566
0.054613	0.100432	1.640	0.98896
0.049816	0.091442	1.800	0.81709

Тогда также $C < 0$, несмотря на то, что коэффициент корелляции $r = 0.993$, то есть погрешность нашего метода не должна быть высокой и несмотря на это вышел невозможный результат.

Часть D. Влияние начальных условий.

D.1. Найдите эту скорость v_{min}. **(0,5 балла)**

Решение: Запишем закон сохранения энергии $E_0 = \frac{m_B v_{min}^2}{2} - \frac{C}{r} = \frac{m_B v_\infty^2}{2}$. Так как мы ищем минимальную скорость, то $v_\infty = 0 \rightarrow$ $v_{min}\sqrt{\frac{2C}{m_B r}} = 0.276\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

D.2. Нарисуйте траекторию тела при скорости $v = 1.2\ v_{min}$ **(3,5 балла)**

Решение: В этом случае наша скорость будет гиперболой. Тогда для нас самое главное найти прямую, вдоль которой будет двигаться тело B вдали от A.
По закону сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{C}{r} == \frac{mv_\infty^2}{2} \rightarrow v_\infty = \sqrt{0.44}\ v_{min} = 0.663 v_{min}$$

$$v_\infty b = vr \rightarrow b = 1.809r = 23.7\ \text{см}\ (1)$$

Теперь найдем угол. Для этого рассмотрим траекторию тела, которое вдали от тела А находилось на прицельном расстоянии b и имело v_∞ скорость. Тогда считая, что тело В изменило направление скорости на π-2θ после отклонения телом А. Тогда запишем проекцию силы вдоль направления на изменение скорости:

$$Fdt = dp \rightarrow \int_0^{2(\pi-\theta)} \frac{C}{r^2}\cos(\pi-\theta-\varphi)\,dt = 2mv_\infty\cos(\theta)\ (2)$$

$$mr^2\frac{d\varphi}{dt} = L = mbv_\infty \rightarrow dt = \frac{r^2 d\varphi}{bv_\infty}$$

Тогда получим, что $tg(\theta) = \frac{mv_\infty^2 b}{c} = 1.591 \rightarrow\ \theta = 57.8°\ (3)$

Теперь мы знаем какой угол составляет асимптота гиперболы с начальным направлением на тело В. Построить асимптоту несложно, так как мы можем провести окружность радиусом b вокруг А, а затем транспортиром отметить точку, для которой радиус, проведенный к этой точке, будет составлять угол $90-\theta$ с направлением на В.

(4)

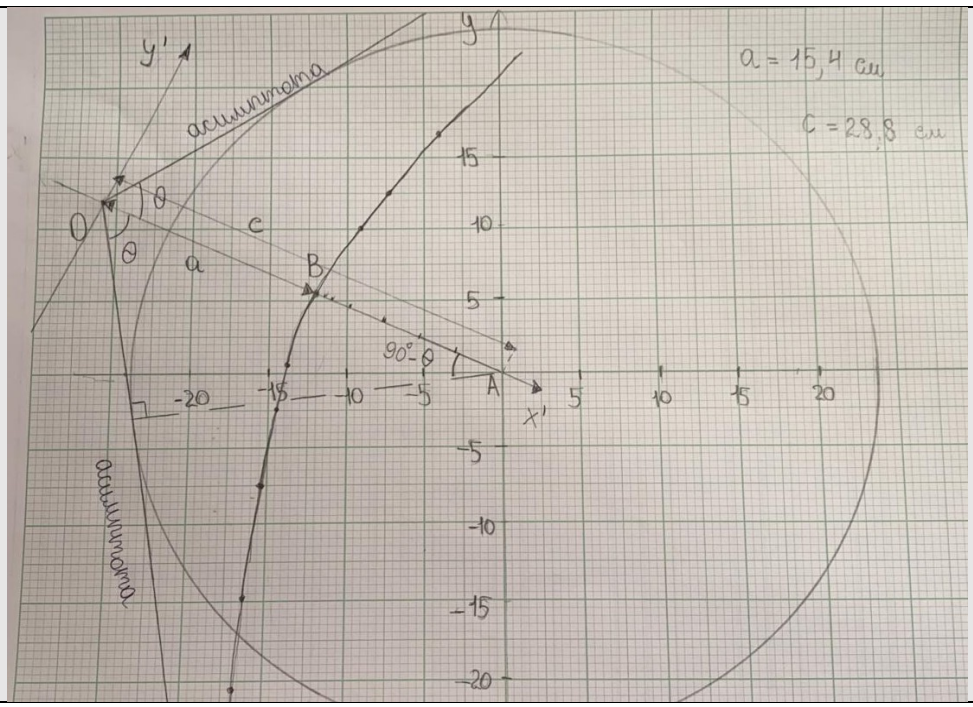
Тогда теперь мы можем найти расстояние от точки пересечения асимптот, что будет расстоянием до фокуса c (тело А - фокус), а также расстояние до тела В в начальный момент времени – параметр а гиперболы.

(5)

Тогда можем записать уравнение гиперболы в новых координатах x’, y’, которые будут с центром в точке пересечения асимптоты с линией АВ, а ось x’ – линия АВ.

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{c^2-a^2} = 1\ (6)$$

По рисунку измеряем а и с и получаем а=15.4 см, с=28.8 см. Оставшаяся часть – просто построение графика в новых координатах. (7)


y'
y
asimptota
a = 15,4 cm
c = 28,8 cm
O
θ
θ
c
a
B
90°-θ
A
x'
-20
-15
-10
-5
5
10
15
20
15
10
5
-5
-10
-15
-20
asimptota

Задача 3. Смесь реагирующих газов

Часть А. Столкновение молекул (2,8 балла)

А.1. Найдите длину цилиндра радиуса d в котором будет находиться ровно одна молекула газа. **(0,4 балла)**

Решение: Объем цилиндра будет $V = \pi d^2 l$, тогда число молекул внутри будет: $N = 1 = n\pi d^2 l$
Тогда $\lambda = \frac{1}{n\pi d^2}$

А.2. Докажите, что найденная в пункте А.1. длина цилиндра будет соответствовать длине свободного пробега молекул. **(0,4 балла)**

Решение: Очевидно, что молекулы столкнутся, когда расстояние между ними будет меньше либо равно d, то есть эффективное сечение столкновения будет $\sigma = \pi d^2$. В таком случае, так как движение молекулы до столкновения прямолинейно, то объем, занимаемый ей до столкновения, будет цилиндром радиуса d.

А.3. Найдите новую длину свободного пробега с учетом относительного движения молекул. **(0,7 балла)**

Решение: Заметим, что при рассмотрении относительного движения основную роль будет играть понятие приведенной массы. В случае одного газа $\mu = \frac{m}{2}$, тогда так как скорость $v \propto m^{-\frac{1}{2}}$, тогда $\frac{\bar{v}}{\overline{v_{\text{отн}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. То теперь рассматривая число столкновений в единицу времени мы можем получить, что:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \overline{v_{\text{отн}}} n\sigma \rightarrow \Delta N = 1 = n\overline{v_{\text{отн}}}\sigma\Delta t \rightarrow 1 = n\overline{v_{\text{отн}}}\sigma \cdot \frac{\lambda}{\bar{v}} \rightarrow \lambda = \frac{1}{n\sigma} \cdot \frac{\bar{v}}{\overline{v_{\text{отн}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

А.4. Найдите длину свободного пробега молекул 1 и 2 газа. **(1,3 балла)**

Решение: рассмотрим число столкновений молекулы газа 1 в единицу времени:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \overline{v_{\text{отн1}}} n_1\sigma_{11} + \overline{v_{\text{отн2}}} n_2\sigma_{12} \rightarrow \lambda_1 = \frac{\overline{v_1}}{\overline{v_{\text{отн1}}} n_1\sigma_{11} + \overline{v_{\text{отн2}}} n_2\sigma_{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}n_1\sigma_{11} + \sqrt{1 + m_1/m_2}\, n_2\sigma_{12}}$$

Применяя те же действия для молекулы газа 2 получим:

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}n_2\sigma_{22} + \sqrt{1 + m_2/m_1}n_1\sigma_{12}}$$

Здесь $\sigma_{11} = \pi d_1^2;\ \sigma_{12} = \frac{\pi(d_1+d_2)^2}{4}; \sigma_{22} = \pi d_2^2$

Часть B. Столкновение нескольких молекул и скорость образования аммиака. (5 баллов)

B.1. Найдите вероятность того, что в малый объем ΔV попадет n молекул газа, если общее число молекул газа N и газ занимает объем V. Считайте, что $n \ll N, \Delta V \ll V$ **(1,8 балла)**

Решение: Для решения данной задачи нам надо вначале найти вероятность нахождения $n = 3$ молекул в малом объеме ΔV, если число молекул газа N и он занимает объем V.
Заметим, что вероятность нахождения 1 молекулы в объеме ΔV равна $p = \frac{\Delta V}{V}$. С другой стороны, вероятность нахождения вне объема равна $q = 1 - \frac{\Delta V}{V}$. Тогда вероятность нахождения n молекул в малом объеме ΔV это $P = C \cdot p^n \cdot q^{N-n}$. Здесь множитель C возникает из-за одинаковости молекул, то есть существует множество способов разместить n молекул в наш объем. Из комбинаторики мы знаем, что $C = \frac{N!}{n!\cdot(N-n)!}$, так что $P = \frac{N!}{n!\cdot(N-n)!} \cdot p^n \cdot q^{N-n}$. Так как $\Delta V \ll V$ и $n \ll N$, то получим, что $P = \frac{N!}{n!\cdot(N-n)!} \cdot p^n \cdot q^{N-n} = \frac{N^n}{n!} \cdot \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\Delta V}{V}\right)^N$.

B.2. Найдите число образующихся в единицу времени молекул аммиака как функцию от x. **(0,7 балла)**

Решение: Тогда число соударений будет $N = PN_1$. Мы знаем, что в нашем случае $n = 3;\ \Delta V = \frac{\pi x^3}{6}$. Тогда $N = N_1 \frac{{N_2}^3}{6} \cdot \left(\frac{\pi x^3}{6V}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{\pi x^3}{6V}\right)^{N_2}$.
Все эти столкновения происходят за время

$$\tau = \frac{x}{2\overline{v_{\text{отн}}}} = \frac{x}{2\overline{v_1}\sqrt{1 + \frac{m_1}{m_2}}}$$

Тогда скорость образования молекул аммиака:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 4\overline{v_1}\sqrt{1+\frac{m_1}{m_2}}N_1\frac{{N_2}^3}{6}\cdot\left(\frac{\pi}{6V}\right)^3\cdot\left(\left(1-\frac{\pi x^3}{6V}\right)^{N_2}\cdot x^8\right)$$

Новая 2 возникла из-за того, что возникают 2 молекулы при каждом соударении.

B.3. Найдите число обратно реагирующих молекул аммиака в единицу времени **(1 балл)**

Решение: В этом случае число столкновений будет легко определяться результатом пункта А.4.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -N_3\cdot\overline{v_{\text{отн}}}\sigma_{33}n_3 = \frac{N_3^2}{V}\sigma_{33}\sqrt{2}\cdot\overline{v_3}$$

B.4. Найдите эффективный размер молекул при реакции азота с водородом. **(1,5 балла)**

Решение: равновесие получается тогда, когда число обратно реагирующих молекул равно числу образующихся. Можно заметить, что N_1 и N_2 в выражении для образующихся можно легко получить, зная начальные количества вещества и равновесное количество аммиака из сохранения числа атомов водорода и азота в системе:

$N_1+\frac{N_3}{2}=N_{01};\ \ N_2+\frac{3N_3}{2}=N_{02}$

Используя условие равновесия, получим:

$$\left(\left(1-\frac{\pi x^3}{6V}\right)^{N_2}\cdot x^8\right) = \sqrt{\frac{m_1m_2}{2m_3(m_1+m_2)}}\cdot\left(\frac{6}{\pi}\right)^3\cdot\frac{3N_3^2}{N_1N_2^3}\sigma_{33}V^2$$
$$= 8.29\cdot10^{-71}\text{м}^8$$

Заметим, что $x\propto10^{-9}$м, значит, что $\frac{\pi x^3}{6V}\ll1$. Тогда зная замечательный предел, можем получить:

$$\left(1-\frac{\pi x^3}{6V}\right)^{N_2} = \exp\left(-N_2\frac{\pi x^3}{6V}\right)\approx1$$

Отсюда использованием численных методов можно получить

$$x=\left(\sqrt{\frac{m_1m_2}{2m_3(m_1+m_2)}}\cdot\left(\frac{6}{\pi}\right)^3\cdot\frac{3N_3^2}{N_1N_2^3}\sigma_{33}V^2\right)^{\frac{1}{8}} = 1.74\text{ нм}$$

Заметим, что $\frac{2x}{d_1+d_2}=12.63$ – эффективный размер заметно больше размеров молекул.

Для сравнения данной величины с длиной свободного пробега, которую в смеси уже 3 газов можно определить как:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}n_1'\sigma_{11} + \sqrt{1+m_1/m_2}n_2'\sigma_{12} + \sqrt{1+m_1/m_3}n_3\sigma_{13}}$$

Тогда $\lambda_1 = 11.13$ нм и $\frac{x}{\lambda_1} = 0.156$, то есть размер сравним с длиной свободного пробега, но заметно меньше ее.

Часть С. Определение теплового эффекта реакции (2,2 балла)

С.1. Используя данные таблицы, определите значение ΔH теплового эффекта реакции данной реакции. **(2,2 балла)**

Решение: Давление для смеси газов можно определить как:

$$P_3 = \frac{(n_1 + n_2 + n_3)RT}{V} \quad (1)$$

Используя связь между количествами вещества азота и водорода с количеством аммиака получим:

$$P_3 = \frac{(n_{01} + n_{02} - n_3)RT}{V} \quad (2)$$

Заметим, что равновесие достигается, когда $\frac{\Delta n_3}{\Delta t} = kn_1^{\nu_1}n_2^{\nu_2} - rn_3^{\nu_3} = 0$ (3) и в силу результатов части В получим, что $\nu_1 = 1;\ \nu_2 = 3;\ \nu_3 = 2$ (4).

Тогда при равновесии $\frac{n_3^2}{n_2^3 n_1} = \frac{k}{r} = A \cdot \exp\left(-\frac{\Delta H}{RT}\right)$ (5)

Тогда снова подставив связь количеств вещества и выразив температуру через количества аммиака, получим выражение для давления:

$$P = -\frac{(n_{01} + n_{02} - n_3)\Delta H}{V} \cdot \frac{1}{\ln\left(\frac{n_3^2}{(n_{01} - \frac{n_3}{2}) \cdot \left(n_{02} - \frac{3n_3}{2}\right)^3}\right) - \ln(A)} \quad (6)$$

Коэффициент А нам неизвестен, так что преобразуем это выражение в более удобное:

$$\ln\left(\frac{n_3^2}{(n_{01} - \frac{n_3}{2}) \cdot \left(n_{02} - \frac{3n_3}{2}\right)^3}\right) = -\frac{(n_{01} + n_{02} - n_3)\Delta H}{PV} + \ln(A) \quad (7)$$

Сделаем таблицу значений

$$P, n_3, x = \ln\left(\frac{n_3^2}{(n_{01} - \frac{n_3}{2}) \cdot \left(n_{02} - \frac{3n_3}{2}\right)^3}\right), y = \frac{(n_{01} + n_{02} - n_3)}{P}$$

P, МПа	$n_3, 10^3$моль	y	$x, 10^{-3}\frac{\text{моль}}{\text{Па}}$
5.3	0.5	-23.785	2.925
4.8	0.8	-22.681	3.167
4.2	1.4	-21.214	3.476
3.9	1.8	-20.461	3.641
3.7	2.1	-19.955	3.757
3.2	3	-18.579	4.063
2.7	4.1	-16.961	4.407
2.1	5.6	-14.395	4.952

Тогда теперь построим линейный график $y(x)$

Рис.1. График зависимости $y(x)$

По графику мы можем получить, что:

$$-\frac{\Delta H}{V} = 4620\frac{\text{Па}}{\text{моль}} \rightarrow \Delta H = -92400\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$$

Данный результат хорошо сходится с верным значением теплового эффекта $\Delta H = -91840\frac{\text{Дж}}{\text{моль}}$