



Республиканская физическая олимпиада

2024 год

(III этап)

Теоретический тур

Решения задач

10 класс

(для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Каждое задание сопровождается Листами ответов, в которые участники олимпиады должны занести окончательные результаты.

Если окончательный результат не занесен в Лист ответов, но содержится в основном решении, то этот результат также необходимо оценивать.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших талантливых школьников!

Задание 10-1. «Лихо закручено»

Справочные данные и параметры рассматриваемых систем: трением и сопротивлением воздуха в данном задании пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

1.1 «Два шарика на нити» Два небольших шарика массами m_1 и m_2 , связанные легкой нитью длиной l , вращаются с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости (Рис. 1). Найдите силы натяжения нитей T_1 и T_2 , действующие на каждый из шариков, соответственно. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

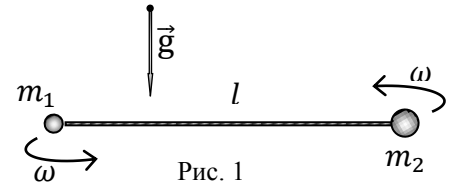


Рис. 1

1.2 «Три шарика на нити» Усложним задачу и добавим к середине нити длиной l третий небольшой шарик массой m_3 (Рис. 2). При вращении такой системы на горизонтальной плоскости оказалось, что модуль силы натяжения легкой нити у первого шарика равен T_1 , а у второго, соответственно, T_2 . Найдите массу m_3 третьего шарика и угловую скорость ω вращения системы, считая массы шариков m_1 и m_2 известными.

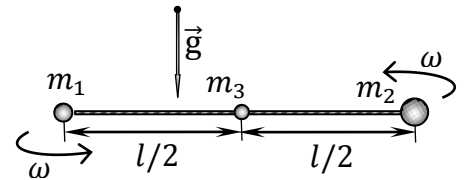


Рис. 2

1.3 «Космическое вращение» Космическая станция состоит из двух отсеков массами m_1 и m_2 , соединенных длинным однородным тросом длины l . Станция вращается вокруг оси, перпендикулярной тросу, при этом модуль силы натяжения троса вблизи одного отсека равен T , а вблизи другого $T + \Delta T$ ($\Delta T \ll T$). Найдите массу соединительного троса m_T и угловую скорость $\omega_{\text{КС}}$ вращения космической станции.

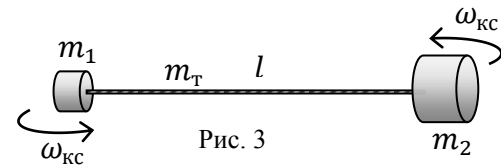


Рис. 3

Решение:

Задание 10-1. «Лихо закручено»

1.1 «Два шарика на нити» Вращение шариков (материальных точек) на легкой нити по плоскости будет происходить вокруг их центра масс – точки O (Рис. 01). При этом сама точка O будет оставаться неподвижной относительно гладкой горизонтальной плоскости, т.к. нет горизонтальных сил, способных «сдвинуть» систему с места (силы натяжения нитей \vec{T}_1 и \vec{T}_2 внутренние, их сумма равна нулю).

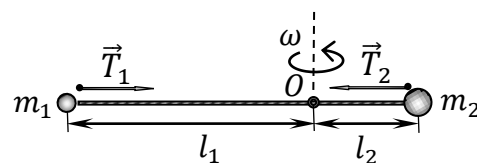


Рис. 01

Таким образом, траектории шариков будут представлять собой горизонтальные окружности радиусами l_1 и l_2 с центром в точке O . Радиусы траекторий шариков найдем из традиционной системы уравнений для центра масс двух материальных точек (см. Рис. 01)

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = l \\ m_1 l_1 = m_2 l_2 \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) находим искомые расстояния до центра масс (оси вращения системы)

$$\begin{cases} l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \\ l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \end{cases} \quad (2)$$

Поскольку трения в системе нет, то угловая скорость вращения шариков вокруг точки O будет по инерции оставаться постоянной $\omega = const$.

Из второго закона Ньютона с учетом (2) для движения первого шарика в горизонтальной плоскости найдем

$$m_1 \omega^2 l_1 = T_1 \quad \Rightarrow \quad T_1 = m_1 \omega^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} l = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l \quad (3)$$

Аналогично для второго шарика

$$m_2 \omega^2 l_2 = T_2 \quad \Rightarrow \quad T_2 = m_2 \omega^2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} l = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l \quad (4)$$

Как следует из (3) и (4), силы натяжения нитей в такой системе (нить легкая) одинаковы и равны

$$T_1 = T_2 = T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 l = \mu \omega^2 l, \quad (5)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – т.н. «приведенная масса», вспомогательная величина с размерностью массы, часто возникающая при описании системы двух тел. Так из (5) следует, что сила натяжения, действующая на каждый из шариков, равна силе натяжения T при движении тела с приведенной массой μ на нити длиной l с той же угловой скоростью ω .

1.2 «Три шарика на нити» При добавлении третьего шарика на середину нити физика процесса не изменится – центр масс O трех шариков (Рис. 02) по-прежнему будет неподвижным при вращении системы на горизонтальной плоскости. Соответственно, через точку O будет проходить вертикальная ось вращения всей системы с постоянной угловой скоростью ω .

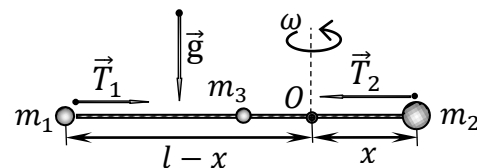


Рис. 02

Однако теперь модули T_1 и T_2 сил натяжения легких нитей, связывающих грузы, будут различными, поскольку шарик m_3 имеет массу, и для его ускоренного движения нужна ненулевая разность сил.

Пусть расстояние от шарика с массой m_2 до центра масс O равно x (Рис. 02). Второй закон Ньютона для движения каждого из шариков в горизонтальной плоскости примет вид

$$m_2 \omega^2 x = T_2, \quad (6)$$

$$m_1 \omega^2 (l - x) = T_1, \quad (7)$$

$$m_3 \omega^2 \left(\frac{l}{2} - x\right) = T_2 - T_1. \quad (8)$$

Разделив (6) на (7), придем к равенству

$$\frac{m_2 x}{m_1 (l - x)} = \frac{T_2}{T_1}, \quad (9)$$

из которого найдем

$$x = \frac{m_1 T_2}{m_1 T_2 + m_2 T_1} l. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (6), найдем угловую скорость вращения шариков

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1 T_2 + m_2 T_1}{m_1 m_2 l}}, \quad (11)$$

а подставляя (10) в (8), найдем массу m_3 третьего шарика

$$m_3 = \frac{2m_1 m_2 (T_2 - T_1)}{m_2 T_1 - m_1 T_2}. \quad (12)$$

1.3 «Космическое вращение» Для решения этого пункта достаточно догадаться, что роль третьего шарика массой m_3 здесь играет трос, центр масс которого находится на половине длины $\frac{l}{2}$, т.е. в той же точке где находился третий шарик (это важно!).

Следовательно, можно просто аккуратно воспользоваться формулами (11) и (12) с учетом условия малости ($\Delta T \ll T$) разности сил натяжения концов троса (вдоль самого троса эта сила меняется, но уравнения записываются для движения центра масс тела!).

Будем считать, что второй отсек массивнее первого ($m_2 > m_1$), тогда понятно, что $T_2 = T + \Delta T$, а $T_1 = T$.

Соответственно, масса троса, соединяющего отсеки космической станции, будет равна

$$m_T = \frac{2m_1 m_2 (T_2 - T_1)}{m_2 T_1 - m_1 T_2} = \frac{2m_1 m_2 \Delta T}{(m_2 - m_1)T + m_2 \Delta T} = \{\Delta T \ll T\} \approx \frac{2m_1 m_2 \Delta T}{(m_2 - m_1)T}, \quad (13)$$

а угловая скорость вращения станции

$$\omega_{\text{КС}} = \sqrt{\frac{m_1 T_2 + m_2 T_1}{m_1 m_2 l}} = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T + m_1 \Delta T}{m_1 m_2 l}} = \{\Delta T \ll T\} \approx \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)T}{m_1 m_2 l}} = \sqrt{\frac{T}{\mu l}}, \quad (14)$$

где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – приведенная масса отсеков станции (без массы троса!).

Обратите внимание, что результат (14) напрямую следует из (5), поскольку масса троса гораздо меньше массы каждого из отсеков по отдельности.

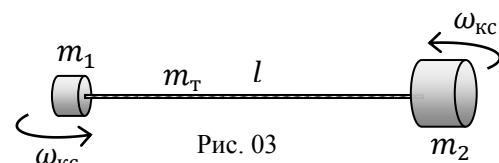


Рис. 03

Задание 10-2. Годограф

Годографом вектора называется кривая, представляющая собой множество концов переменного со временем вектора $\vec{a}(t)$, начало которого для всех t есть фиксированная точка O («Математический энциклопедический словарь»). Иными словами годограф вектора представляет собой множество точек, по которым «движется» конец данного вектора со временем, если положение его начала зафиксировать в некоторой точке O .

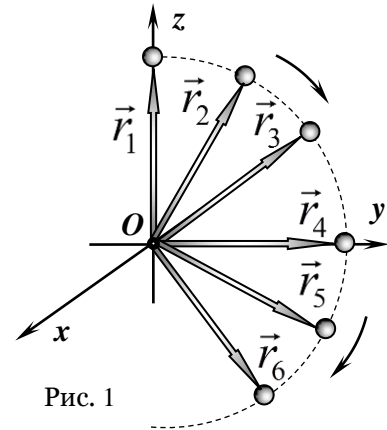


Рис. 1

Справедливости ради отметим, что школьники косвенно знакомы с данным понятием, поскольку годографом радиус-вектора $\vec{r}_i(t)$ ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$) движущейся материальной точки является ... её траектория, отмеченная на рисунке 1 пунктирной линией. Годограф вектора наглядно представляет его изменение с течением времени, а также используется при различных расчетах.

Часть 1. Вычисление полного ускорения

1.1 Небольшой массивный шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, отклонили так, что нить стала горизонтальна и аккуратно отпустили без натяжения нити (рис. 2). При движении шарик будет приобретать как центростремительное (нормальное) ускорение \vec{a}_n , направленное вдоль нити, так и касательное (тангенциальное) \vec{a}_τ ускорение, направленное перпендикулярно нити (см. рис. 2). Сумма $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ называется *полным* ускорением тела. Найдите зависимости модулей ускорений \vec{a}_n и \vec{a}_τ от угла α , образованного нитью с вертикалью. Соппротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения \vec{g} .

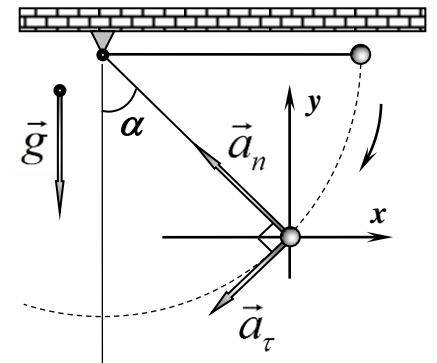


Рис. 2

1.2 Найдите зависимость $a(\alpha)$ модуля полного ускорения \vec{a} шарика от угла α в процессе движения до нижней точки траектории.

1.3 Поскольку вектор полного ускорения шарика поворачивается со временем, то в некоторый момент он будет горизонтален. Найдите полное ускорение шарика a_1 и угол α_1 между нитью и вертикалью в этот момент времени.

Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

2.1 Найдите зависимости проекций a_x и a_y полного ускорения шарика от угла α в стандартной (декартовой) системе координат. Выразите их в безразмерных единицах $a_x^* = a_x / g$ и $a_y^* = a_y / g$.

2.2 Чему равен модуль максимального горизонтального ускорения $a_{x\max}$ шарика в процессе движения до низшей точки траектории? Максимального вертикального ускорения $a_{y\max}$?

2.3 Разбейте прямой угол α на интервалы по $\Delta\alpha = 5^\circ$ градусов и вычислите проекции ускорений a_x^* и a_y^* для точек в диапазоне $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Результаты вычислений занесите в Таблицу 1 (см. ниже).

2.4 Пользуясь Таблицей 1, постройте на выданном бланке годограф полного ускорения шарика при его движении до нижней точки траектории.

2.5 Проанализируйте построенный годограф, отметьте его существенные особенности и попытайтесь описать их математически (например, получить уравнение, описывающее полученную кривую).

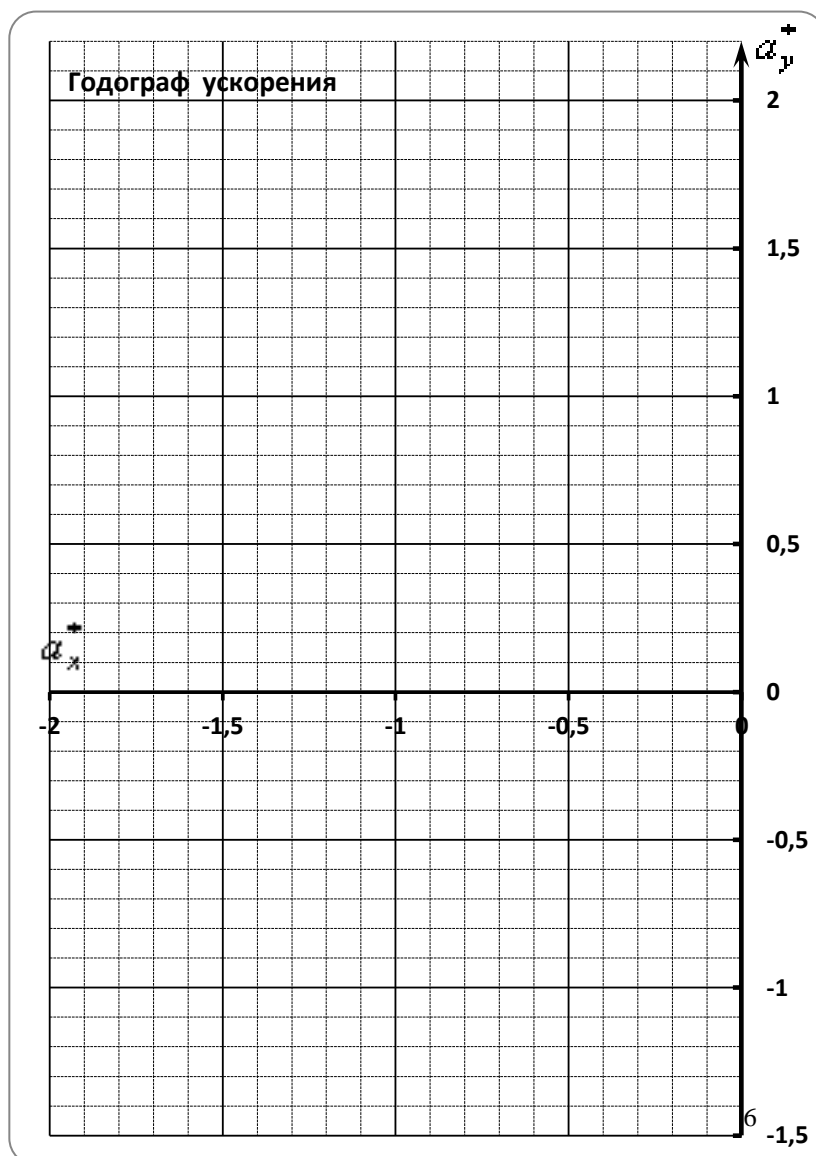
Таблица 1. Вычисление a_x^* и a_y^* .

Угол	a_x^*	a_y^*
90°		
85°		
80°		
75°		
70°		
65°		
60°		
55°		
50°		
45°		
40°		
35°		
30°		
25°		
20°		
15°		
10°		
5°		
0°		

по

Бланк для построения годографа ускорения шарика

Таблице 1.



Решение:

Часть 1. Вычисление полного ускорения

1.1 В момент, когда нить составляет угол α с горизонтом, шарик опустился на высоту $h = l \cos \alpha$ (рис. 1), где l – длина нити. Согласно закону сохранения механической энергии (потерь нет) для движения шарика массой m можем записать

$$mgh = mgl \cos \alpha = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2gl \cos \alpha, \quad (1)$$

где v – скорость шарика в рассматриваемый момент, направленная по касательной к дуге. Следовательно, нормальное (центростремительное) ускорение шарика на нерастяжимой нити в данной точке

$$a_n = a_{цс} = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{l} = \{(1)\} = 2g \cos \alpha \quad (2)$$

На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости нити \vec{T} (см. рис. 1), следовательно, второй закон Ньютона в проекциях на текущее направление нити и по касательной к ней примет вид

$$\begin{aligned} ma_n &= T - mg \cos \alpha \\ ma_\tau &= mg \sin \alpha \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (2) из системы (3) находим выражения для касательного ускорения и силы упругости нити

$$\begin{aligned} a_\tau &= g \sin \alpha \\ T &= 3mg \cos \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 Соответственно, полное ускорение шарика в данный момент найдем с помощью теоремы Пифагора и выражений (2) и (4)

$$a(\alpha) = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{g^2 \sin^2 \alpha + 4g^2 \cos^2 \alpha} = g\sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}. \quad (5)$$

Как следует из (5), в начальный момент времени ($\alpha = \pi/2$) полное ускорение шарика равно ускорению свободного падения $a = g$ и направлено вниз. Таким образом, пока нить не натянулась, шарик практически свободно падает в течение малого промежутка времени. Поскольку при этом центростремительное ускорение шарика равно нулю (он ещё не успел набрать скорость), то полное ускорение равно касательному ускорению и равно g .

При прохождении шариком нижней точки траектории ($\alpha = 0$) равно нулю касательное ускорение, а его полное ускорение имеет максимальное значение $a = 2g$ и направлено вверх. В этом случае оно совпадает с центростремительным ускорением. Заметим, что сила натяжения нити при этом максимальна и равна $T = 3mg$ (направлена вверх).

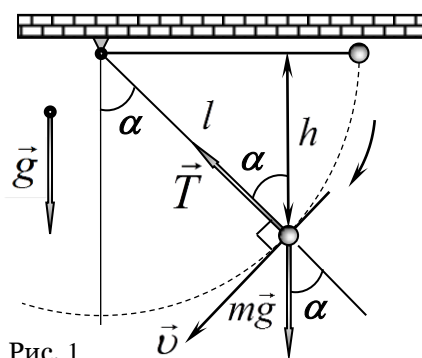


Рис. 1

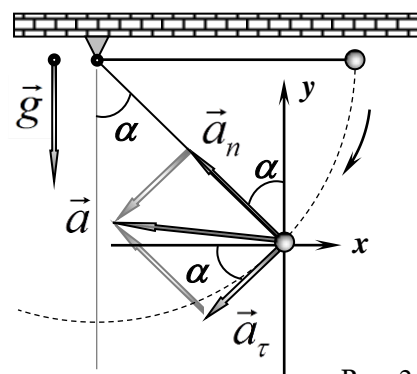


Рис. 2

Угол β , который составляет вектор полного ускорения \vec{a} с горизонтом, найдем из параллелограмма ускорений на рисунке 2

$$tg\beta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{a_\tau \sin \alpha - a_n \cos \alpha}{a_\tau \cos \alpha + a_n \sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha}{3 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{tg^2 \alpha - 2}{3tg\alpha}. \quad (6)$$

1.3 В момент, когда вектор полного ускорения шарика горизонтален $\beta = 0$, следовательно

$$tg\beta = 0 \Rightarrow a_\tau \sin \alpha_1 = a_n \cos \alpha_1 \Rightarrow tg^2 \alpha_1 = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 55^\circ. \quad (7)$$

Подставляя полученное значение угла $\alpha_1 = 55^\circ$ в формулу для полного ускорения (5), находим искомое значение для горизонтального ускорения шарика

$$a_1 = g\sqrt{1+3\cos^2 \alpha_1} = g\sqrt{1+\frac{3}{1+tg^2 \alpha_1}} = g\sqrt{2} = 1,4g. \quad (8)$$

Часть 2. Построение годографа полного ускорения шарика

2.1 Для удобства построения годографа вектора ускорения шарика перейдем к декартовым координатам (x, y) , изображенным на рисунке 3 (с учетом знаков). Тогда проекции полного ускорения шарика примут вид

$$a_x = -a_\tau \cos \alpha - a_n \sin \alpha = -3g \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{2}g \sin 2\alpha \quad (9)$$

$$a_y = -a_\tau \sin \alpha + a_n \cos \alpha = g(2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$$

Для формализации процесса расчёта введем удобные безразмерные единицы измерения ускорений, имеющие очевидный смысл

$$a_x^* = \frac{a_x}{g}; a_y^* = \frac{a_y}{g}. \quad (10)$$

Тогда расчетные формулы для заполнения таблицы примут вид

$$a_x^*(\alpha) = -3\sin \alpha \cos \alpha \quad (11)$$

$$a_y^*(\alpha) = 2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

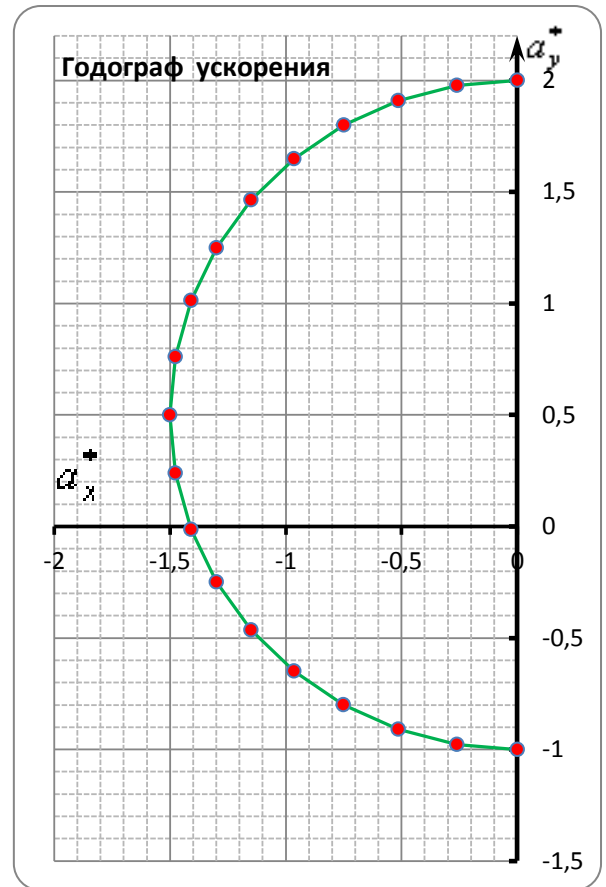
2.3 Расчёт по формулам даёт следующие результаты

Таблица 1. Вычисление a_x^* и a_y^* .
бланке.

Рис. 3. Построение годографа ускорения на

Угол	a_x^*	a_y^*
90°	0,00	-1
85°	-0,26	-0,98
80°	-0,51	-0,91
75°	-0,75	-0,80
70°	-0,96	-0,65
65°	-1,15	-0,46
60°	-1,30	-0,25
55°	-1,41	-0,01
50°	-1,48	0,24
45°	-1,50	0,50

40°	-1,48	0,76
35°	-1,41	1,01
30°	-1,30	1,25
25°	-1,15	1,46
20°	-0,96	1,65
15°	-0,75	1,80
10°	-0,51	1,91
5°	-0,26	1,98
0°	0,00	2,00



2.2 Как следует из анализа рисунка 3, максимальное (по модулю) горизонтальное ускорение шарика равно $|a_x^*| = |-1,5| = 1,5$. Это же, кстати, следует и из формулы (9) при $\alpha = \pi/4$.

Максимальное же вертикальное ускорение $a_y^* = 2,0$ шарик приобретает в нижней точке траектории ($\alpha = 0$), которой соответствует верхняя точка графика на рисунке 3.

2.4 Удивительно, но несмотря на достаточно сложный характер рассматриваемого движения, график на рисунке 3 напоминает траекторию движения самого шарика! Действительно, точки неплохо «ложатся» на полуокружность радиуса $R = 1,5$ с центром в точке с координатами $(0; +0,5)$. Убедимся в справедливости сделанного предположения.

2.5 Поскольку уравнение окружности радиуса R с центром в точке с координатами $(a; b)$ имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \quad (12)$$

то для доказательства справедливости сделанного предположения достаточно проверить тождественность равенства (13) при любых $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$

$$(a_x^*)^2 + (a_y^* - 0,5)^2 = 1,5^2 = \frac{9}{4}. \quad (13)$$

Используя (11) приведём (13) к виду

$$9 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4}. \quad (14)$$

После избавления от знаменателя и раскрытия скобок из (14) находим

$$36\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 16\cos^4\alpha - 16\cos^2\alpha\sin^2\alpha + 4\sin^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + 1 = 9. \quad (15)$$

Приводя подобные, и сокращая, упростим выражение (15) следующим образом

$$5\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 4\cos^4\alpha + \sin^4\alpha - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2. \quad (16)$$

Собирая полный квадрат, с учётом основного тригонометрического тождества $\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1^2$, выражение (16) примет вид

$$3\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 3\cos^4\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2. \quad (17)$$

Далее «немного удачи» при перегруппировке членов и вынесении за скобки

$$\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha + 1) + \cos^2\alpha(3\cos^2\alpha + 1) - 3\cos^2\alpha = 1, \quad (18)$$

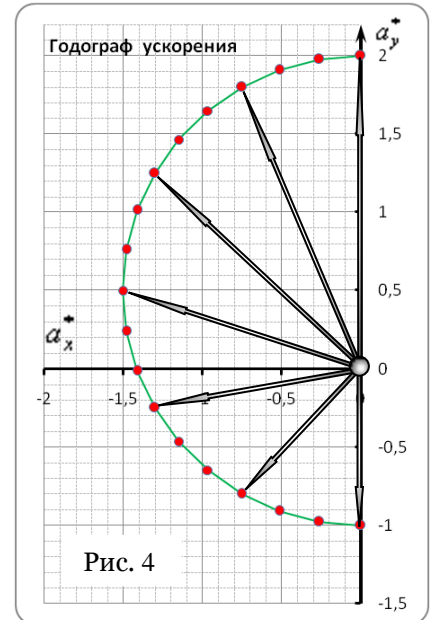
позволяют ещё раз довести дело до основного тригонометрического тождества и до ... победного конца

$$\begin{aligned} (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(3\cos^2\alpha + 1) - 3\cos^2\alpha &= 1 \\ 3\cos^2\alpha + 1 - 3\cos^2\alpha &= 1 \quad !!! \\ 1 &\equiv 1 \end{aligned} \quad (19)$$

Легко догадаться (хотя и не требуется в условии задачи), что при движении шарика в левой полуплоскости, на годографе ускорения мы получим симметричную полуокружность, замыкающую траекторию до полной окружности. Далее с разворотом все повторяется вновь против часовой стрелки.

Поскольку центр окружности находится в точке с координатами $(0; +0,5)$, то в неинерциальной системе отсчёта, движущейся с ускорением $\vec{a} = -\vec{g}/2$, направленным вверх, вектор полного ускорения неравномерно вращается по рассмотренной окружности, сохраняя свою длину.

Таким образом, искомый годограф полного ускорения шарика представляет собой полуокружность (совершенно «случайно» изображённую в условии задачи, ☺) радиусом $R = 1,5g$ со сдвинутым (относительно начала координат) центром (рис. 4).



Задание 10-3. Не хуже Карно ..?

Двигатели внутреннего сгорания (ДВС), работающие по различным термодинамическим циклам, успешно работают в современном мире. Миллионы машин используют как бензиновые, так и дизельные ДВС, а доля электромобилей на мировом рынке в настоящий момент крайне невелика – около 2 %.



Рис. 1

При создании ДВС в середине XIX века перед инженерами и конструкторами встал важный прикладной (и научный!) вопрос: а какой тепловой двигатель имеет максимальный термодинамический КПД, т.е. является идеальной тепловой машиной?

Заметим, что цикл Отто (бензиновый двигатель) и цикл Дизеля (дизельный двигатель) не являются идеальными тепловыми циклами, хотя автомобили, работающие по этим циклам, и составляют львиную долю современного производства.

Идеальная тепловая машина была описана в 1824 г. французским физиком и инженером Сади Карно (Рис. 1) в работе «Размышления о движущей силе огня

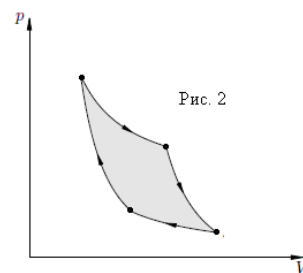


Рис. 2

и о машинах, способных развивать эту силу».

Идеальный цикл Карно (Рис. 2), состоящий из двух изотерм и двух адиабат, сегодня известен каждому школьнику.

В данном задании мы немного «пофантазируем» и предложим свой цикл, который также использует элементы знаменитого цикла Карно.

Справочные данные и параметры рассматриваемой системы: если $a^n b^m = const$, то при малых Δa и Δb ($\Delta a \ll a$, $\Delta b \ll b$) справедливо равенство: $n \frac{\Delta a}{a} + m \frac{\Delta b}{b} = 0$ (справедливо также и обратное утверждение); молярная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль · К).

Часть 1. Адиабатный процесс

Термодинамический процесс, проводимый без теплообмена ($Q = 0$) с окружающей средой (т.е. в теплоизолированной системе), называется *адиабатным* процессом. Адиабатными являются многие быстротекущие процессы (взрыв, быстрое расширение (сжатие) газа, распространение звуковой волны), процесс подъема теплого воздуха с поверхности земли с последующим охлаждением, конденсацией пара и образованием облаков и т.д.

1.1 Теплоёмкость c^M идеального газа, взятого в количестве $\nu = 1$ моль ($m = M$), называется молярной теплоёмкостью. Найдите молярную теплоёмкость c_V^M идеального одноатомного газа при изохорном процессе, т.е. при постоянном объёме ($V = const$). Запишите формулу для внутренней энергии U идеального одноатомного газа через c_V^M и в дальнейшем используйте её для любого идеального газа.

1.2 Выразите молярную теплоёмкость идеального газа c_p^M при постоянном давлении ($p = const$), т.е. при изобарном процессе, через c_V^M .

1.3 Получите уравнение адиабатного процесса для произвольного идеального газа в переменных (T, V) с показателем адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_V^M}$.

1.4 В полученном уравнении сделайте замену переменных и запишите уравнение адиабатного процесса (уравнение Пуассона) для произвольного идеального газа в «традиционном» виде, т.е. в переменных (p, V) .

1.5 Схематически изобразите на одной (p, V) – диаграмме ход адиабаты и изотермы идеального газа. Кратко охарактеризуйте особенности построенных графиков.

Часть 2. Цикл с адиабатой

С идеальным одноатомным газом провели циклический процесс $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ (Рис. 3), состоящий из изобары $A \rightarrow B$, изохоры $B \rightarrow C$ и адиабаты $C \rightarrow A$.

2.1 Укажите участки цикла, на которых работал нагреватель, т.е. газ получал теплоту от внешнего источника. Найдите количество теплоты Q_1 , переданное рабочему телу от нагревателя в данном цикле.

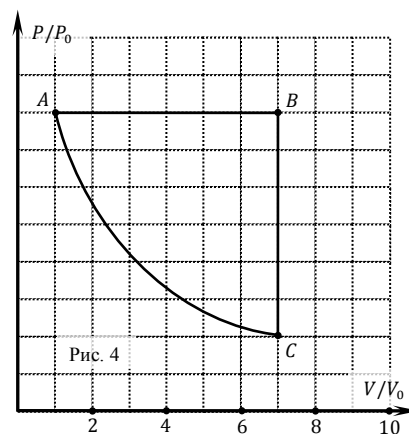
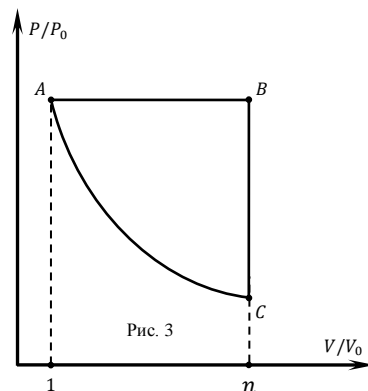
2.2 Используя ранее полученные результаты, найдите давление p_C газа в состоянии C .

2.3 Укажите участки цикла, на которых работал холодильник, т.е. газ отдавал теплоту внешнему источнику. Найдите количество теплоты Q_2 , отданное рабочим телом холодильнику в данном цикле.

2.4 Выведите формулу для термодинамического КПД η данного цикла. Как значение η зависит от параметров V_A и p_A термодинамической системы в начальном состоянии? Как, по вашему мнению, это можно объяснить?

2.5 На Рис. 4 изображен подобный процесс в безразмерных (относительных) координатах объёма и давления $(V/V_0; p/p_0)$, где V_0 и p_0 – некоторые неизвестные размерные масштабные множители. Вычислите термодинамический КПД η_1 цикла, изображенного на Рис. 4.

2.6 Чему равен максимально возможный термодинамический КПД η_{max} описанного цикла?



Возможные решения:

Часть 1. Адиабатный процесс

1.1 Внутренняя энергия идеального одноатомного газа вычисляется по формуле

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT = \frac{3}{2} \nu RT. \quad (1)$$

Поскольку при изохорном процессе ($V = \text{const}$) работа газом не совершается, то при нагревании идеального одноатомного газа на ΔT увеличится только его внутренняя энергия на ΔU

$$\Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T. \quad (2)$$

С другой стороны, согласно условию, можем записать

$$\Delta U = c_V^M \nu \Delta T. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), находим молярную теплоёмкость идеального одноатомного газа при постоянном объёме

$$c_V^M = \frac{3}{2} R. \quad (4)$$

Заметим, что двухатомного идеального газа при комнатных температурах $c_V^M = \frac{5}{2} R$, для трёхатомного $c_V^M = \frac{6}{2} R$ и далее она монотонно возрастает в зависимости от числа атомов и особенностей (температуры) изохорного процесса.

Используя (4) и (1), запишем внутреннюю энергию U любого идеального газа в общем виде

$$U = c_V^M \nu T = \nu c_V^M T. \quad (5)$$

1.2 Согласно первому началу термодинамики при произвольном процессе количество теплоты ΔQ , сообщенное газу, идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы $\Delta A = p \Delta V$

$$\Delta Q = \Delta U + p \Delta V. \quad (6)$$

Рассмотрим два близких состояния системы (p, V) и $(p + \Delta p, V + \Delta V)$. Из уравнения состояния идеального газа в форме Клапейрона – Менделеева для этих изобарных состояний можем записать

$$\begin{aligned} pV &= \nu R \Delta T \\ p(V + \Delta V) &= \nu R(T + \Delta T). \end{aligned} \quad (7)$$

Вычитая уравнения, из (7) найдем

$$p \Delta V = \nu R \Delta T. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), с учетом (3) получим для изобарного процесса

$$\Delta Q = c_V^M \nu \Delta T + \nu R \Delta T. \quad (9)$$

Теперь, по определению, легко находим молярную теплоёмкость идеального газа при постоянном давлении

$$c_p^M = \frac{\Delta Q}{\nu \Delta T} = \frac{c_V^M \nu \Delta T + \nu R \Delta T}{\nu \Delta T}. \quad (10)$$

После сокращения на $\nu \Delta T$, окончательно получаем, что для произвольного идеального газа справедливо равенство

$$c_p^M = c_V^M + R. \quad (11)$$

Уравнение (11) было получено в 1842 г. немецким естествоиспытателем и очень внимательным медиком (!) Р. Майером, который первым заметил различия в цвете крови (!! на экваторе и в средних широтах. Где кровь, а где термодинамика ...? ☺

Таким образом, согласно уравнению Майера, молярная газовая постоянная R (см. размерность) даёт разность между молярными теплоемкостями идеального газа при различных процессах: при изобарном и при изохорном.

1.3 По определению адиабатный процесс осуществляется в теплоизолированной термодинамической системе, т.е. без теплообмена ($Q = 0$) с окружающей средой, следовательно, первое начало термодинамики для него примет вид

$$Q = 0 = \Delta U + A. \quad (12)$$

Из (12) следует, что малая работа ΔA идеального газа при малом объемном расширении на ΔV совершается только за счет убыли его внутренней энергии (притока теплоты нет)

$$\Delta A = p\Delta V = -\Delta U. \quad (13)$$

С учетом (5) перепишем (13) в виде

$$p\Delta V = -\Delta U = -\nu c_V^M \Delta T. \quad (14)$$

Выразим давление идеального газа из уравнения Клапейрона – Менделеева

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{\nu RT}{V}. \quad (15)$$

С учетом (15) выражение (14) примет вид

$$\frac{\nu RT}{V} \Delta V = -\nu c_V^M \Delta T \quad \Rightarrow \quad -\frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}. \quad (16)$$

Перепишем (16) в «удобном» виде, чтобы воспользоваться математической подсказкой из условия задачи

$$\frac{\Delta T}{T} + \frac{R}{c_V^M} \cdot \frac{\Delta V}{V} = 0. \quad (17)$$

Теперь, с учетом математической подсказки из условия задачи, можем заключить, что справедливо равенство

$$TV^{\frac{R}{c_V^M}} = TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (18)$$

Поскольку $\frac{R}{c_V^M} = \gamma - 1$, то окончательно получим

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

где $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V^M} = \frac{c_V^M + R}{c_V^M} = \frac{c_p^M}{c_V^M} > 1$ – показатель адиабаты Пуассона.

Несмотря на то, что уравнение адиабатного процесса в виде (18) легче выводится, чаще (с подачи самого Пуассона) оно используется в выражении через переменные (p, V) .

1.4 Перепишем уравнение адиабаты для идеального газа в наиболее распространенном, «классическом» виде, которое использовал Пуассон, т.е. в переменных (p, V) .

Для замены переменных из (15) выразим температуру T и подставим в (18)

$$pV = \nu RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{pV}{\nu R} \quad \Rightarrow \quad \frac{pV}{\nu R} V^{\gamma-1} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad pV^\gamma = \text{const}^* . \quad (19)$$

Следовательно, уравнение адиабатного процесса (Пуассона) для произвольного идеального газа в параметрах $(p; V)$ можно записать в виде

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (20)$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M} > 1$.

1.5 Выразим зависимость давления от объема $p(V)$ идеального газа при изотермическом процессе

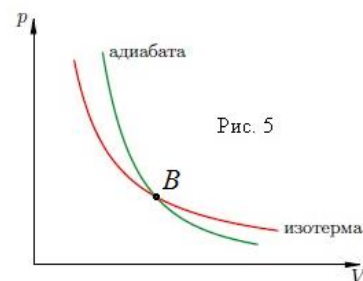
$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\text{const}_1}{V}, \quad (21)$$

и при адиабатном процессе

$$p = \frac{\text{const}_2}{V^\gamma}. \quad (22)$$

Поскольку $\gamma > 1$, то из (21) и (22) следует, что с ростом объема V идеального газа на (p, V) – диаграмме адиабата убывает «быстрее», чем изотерма. Можно сказать и по другому: на (p, V) – диаграмме адиабата идет «круче», чем изотерма, поэтому у них обязательно будет точка пересечения B (Рис. 5).

Соответственно, после точки пересечения графиков (см. Рис. 5), при $V \rightarrow \infty$ адиабата всегда прижимается «ближе» к оси абсцисс (объемов), т.е. как бы «ныряет» под изотерму.



Часть 2. Цикл с адиабатой

2.1 Пусть в состоянии A идеальный газ имеет давление p_A и объем V_A , а в течение в течение цикла его объем увеличивается в n раз (Рис. 2).

Участок AB цикла соответствует изобарному нагреванию идеального газа, поэтому здесь газ (рабочее тело) получает теплоту от внешнего источника (работает нагреватель).

Участок BC цикла соответствует изохорному охлаждению газа, поэтому здесь рабочее тело отдает теплоту внешнему источнику (работает холодильник).

Участок CA цикла соответствует адиабатному сжатию газа, поэтому здесь газ не получает и не отдает теплоту внешнему источнику, поскольку отсутствует теплообмен (не работают ни холодильник, ни нагреватель).

Таким образом, газ получает теплоту от нагревателя только на участке AB цикла.

Запишем первое начало термодинамики для участка AB цикла

$$Q_1 = Q_{AB} = \Delta U_{AB} + A_{AB} = \{(11)\} = \frac{5}{2} \nu R \Delta T = \frac{5}{2} p_A V_A (n - 1). \quad (23)$$

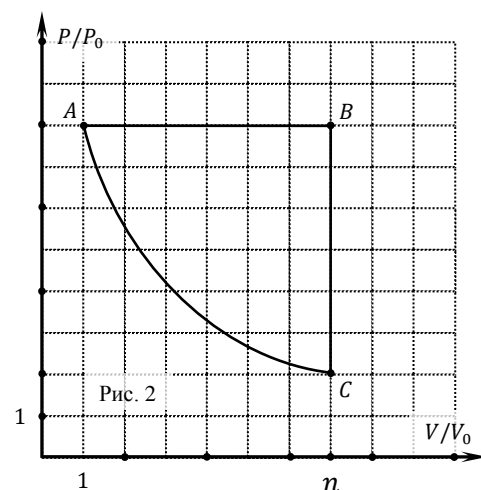
Таким образом, согласно (23) количество теплоты Q_1 , полученное рабочим телом от нагревателя, определяется начальными параметрами системы (давлением p_A и объемом V_A) и степенью расширения n одноатомного газа.

2.2 Поскольку процесс CA является адиабатическим, то можно воспользоваться уравнением Пуассона (20), согласно которому

$$p_A V_A^\gamma = p_C V_C^\gamma = p_C (n V_A)^\gamma, \quad (24)$$

где показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_p^M}{c_v^M} = \frac{5}{3}$ (одноатомный газ).

Тогда



$$p_C = \frac{p_A}{n^\gamma}. \quad (25)$$

Как следует из (25) для одноатомного газа ($\gamma = 5/3$) данное значение будет равно

$$p_C = \frac{p_A}{n^{5/3}}. \quad (26)$$

2.3 Из анализа пункта 2.1 следует, что холодильник работал только на участке BC цикла. Согласно первому началу термодинамики

$$Q_2 = Q_{BC} = \Delta U_{BC} + A_{BC} = \Delta U_{BC} = \{(3)\} = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} (p_A - p_C) n V_A. \quad (27)$$

Используя (26), перепишем (27) в виде

$$Q_2 = \frac{3}{2} p_A \left(1 - \frac{1}{n^{5/3}}\right) n V_A = \frac{3}{2} p_A V_A \left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right). \quad (28)$$

2.4 С учетом (23) и (28) для термодинамического КПД η данного цикла получаем

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1}. \quad (29)$$

Как следует из (29) КПД данного теплового двигателя не зависит от начальных параметров p_A и V_A идеального газа, а зависит только от того, во сколько раз n увеличивается объем газа в течение цикла.

Это связано с тем, что в данном цикле и количество теплоты Q_1 , полученное от нагревателя, и количество теплоты Q_2 , отданное холодильнику, оказались пропорциональны одной и той же величине $p_A V_A$, которая, по итогу, сокращается.

2.5 Для нахождения максимального КПД цикла η_{max} нужно исследовать (29) как функцию от n (например, через производную). Но можно использовать и олимпиадный метод «хитрого глаза», т.е. внимательно, «по-рентгеновски» посмотреть на (29), учитывая свойства дробей.

Это приведет нас к системе неравенств

$$1 < \frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1} < \frac{n}{n-1}. \quad (30)$$

Кроме того, при $n \rightarrow \infty$ выражение $\frac{n}{n-1}$ стремится к единице. Следовательно, величина $\frac{\left(n - \frac{1}{n^{2/3}}\right)}{n-1}$ стремится к единице сверху.

Соответственно, КПД цикла будет максимальным при $n \rightarrow \infty$ и это предельное значение равно

$$\eta_{max} = \eta(n \rightarrow \infty) = 1 - \frac{3}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5} = 0,40 = 40\%. \quad (31)$$

Полученное значение КПД η_{max} конечно же не превышает предельное значение идеального цикла Карно, которое устанавливает теоретический предел возможного термодинамического КПД тепловой машины при данной разности температур.

2.6 Для цикла, изображенного на Рис. 4, объем газа по отношению к начальному значению увеличивается в $n = 7$ раз. Следовательно, согласно (29) КПД такого цикла

$$\eta = 1 - \frac{3}{5} \cdot \frac{\left(7 - \frac{1}{7^{2/3}}\right)}{7-1} = \{0,3273275883\} = 0,33 = 33\%. \quad (32)$$