Решения задач. 9 класс.

Задача 9-1. Собака и поводок

Часть 1. Очень медленное движение (ползком).

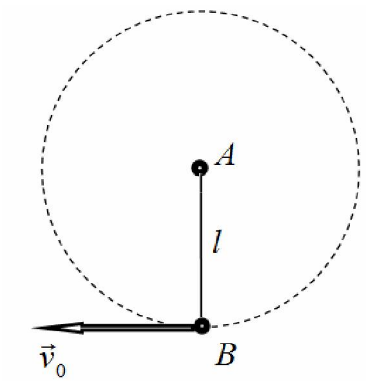
1.1 Для построения графика движения необходимо учесть, что точка B начинает двигаться, если ее расстояние до точки A начинает превышать длину поводка $l = 3{,}0$ м. При движении точки B, ее координата меньше координаты точки A на величину l при движении точки A в положительном направлении оси, и больше координаты точки на величину l при движении последней в отрицательном направлении. С помощью таких рассуждений построен график закона движения точки B, который показан на рис. 1.

1.2 Пути, пройденные рассматриваемыми материальными точками легко подсчитать по построенным графикам:

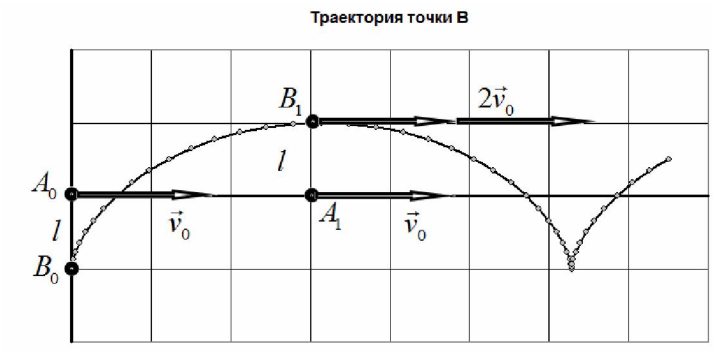
$$S_A = 6+3+6+4+2+6 = 27\,\text{м}$$
$$S_B = 3+3+3 = 9{,}0\ \text{м} \quad (1)$$

Часть 2. Движение без трения.

2.1 Эту часть задачи проще всего решить, если перейти в систему отсчета, связанную с точкой A. В этой системе отсчета в начальный момент времени точка B получает скорость v_0, направленную перпендикулярно веревке. Так как на точку B действует только сила натяжения веревки, то в этой системе отсчета эта точка будет двигаться по окружности радиуса l вокруг точки A (см. рис.)



2.2 В исходной, неподвижной системе отсчета движение точки B будет являться суперпозицией движения по окружности с постоянной по модулю скоростью поступательного движения v_0 и поступательного движения центра окружности с той же скоростью v_0. Результатом такого наложения является движение по циклоиде, вид которой показан на следующем рисунке.

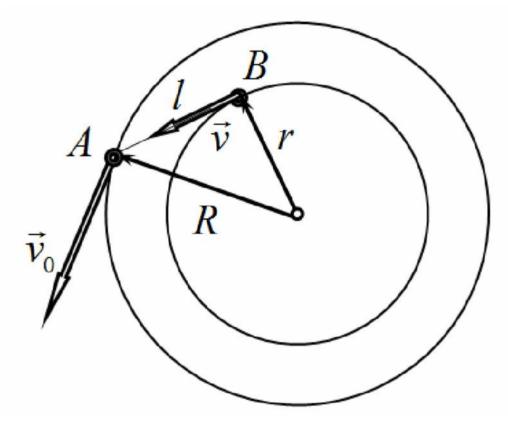


2.3 Скорость точки B будет максимальна, когда вектор ее скорости относительно точки A совпадет по направлению с вектором скорости точки A (на рисунке – это верхняя точка траектории B_1). В этот момент времени скорость точки будет равна

$$v_{max} = 2v_0. \qquad (2)$$

Часть 3. Очень вязкое трение.

3.1 Из приведенной подсказки следует, что вектор скорости точки B направлен вдоль поводка, то есть, направлен на точку A. Не сложно сообразить, что в этом случае траекторией точки B также будет окружность, концентрическая с траекторией точки A. На рисунке показаны обе траектории и векторы скоростей обеих точек.



3.2 Из рисунка следует, что радиус окружности, по которой движется точка B, равен

$$r = \sqrt{R^2 - l^2} \approx 5{,}2\,\text{м}. \qquad (3)$$

3.3 Так как угловые скорости движения точек равны, то модуль скорости точки B оказывается равным

$$\frac{v_0}{R} = \frac{v}{r} \quad \Rightarrow \quad v = v_0\frac{r}{R} \approx 5{,}2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}. \qquad (4)$$

Задача 9.2. Почему линии электропередач высоковольтные?

Часть 1. Элементарное введение.

1.1 Мощность электрического тока рассчитывается по формуле

$$P = \frac{U_0^2}{R}, \tag{1}$$

Откуда следует, что сопротивление лампочки равно

$$R = \frac{U_0^2}{P} = 484\,\text{Ом}, \tag{2}$$

1.2 Так как напряжения на обеих лампочках номинальное, то они работают в номинальном режиме, поэтому суммарная мощность просто равна сумме мощностей:

$$P_\Sigma = P_1 + P_2 = 160\,\text{Вт}. \tag{3}$$

1.3 При последовательном соединении лампочек сила тока через них одинакова, поэтому суммарную мощность удобнее представить в виде

$$P_\Sigma = I^2 R_1 + I^2 R_2 = I^2 (R_1 + R_2). \tag{4}$$

Сопротивления лампочек выразим через их номинальные мощности с помощью формулы (2):

$$P_\Sigma = I^2 (R_1 + R_2) = I^2 \left(\frac{U_0^2}{P_1} + \frac{U_0^2}{P_2} \right) = I^2 U_0^2 \left(\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} \right). \tag{5}$$

Учитывая, что произведение силы тока на напряжение источника равно суммарной мощности в цепи $IU_0 = P_\Sigma$, получим красивое выражение для мощностей

$$\frac{1}{P_\Sigma} = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2}, \tag{6}$$

Из которого находим суммарную мощность

$$P_\Sigma = \frac{P_1 P_2}{P_1 + P_2} = 37{,}5\,\text{Вт}. \tag{7}$$

Часть 2. Линия электропередачи.

2.1 Напряжение на нагрузке в данном случае определяется по формуле

$$U = IR = \frac{U_0}{R + r} R. \tag{8}$$

2.2 Так как полезная нагрузка и провода соединены последовательно, то сила через все элементы цепи одинакова. Поэтому коэффициент потерь может быть найден по формуле

$$\eta_{\text{пот.}} = \frac{P_{\text{пот.}}}{P} = \frac{I^2 r}{I^2 (R + r)} = \frac{r}{R + r} \tag{9}$$

2.3 Рассчитаем сопротивление подводящих проводов (не забудьте, что их два):

$$r = \rho \frac{8L}{\pi d^2} = 216\,\text{Ом}. \tag{10}$$

И сопротивление нагрузки

$$R = \frac{U_0^2}{P} = 48{,}4\ \text{Ом}. \qquad (11)$$

Напряжение на нагрузке рассчитывается по формуле (8)

$$U = \frac{U_0}{R + r} R = 40\ \text{В}. \qquad (12)$$

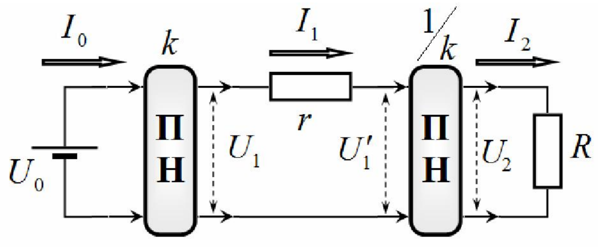
А коэффициент потерь по формуле (9)

$$\eta_{\text{пот.}} = \frac{r}{R + r} = 0{,}82 = 82\% \qquad (13)$$

Таким образом, оказывается, что при передаче электроэнергии всего на 5 км напряжение падает более, чем в 5 раз и при этом более 80% энергии теряется в проводах!

Часть 3. Линия с преобразованием напряжения.

3.1 Для расчета параметров цепи введем обозначения сил токов и напряжений, показанные на рисунке.



Расчет удобнее начинать от потребителя.

Пусть напряжение на нагрузке равно U_2.

Сила тока через нагрузку определяется законом Ома

$$I_2 = \frac{U_2}{R}. \qquad (14)$$

Тогда, мощность, потребляемая полезной нагрузкой, равна

$$P = \frac{U_2^2}{R} \qquad (15)$$

Напряжение на входе второго понижающего преобразователя равно

$$U_1' = kU_2, \qquad (16)$$

Сила тока в линии электропередачи находится из условия постоянства мощности

$$U_2 I_2 = U_1' I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{U_2^2}{R \cdot kU_2} = \frac{U_2}{kR}. \qquad (17)$$

Напряжение на выходе первого повышающего преобразователя можно найти из выражения:

$$U_1 = I_1 r + U_1' = \frac{U_2}{kR} r + kU_2 = kU_2\left(1 + \frac{r}{k^2 R}\right) \qquad (18)$$

С другой стороны, это же напряжения можно выразить через напряжение источника

$$U_1 = kU_0. \qquad (19)$$

Из двух последних выражений следует

$$kU_2\left(1 + \frac{r}{k^2 R}\right) = kU_0 \quad \Rightarrow U_2 = \frac{U_0}{1 + \dfrac{r}{k^2 R}} = U_0 \frac{R}{R + \dfrac{r}{k^2}}. \qquad (20)$$

Теперь можно записать и формулу для силы тока через нагрузку

$$I_2 = \frac{U_2}{R} = \frac{U_0}{R + \dfrac{r}{k^2}}. \qquad (21)$$

3.2 Из полученных формул для напряжения и силы тока (20)-(21) следует, что повышение напряжения в линии передачи в k раз формально равносильно понижению сопротивления линии в k^2 раз.

3.3 Для расчета коэффициента потерь можно воспользоваться формулой (13) с соответствующим изменение сопротивления проводов:

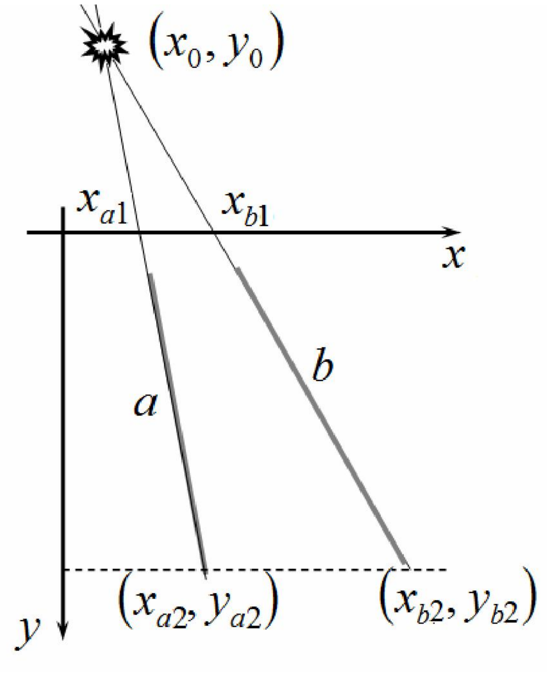
$$\eta'_{пот.} = \frac{r}{k^2 R + r} = 4{,}5 \cdot 10^{-6} \qquad (22)$$

Таким образом, при повышении напряжения в 1000 раз потери энергии уменьшаются почти в 200 тысяч раз!!!

Задание 9-3. Тень от расчески.

Нарисуем схему установки (вид сверху) .

Здесь a, b - тени от двух произвольных зубцов расчески. Из рисунка следует, что прямые, на которых лежат эти тени, пересекаются в источнике (точнее в точке проекции источника на плоскость фотографии).

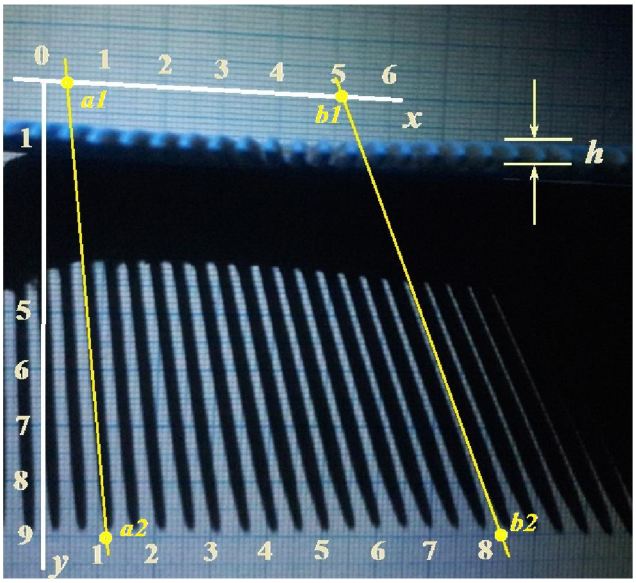


На приведенной фотографии надо выбрать две тени от различных зубцов, провести через них прямые и найти координаты точки их пресечения (x_0, y_0). Для повышения точности следует выбирать прямые, далеко отстоящие друг от друга. Если же выбрать две близкие (почти параллельные прямые), то определение точки их пересечения сопряжено с большими ошибками.

Решить эту задачу можно различными способами: посредством геометрических построений, алгебраически и т.д.

Мы кратко изложим формальный метод, основанный на простейших понятиях аналитической геометрии.

На каждой из выбранных прямых выбираем две точки (также желательно расположенных на большом расстоянии друг от друга), снимаем их координаты, записываем уравнение прямой. На рисунке показаны выбранные прямые и указаны точки, координаты которых определялись по рисунку



С помощью фотографии можно определить координаты двух произвольных точек, лежащих на линиях теней. В таблице приведены координаты этих точек.

Точка	x , см	y , см
a1	0,4	0,0
a2	1,1	9,0
b1	5,1	0,0
b2	8,3	9,0

Коэффициенты уравнения $y = ax + b$ прямой линии, проходящей через две точки с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

Рассчитываются по формулам

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad b = y_2 - ax_2 \tag{1}$$

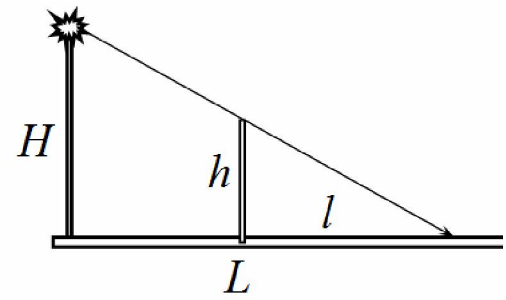
Расчет по приведенным координатам выбранных точек дал следующие уравнения прямых

$$\begin{cases} y = 12{,}9x - 5{,}1 \\ y = 2{,}8x - 14{,}3 \end{cases} \quad (2)$$

Решение этой системы уравнений дает координаты источника

$$x_0 = -0{,}91\,\text{см}$$
$$y_0 = -16{,}9\,\text{см} \quad (3)$$

Теперь построим схему расположения объектов в вертикальной плоскости, содержащей источник света и один из зубцов. На этом рисунке l - расстояние от зубца до конца его тени, L - горизонтальное расстояние от источника до конца тени. Из рисунка следует, что справедлива пропорция:



$$\frac{H}{h} = \frac{L}{l}. \quad (4)$$

Но отношение указанных расстояний равно отношению изменения координат (лучше взять координаты y - они измеряются точнее). Тогда из выражения (5) находим:

$$H = h\frac{y_1 - y_0}{y_2 - y_0} \quad (5)$$

Здесь $y_1 = 9{,}0$ координаты концов теней, $y_1 = 1{,}0$ - координаты расположения расчески, $y_0 = -16{,}9$ - найденная координата источника. Подстановка этих численных значений в выражение (6) дает высоту, на которой находился источник

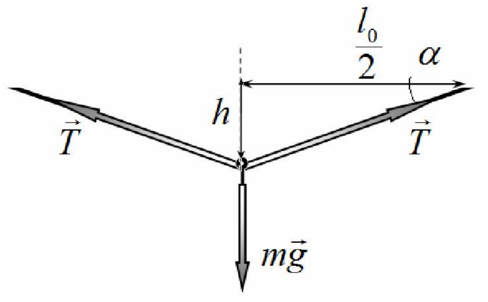
$$H = 6{,}5\,\text{см} \quad (6)$$

Решения задач. 10 класс

Задача 10-1. Упругий жгут

Часть 1. Провисание шнура

1.1 На рисунке показаны силы, действующие на точку крепления груза. Сила натяжения жгута обозначена $\vec{T}$. Условие равновесия в проекции на вертикальную ось выражается уравнением



$$mg = 2T\sin\alpha . \qquad (1)$$

Силу упругости жгута также можно выразить из закона Гука

$$T = kx = k\left(\frac{l_0}{2\cos\alpha} - \frac{l_0}{2}\right) = \frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \qquad (2)$$

Из этих выражений получаем уравнение для определения угла α:

$$mg = 2\frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha = \frac{mg}{kl_0} . \qquad (3)$$

Это уравнение может быть сведено к алгебраическому уравнению степени, большей, чем два. Поэтому для его решения проще воспользоваться приближением малых углов. В этом приближении (с учетом формул, приведенных в условии задачи) левую часть уравнения преобразуем к виду:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha \approx \frac{1-\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)}{1-\frac{\alpha^2}{2}}\alpha \approx \frac{\alpha^3}{2}$$

Тогда из уравнения (3) следует, что угол отклонения жгута от горизонтали задается формулой

$$\alpha = \sqrt[3]{2\frac{mg}{kl_0}} \qquad (4)$$

А провисание жгута оказывается равным

$$\boxed{h = \frac{l_0}{2}\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{l_0}{2}\alpha = \frac{l_0}{2}\sqrt[3]{2\frac{mg}{kl_0}}} . \qquad (5)$$

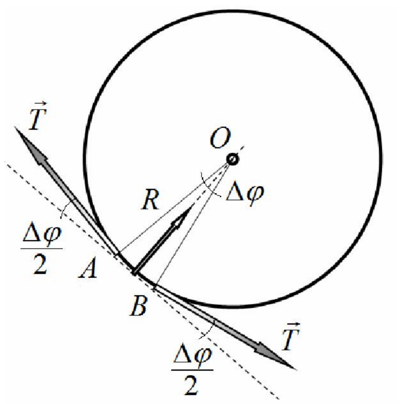
1.2 Жгут разорвется, если сила его натяжения станет T (формула (1)) равной максимальной силе F_{max}. В формулах (1)-(2) воспользуемся приближением малых углов и решим полученную систему уравнений относительно массы груза, а затем вместо произвольной силы натяжения подставим ее предельное значение:

$$\begin{cases} mg = 2T\sin\alpha \\ T = \frac{kl_0}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mg = 2T\alpha \\ T = \frac{kl_0}{2}\frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (mg)^2 = 4T^2\alpha^2 \\ T = \frac{kl_0}{2}\frac{\alpha^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{(mg)^2}{T} = \frac{16T^2}{kl_0}$$

Откуда следует окончательный результат:

$$\boxed{m_{max} = \frac{4}{g}\sqrt{\frac{F_{max}^3}{kl_0}}} \qquad (6)$$

Часть 2. Вращающийся жгут



2.1 Выделим мысленно на кольце небольшой участок AB, видимый из центра кольца O под малым углом $\Delta\varphi$. Он движется по окружности с центростремительным ускорением

$$a = \omega^2 R. \qquad (7)$$

Это ускорение ему сообщают силы упругости кольца T, приложенные к концам выделенного участка.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для выделенного участка кольца в проекции на радиальное направление (с учетом малости угла $\Delta\varphi$)

$$\Delta m\omega^2 R = 2T\frac{\Delta\varphi}{2}. \qquad (8)$$

Здесь $\Delta m = \frac{m_0}{2\pi}\Delta\varphi$ - масса выделенного участка. Заметим, что это выражение для массы не зависит от того, растянуто кольцо, или нет.

Подставляя это выражение для массы участка, получим выражение для силы натяжения кольца

$$T = \frac{m_0}{2\pi}\omega^2 R. \qquad (9)$$

Это выражение не является окончательным ответом, так как в нем остается неизвестным радиус кольца, который увеличивается по мере раскручивания. Поэтому запишем формулу для силы натяжения, используя закон Гука:

$$T = k(2\pi R - l_0) \qquad (10)$$

Решая совместно уравнения (9)-(10) относительно силы натяжения T, получим следующую формулу:

$$\boxed{T = \frac{kl_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1}} \qquad (11)$$

Эта формула справедлива только при $\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1 > 0$, или при

$$\tilde{\omega}_1 < 2\pi\sqrt{\frac{k}{m_0}} \qquad (12)$$

При больших угловых скоростях кольцо начнет расширяться вплоть до разрыва, так как силы упругости не в состоянии обеспечить нужное центростремительное ускорение всем частям кольца.

2.2 Итак, первое условие разрыва кольца – нарушение неравенства (12).

Считая, что неравенство (12) выполняется, а сила упругости, определяемая формулой (11) достигла максимального значения F_{max}, выразим из (12) угловую скорость, при которой достигается эта сила натяжения:

$$\boxed{F_{max} = \frac{kl_0}{\frac{4\pi^2 k}{m_0\omega^2} - 1} \Rightarrow \tilde{\omega}_2 = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m_0\left(1 + \frac{kl_0}{F_{max}}\right)}}} \qquad (13)$$

Заметим, что угловая скорость, определяемая по формуле (13) всегда меньше, скорости, задаваемой формулой (12). Поэтому окончательным ответом на поставленный вопрос является формула (13).

2.3 Переход к нерастяжимому жгуту может быть формально проведен с помощью формулы (13), если считать, что $k \Rightarrow \infty$. В этом пределе максимальная угловая скорость угловая скорость описывается формулой

$$\tilde{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{F_{max}}{m_0 l_0}} \qquad (14)$$

Впрочем, этот же результат непосредственно следует из уравнения (9), если положить, что длина окружности кольца равна длине жгута.

Задача 10-2 Термодинамика в химии.

Часть 1. Введение

1.1 Так как сосуды теплоизолированные, и при смешивании газов работа не совершается, то внутренняя энергия газов сохраняется, что позволяет записать следующее балансное уравнение

$$c_1\nu_1 T_1 + c_2\nu_2 T_2 = (c_1\nu_1 + c_2\nu_2)\overline{T} \qquad (1)$$

Используя уравнение состояния идеального газа

$$PV = \nu RT\ , \qquad (2)$$

можно выразить

$$\nu T = \frac{PV}{R} \text{ и } \nu = \frac{PV}{RT}. \qquad (3)$$

Подставим в уравнение значения теплоемкостей газов и выражения (3), в результате получим

$$\frac{3}{2}P_1V + \frac{5}{3}P_2V = \left(\frac{3}{2}\frac{P_1V}{T_1} + \frac{2}{2}\frac{P_2V}{T_2}\right)\overline{T}\ . \qquad (4)$$

Из этого уравнения находим значение установившейся температуры:

$$\boxed{\overline{T} = \frac{3P_1 + 5P_2}{\dfrac{3P_1}{T_1} + \dfrac{5P_2}{T_2}}}. \qquad (5)$$

1.2 Суммарная теплоемкость смеси газов равна

$$C = \frac{3}{2}R\nu_1 + \frac{5}{2}R\nu_2 = \frac{3}{2}\frac{P_1V}{T_1} + \frac{3}{2}\frac{P_2V}{T_2}\ . \qquad (6)$$

Поэтому изменение температуры смеси при получении дополнительного количества теплоты равно

$$\Delta T = \frac{Q}{C} \qquad (7)$$

Изменение давления можно связать с изменением температуры с помощью уравнения изохорного процесса

$$\frac{P + \Delta P}{T + \Delta T} = \frac{P}{T}\ . \qquad (8)$$

При малом количестве полученной теплоты изменения температуры и давления также могут быть малыми. Поэтому уравнение (8) можно упростить

$$\frac{P+\Delta P}{T+\Delta T}=\frac{P}{T}\frac{1+\frac{\Delta P}{P}}{1+\frac{\Delta T}{T}}\approx\frac{P}{T}\left(1+\frac{\Delta P}{P}-\frac{\Delta T}{T}\right). \quad (9)$$

Из формул (8) и (9) следует, что на малом участке изохорного процесса выполняется соотношение

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta T}{T} \quad (10)$$

Поэтому относительное изменение давления оказывается равным

$$\frac{\Delta P}{P}=\frac{\Delta T}{T}=\frac{Q}{\frac{3}{2}\frac{P_1V}{T_1}+\frac{3}{2}\frac{P_2V}{T_2}}\frac{\frac{3P_1}{T_1}+\frac{5P_2}{T_2}}{3P_1+5P_2}=\frac{2Q}{(3P_1+5P_2)V} \quad (11)$$

Часть 2. Диссоциация газа

2.1 В рассматриваемом случае вся поступившая теплота пошла на увеличение внутренней энергии газа, поэтому

$$\frac{5}{2}R\Delta T_0=Q \quad \Rightarrow \quad \Delta T_0=\frac{2Q}{5R}. \quad (12)$$

Пусть температура газа увеличилась на величину ΔT. Тогда в образовавшейся смеси образовалось

$$\nu_1=2\eta\nu_0=2\alpha\Delta T \quad (13)$$

молей одноатомных молекул (напомним, $\nu_0=1$); и осталось

$$\nu_2=(1-\eta)\nu_0=1-\alpha\Delta T \quad (14)$$

двухатомных молекул.

Для получения уравнение энергетического баланса в этом процессе должно включать следующие слагаемые (для наглядности мы его представим в виде бухгалтерской таблицы):

Приход		Расход		Преобразования
Начальная внутренняя энергия газа	$\frac{5}{2}RT_0$			
Количество поступившей теплоты	Q			
		Внутренняя энергия смеси после нагревания	$\frac{3}{2}R\cdot 2\alpha\Delta T(T_0+\Delta T)+$ $+\frac{5}{2}R(1-\alpha\Delta T)(T_0+\Delta T)$	$\approx 3R\alpha T_0\Delta T+$ $+\frac{5}{2}R(T_0+\Delta T+\alpha T_0\Delta T)$ $=\frac{5}{2}RT_0+\frac{5}{2}R\Delta T+\frac{11}{2}R\alpha T_0\Delta T$
		расход энергии на диссоциацию	$q\alpha\Delta T$	

При проведении преобразований мы пренебрегли величинами пропорциональными $(\Delta T)^2$ ввиду малости изменения температуры. Таким образом, уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\frac{5}{2}RT_0 + Q = \frac{5}{2}RT_0 + \frac{5}{2}R\Delta T + \frac{11}{2}R\alpha T_0\Delta T + q\alpha\Delta T\ . \tag{15}$$

Из этого уравнения находим

$$\Delta T = \frac{2Q}{5R + R\alpha T_0 + q\alpha}\,. \tag{16}$$

2.3 Полученное значение оказывается меньше, чем рассчитанное без учета диссоциации. Это уменьшение разности температур обусловлено двумя причинами:
- часть энергии израсходовано на диссоциацию молекул;
- теплоемкость образовавшейся смеси больше, чем теплоемкость исходного газа.

Часть 3. Горение водорода.

3.1 В описанной реакции горения принимают участие 2 моля водорода и 1 моль кислорода. Так как, в сосуде изначально имеется только один моль водорода, то в реакцию вступит только 0,5 моля кислорода. Следовательно. после завершения реакции в сосуде будет содержаться один моль водяного пара и 0,5 моля кислорода.

Уравнение энергетического баланса в этом случае практически очевидно:

$$2\cdot\frac{5}{2}RT_0 + \frac{1}{2}q = \frac{6}{2}RT + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}RT\ . \tag{17}$$

Из этого уравнения следует, что в сосуде установится температура

$$T = \frac{20RT_0 + 2q}{17R}\,. \tag{18}$$

3.2 Из полученной формулы следует, что даже при $q = 0$ температура в ходе реакции повышается. Причиной этого является уменьшение теплоемкости газов в ходе реакции.

Задание 10-3. Подводный телеграфный кабель.

1. Введение.

1.1 Сопротивление центральной медной жилы рассчитывается по известной формуле

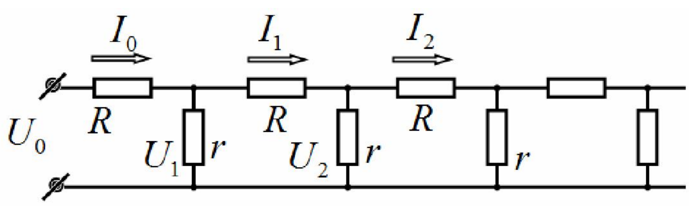
$$R = \rho_0\frac{L}{S} = \rho_0\frac{4L}{\pi d^2} = 0{,}87\,\text{Ом}\ . \tag{1}$$

1.2 Для расчета сопротивления изоляции необходимо учесть, что ток идет поперек изоляционного слоя, поэтому это сопротивление равно

$$r = \rho_1\frac{h}{2\pi dL} = 6{,}7\cdot10^6\,\text{Ом}\,. \tag{2}$$

2. Уменьшение силы тока в кабеле и его утечка.

2.1 По определению электрического напряжения, для каждой ячейки, состоящей из двух резисторов r и



одного резистора R напряжение может быть представлено в виде

$$U_k = I_k R + U_{k+1} \tag{3}$$

Из этой формулы следует, что

$$I_k = \frac{U_k - U_{k+1}}{R} \tag{4}$$

2.2 Рассматривая силы токов, входящих в каждый верхний узел цепи, можно записать

$$I_{k-1} = I_k + \frac{U_k}{r}. \tag{5}$$

здесь $\frac{U_k}{r}$ - сила тока утечки в данном звене.

Если подставить выражения для сил токов (4) в формулу (5), то получим искомое соотношение между напряжениями

$$\frac{U_{k-1} - U_k}{R} = \frac{U_k}{r} + \frac{U_k - U_{k+1}}{R}. \tag{6}$$

Его удобно представить в виде

$$U_{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right)U_k + U_{k+1} = 0. \tag{7}$$

2.3 Для проверки предположения о геометрической прогрессии, подставим явные выражения для напряжений $U_k = U_0\lambda^k$ в формулу (7):

$$U_0\lambda^{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right)U_0\lambda^k + U_0\lambda^{k+1} = 0. \tag{8}$$

После сокращения, получим квадратное уравнение для знаменателя прогрессии

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{R}{r}\right)\lambda + 1 = 0. \tag{9}$$

Таким образом, предположение о геометрической прогрессии выполняется, если ее знаменатель λ удовлетворяет уравнению (9). Решением этого уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{R}{2r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} \tag{10}$$

Из двух корней этого уравнения следует выбрать корень со знаком «минус», так как второй корень оказывается больше 1. В этом случае напряжения и, следовательно, силы токов должны возрастать до бесконечности, что физически не возможно.

Аккуратное вычисление параметра λ приводит к значению $\lambda = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$.

Обратите внимание на интересную «игру» малых величин: отношение сопротивлений, входящих в формулу (10) величина порядка 10^{-8}, найденный по этой формуле корень отличается от единицы на величину порядка 10^{-8}. При умении правильно работать с малыми величинами этот результат можно получить следующим образом:

$$\lambda = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{2r}\right)^2} \approx 1 - \sqrt{\frac{R}{r}}$$

На последнем шаге отброшен малые величины

Задание 10-3. Подводный телеграфный кабель.

1. Введение.

1.1 Сопротивление центральной медной жилы рассчитывается по известной формуле

$$R = \rho_0 \frac{L}{S} = \rho_0 \frac{4L}{\pi d^2} = 0,87\,\text{Ом} . \quad (1)$$

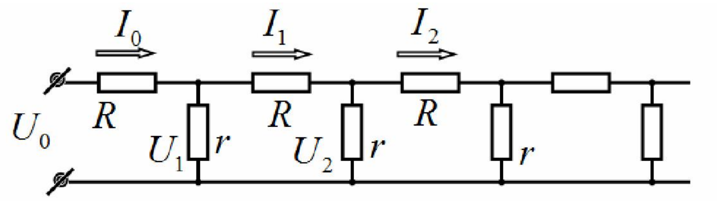
1.2 Для расчета сопротивления изоляции необходимо учесть, что ток идет поперек изоляционного слоя, поэтому это сопротивление равно

$$r = \rho_1 \frac{h}{2\pi dL} = 6,7 \cdot 10^6\,\text{Ом} . \quad (2)$$

2. Уменьшение силы тока в кабеле и его утечка.

2.1 По определению электрического напряжения, для каждой ячейки, состоящей из двух резисторов r и одного резистора R напряжение может быть представлено в виде

$$U_k = I_k R + U_{k+1} \quad (3)$$



Из этой формулы следует, что

$$I_k = \frac{U_k - U_{k+1}}{R} \quad (4)$$

2.2 Рассматривая силы токов, входящих в каждый верхний узел цепи, можно записать

$$I_{k-1} = I_k + \frac{U_k}{r} . \quad (5)$$

здесь $\frac{U_k}{r}$ - сила тока утечки в данном звене.

Если подставить выражения для сил токов (4) в формулу (5), то получим искомое соотношение между напряжениями

$$\frac{U_{k-1} - U_k}{R} = \frac{U_k}{r} + \frac{U_k - U_{k+1}}{R} . \quad (6)$$

Его удобно представить в виде

$$U_{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_k + U_{k+1} = 0 . \quad (7)$$

2.3 Для проверки предположения о геометрической прогрессии, подставим явные выражения для напряжений $U_k = U_0 \lambda^k$ в формулу (7):

$$U_0 \lambda^{k-1} - \left(2 + \frac{R}{r}\right) U_0 \lambda^k + U_0 \lambda^{k+1} = 0 . \quad (8)$$

После сокращения, получим квадратное уравнение для знаменателя прогрессии

$$\lambda^2 - \left(2 + \frac{R}{r}\right) \lambda + 1 = 0 . \quad (9)$$

Таким образом, предположение о геометрической прогрессии выполняется, если ее знаменатель λ удовлетворяет уравнению (9). Решением этого уравнения являются числа

$$\lambda_{1,2} = 1 + \frac{R}{2r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} \qquad (10)$$

Из двух корней этого уравнения следует выбрать корень со знаком «минус», так как второй корень оказывается больше 1. В этом случае напряжения и, следовательно, силы токов должны возрастать до бесконечности, что физически не возможно.

Аккуратное вычисление параметра λ приводит к значению $\lambda = 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$.

Обратите внимание на интересную «игру» малых величин: отношение сопротивлений, входящих в формулу (10) величина порядка 10^{-8}, найденный по этой формуле корень отличается от единицы на величину порядка 10^{-8}. При умении правильно работать с малыми величинами этот результат можно получить следующим образом:

$$\lambda = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\left(1 + \frac{R}{2r}\right)^2 - 1} = 1 + \frac{R}{2r} - \sqrt{\frac{R}{r} + \left(\frac{R}{2r}\right)^2} \approx 1 - \sqrt{\frac{R}{r}}$$

На последнем шаге отброшен малые величины, имеющие больший порядок, чем 0,5. Эта элементарная цепочка приближений дает тот же результат, что и громоздкий расчет по формуле (10)

2.4 Так как все наши расчеты приведены для одного звена длиной в 1 км, по расстоянию в 2000 км соответствует $N = 2000$ звеньев. С помощью формулы для геометрической прогрессии, находим, что убывание напряжения в кабеле равно

$$\frac{U_{2000}}{U_0} = (1 - \varepsilon)^N \approx 0{,}5 \qquad (11)$$

т.е примерно в 2 раза. Во столько же раз убывает и сила тока в кабеле.

Не смотря на то, что сопротивление утечки почти в 10 миллионов раз превышает сопротивлении основной жилы, на больших расстояния утечки тока оказываются существенными.

, имеющие больший порядок, чем 0,5.Эта элементарная цепочка приближений дает тот же результат, что и громоздкий расчет по формуле (10)

2.5 Так как все наши расчеты приведены для одного звена длиной в 1 км, по расстоянию в 2000 км соответствует $N = 2000$ звеньев. С помощью формулы для геометрической прогрессии, находим, что убывание напряжения в кабеле равно

$$\frac{U_{2000}}{U_0} = (1 - \varepsilon)^N \approx 0{,}5 \qquad (11)$$

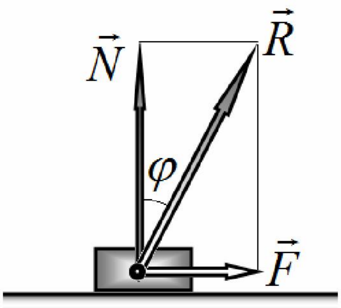
т.е примерно в 2 раза. Во столько же раз убывает и сила тока в кабеле.

Не смотря на то, что сопротивление утечки почти в 10 миллионов раз превышает сопротивлении основной жилы, утечки тока оказываются существенными для длинного кабеля.

Решения задач. 11 класс

Задача 11.1 Алгебра и геометрия на наклонной плоскости.

Часть 1. Неподвижная наклонная плоскость.



1.1 В соответствии с законом кулона – Амонтона (для силы трения) при скольжении тела, модуль силы трения связан с силой нормальной реакции простым соотношением

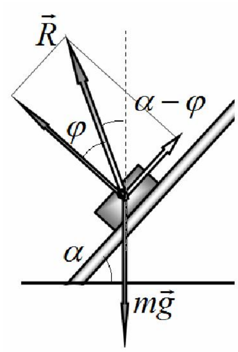
$$F = \mu N . \qquad (1)$$

Как следует из рисунка справедливо соотношение:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F}{N} = \mu \qquad (2)$$

1.2 Модуль силы реакции выражается через модуль силы нормальной реакции следующим образом

$$R = \frac{N}{\cos\varphi} . \qquad (3)$$



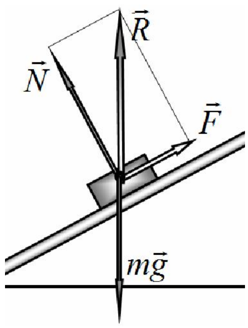
1.3-14 Так как на брусок действуют только две силы $\vec{R}$ и $m\vec{g}$, то для соскальзывания бруска необходимо, что бы их сумма имела горизонтальную составляющую, направленную в сторону спуска по наклонной плоскости. А это возможно только при

$$\alpha > \varphi \qquad (4)$$

Традиционное решение этой задачи: проекция силы тяжести на наклонную плоскость должна превысить силу трения:

$mg\sin\alpha > \mu N = \mu mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha > \mu$, что равносильно условию (4).

1.4 В предельном случае (начала скольжения) сила реакции направлена вертикально и по модулю равна силе тяжести.



1.5 Известная формула для ускорения бруска на наклонной плоскости

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \qquad (5)$$

может быть получена с помощью рисунка к п.1.3:

Горизонтальная составляющая ускорения бруска равна

$$a_{гор.} = \frac{R\sin(\alpha - \varphi)}{m} \qquad (6)$$

Кроме того, проекции силы тяжести и силы реакции на нормаль к наклонной плоскости равны (т.к. ускорение бруска направлено вдоль наклонной плоскости):

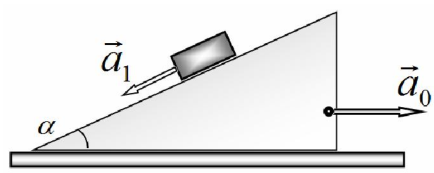
$$R\cos\varphi = mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi}$$

Тогда ускорение бруска равно

$$a = \frac{a_{гор.}}{\cos\alpha} = \frac{mg\cos\alpha}{\cos\varphi}\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{m\cos\alpha} = g\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad (7)$$

что равносильно формуле (5).

2. Брусок на ускоренно движущейся призме



2.1 Представим полное ускорение бруска в виде суммы векторов ускорения призмы $\vec{a}_0$ и ускорения бруска относительно призмы $\vec{a}_1$:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \qquad (8)$$

Уравнение 2 закона Ньютона (в векторной форме) для призмы в этом случае имеет вид:

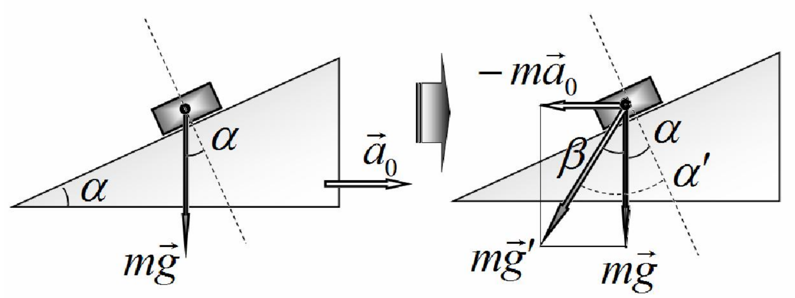
$$m(\vec{a}_0 + \vec{a}_1) = m\vec{g} + \vec{R} \qquad (9)$$

в котором $\vec{R}$ - введенная ранее сила реакции, действующая на брусок со стороны призмы. Важно, что эта сила реакции определяется силой тяжести. Перепишем уравнение (9) в виде

$$m\vec{a}_1 = m(\vec{g} - \vec{a}_0) + \vec{R} \qquad (10)$$

Это уравнение можно толковать, как уравнение движения бруска на наклонной плоскости, если ускорение свободного падения равно

$$\vec{g}' = \vec{g} - \vec{a}_0. \qquad (11)$$



Как следует из рисунка, вектор $\vec{g}'$ отклонен от вектора $\vec{g}$ на угол

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{a_0}{g}. \qquad (12)$$

Отметим, что проведенные рассуждения равносильны переходу в неинерциальную систему отсчета, связанную с призмой. В этой системе отсчета «появляется» сила инерции…, но это выходит за рамки школьной программы.

2.2 Угол наклона плоскости к горизонту α также равен углу между вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$ и нормалью к плоскости. Поэтому изменение направления вектора ускорения свободного падения (переход от $\vec{g}$ к $\vec{g}'$) равносильно изменению угла между нормалью к наклонной плоскости и вектором эффективного ускорения свободного падения, т.е. к изменению угла наклона плоскости. Также из рисунка легко заметить, что этот новый угол α' оказывается равным

$$\alpha' = \alpha + \beta \qquad (13)$$

2.3 Условие начала скольжения по наклонной плоскости было сформулировано ранее (неравенство (4)), поэтому остается только переписать его:

$$\alpha' > \varphi \quad \Rightarrow \quad \alpha + \beta > \varphi \qquad (14)$$

В заключение отметим, что от этого «углового» условия можно перейти и к привычным формулировкам:

$$\beta > \varphi - \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\beta > \operatorname{tg}(\alpha - \varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{a_0}{g} > \operatorname{tg}(\alpha - \operatorname{arctg}\mu)$$

Это неравенство без труда (но при знании тригонометрических формул) может быть преобразовано к привычному виду.

Задача 11-2. Поле пластин

Часть 1

1.1. Рассмотрим выражение

$$\Delta S\cos\theta; \qquad (1)$$

данное выражение представляет проекцию площади участка на плоскость перпендикулярную вектору $\vec{r}$. В силу малости участка можно считать, что выражение (1) есть часть площади поверхности сферы радиуса r, которая стягивает телесный угол $\Delta\Omega$. Тогда пользуясь определением телесного угла, находим:

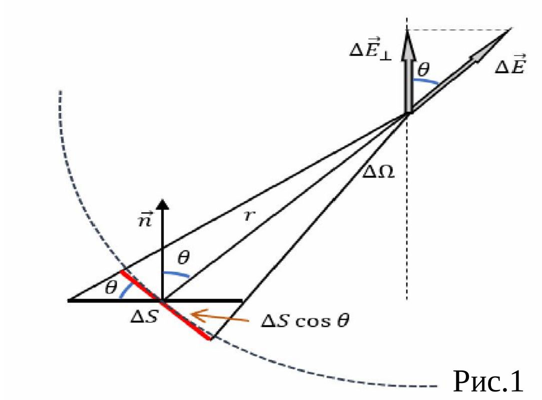


Рис.1

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S\cos\theta}{r^2} \qquad (2)$$

1.2. Разобьём всю плоскую площадку на малые участки ΔS. Заряд такого участка:

$$\Delta q = \sigma\Delta S \qquad (3)$$

Величина напряженности электростатического поля, создаваемого данным участком, определяется выражением:

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta S}{r^2} \qquad (4)$$

Компонента поля $\Delta E_\perp$, перпендикулярная заряженной плоскости, тогда (см.рис.1):

$$\Delta E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\Delta S}{r^2}\cos\theta \qquad (5)$$

Воспользовавшись выражением (2), доказанном в п.1.1, получаем:

$$\Delta E_\perp = \frac{\sigma\Delta\Omega}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (6)$$

Согласно принципу суперпозиции для вектора напряженности электростатического поля, находим, что:

$$\vec{E} = \sum\overrightarrow{\Delta E} \rightarrow E_\perp = \sum\Delta E_\perp = \sum\frac{\sigma\Delta\Omega}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sum\Delta\Omega = \frac{\sigma\Omega}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (7)$$

1.3. Бесконечная равномерно заряженная плоскость стягивает телесный угол

$$\Omega = 2\pi \qquad (8)$$

Тогда в соответствии с (7):

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad (9)$$

- хорошо известный результат!

1.4. Изобразим на рис.2 конус, ограничивающий телесный угол, под которым «виден» равномерно заряженный диск. Угол полураствора данного конуса определяется выражением:

$$\cos\alpha = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \qquad (10)$$

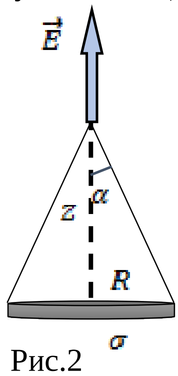


Рис.2

Тогда телесный угол при вершине построенного конуса можно определить, воспользовавшись подсказкой:

$$\Omega = 2\pi\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \qquad (11)$$

Величина перпендикулярной компоненты напряженности электростатического поля в соответствии с (7):

$$E_\perp(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \qquad (12)$$

Из осевой симметрии системы следует, что вектор напряженности поля направлен вдоль оси диска, поэто формула (12) дает и модуль вектора напряженности поля:

$$E(z) = E_\perp(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) \qquad (12')$$

При $z \ll R$ получаем приближенное выражение

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{R}\right), \qquad (13)$$

видим, что величина напряженности поля линейно убывает.

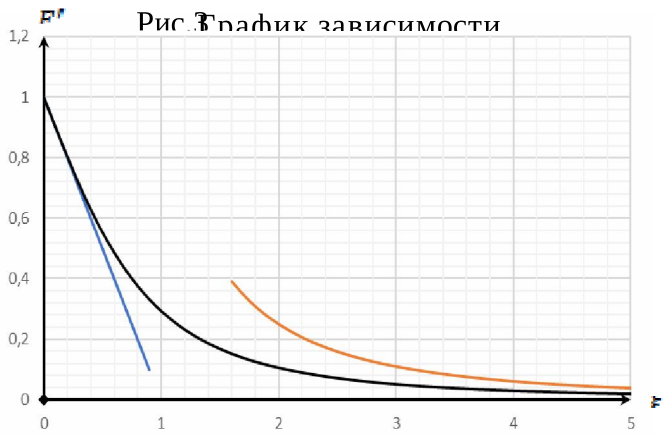
В другом предельном случае $z \gg R$ получаем:

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1+\frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\left(1-\frac{1}{2}\frac{R^2}{z^2}\right)\right) = \frac{\sigma\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 z^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}, \qquad (14)$$

т.е. на большом удалении поле диска совпадает с полем точечного заряда.

Для построения графика (рис.3) зависимости $E(z)$ воспользуемся относительными координатами: $E' = \frac{E}{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}, \xi = \frac{z}{R}$

На графике также отображены приближения: при $z \ll R \leftrightarrow \xi \ll 1$ и $z \gg R \leftrightarrow \xi \gg 1$.



1.5. Для получения ответа в данном пункте определим, под каким телесным углом «видна» часть бесконечной равномерно заряженной плоскости без отверстия:

$$\Omega^{'} = \Omega_{пл} - \Omega_{диска} = 2\pi \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (15)$$

Тогда величина напряженности поля на оси симметрии данной системы в соответствии с (7):

$$E = \frac{\sigma\Omega^{'}}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \quad (16)$$

При $z \ll R$:

$$E(z) \approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{R}, \quad (17)$$

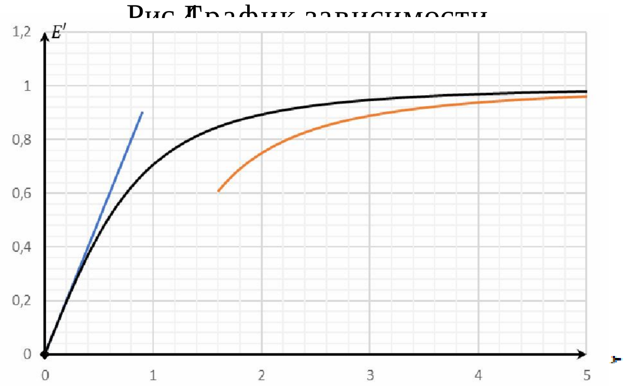
видим, что величина напряженности поля линейно возрастает.

При $z \gg R$:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0 R}\left(1 - \frac{R^2}{2z^2}\right), \quad (18)$$

поле совпадает с полем бесконечной равномерно заряженной плоскости и отрицательного точечного заряда.

Для построения графика (рис.4) зависимости $E(z)$ опять воспользуемся относительными координатами: $E' = \frac{E}{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}, \xi = \frac{z}{R}$.



На графике также отображены приближения при $z \ll R \leftrightarrow \xi \ll 1$ и $z \gg R \leftrightarrow \xi \gg 1$.

1.6. Для возникновения колебаний нужна возвращающая сила, в нашем случае, заряд должен притягиваться к центру отверстия вдоль оси, следовательно, это должен быть отрицательный заряд:

$$Q < 0 \quad (19)$$

Сила, действующая на точечный заряд Q в электростатическом поле $\vec{E}$, определяется выражением:

$$\vec{F} = Q\vec{E} \quad (20)$$

Запишем тогда 2-ой закон Ньютона для заряда Q , находящегося на оси симметрии системы на малом расстоянии $z \ll R$ от центра отверстия:

$$m\vec{a} = Q\vec{E}(z) \tag{21}$$

В проекциях на ось Oz :

$$ma_z = -|Q|E(z) = -|Q|\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{R} \tag{22}$$

Преобразуем (22), чтобы получить уравнение гармонических колебаний:

$$a_z + \frac{\sigma|Q|}{2\varepsilon_0 mR}z = 0 \tag{23}$$

И тогда для циклической частоты и периода гармонических колебаний можем записать:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\sigma|Q|}{2\varepsilon_0 mR}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2\varepsilon_0 mR}{\sigma|Q|}} \tag{24}$$

Часть 2.

2.1 Бесконечные равномерно заряженные пластины создают одинаковое по модулю однородное электростатическое поле:

$$E^{+} = E^{-} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{25}$$

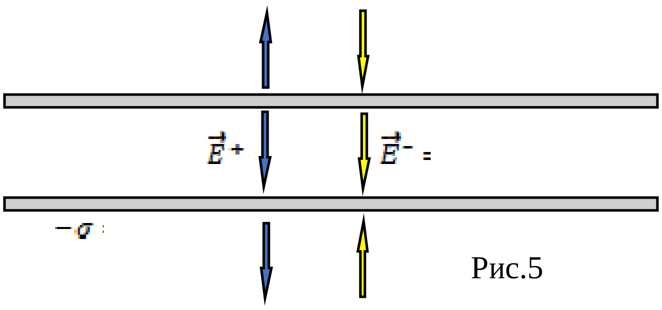
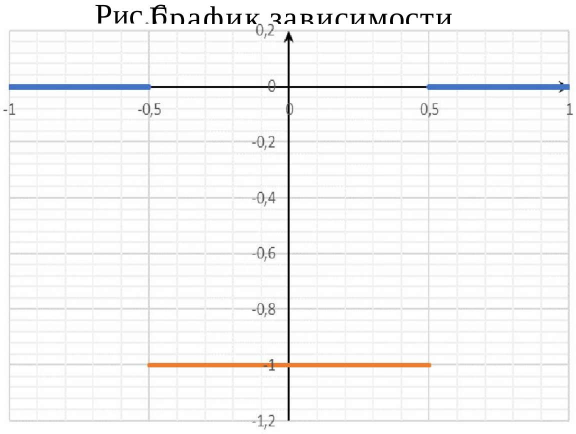


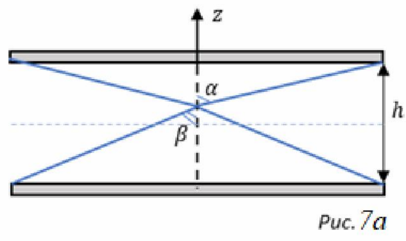
Рис.5

В соответствии с рисунком 5 электростатическое поле снаружи отсутствует ввиду того, что E^{+} и E^{-} одинаковы по модулю и противоположны по направлению. Величина напряженности электростатического поля между пластинами определяется суммой модулей E^{+} и E^{-}, так как между пластинами их направления совпадают.

$$\mathrm{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{26}$$

Рис.6 График зависимости





2.1 Рассмотрим вначале поле между пластинами конденсатора. Проведем вспомогательные конические поверхности (рис.7а), ограничивающие телесные углы, которые стягиваются пластинами конденсатора.

Тогда положительной пластине соответствует угол полураствора конуса α , а отрицательной – β .

Определим косинусы этих углов для расчета телесных углов:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}, \cos\beta = \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \quad (27)$$

И соответствующие телесные углы:

$$\Omega_\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}\right) \quad (28)$$

$$\Omega_\beta = 2\pi(1 - \cos\beta) = 2\pi\left(1 - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}}\right) \quad (29)$$

Проекции векторов напряженности на ось Oz :

$$E_z^+ = -\frac{\sigma\Omega_\alpha}{4\pi\varepsilon_0}, \qquad E_z^- = -\frac{\sigma\Omega_\beta}{4\pi\varepsilon_0} \quad (30)$$

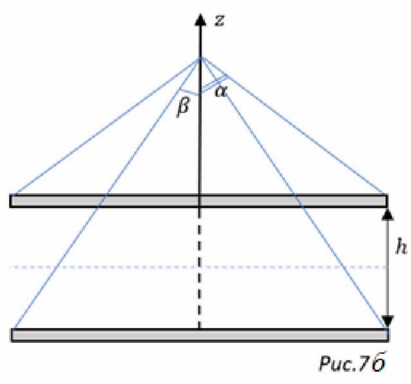
По принципу суперпозиции:

$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(2 - \frac{\frac{h}{2} - z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}} - \frac{\frac{h}{2} + z}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}}\right) \quad (31)$$

Приведем аналогичные результаты для поля снаружи конденсатора (рис.7б):

$$\cos\alpha = \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}, \cos\beta = \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} \quad (32)$$

$$\Omega_\alpha = 2\pi(1 - \cos\alpha) = 2\pi\left(1 - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}\right) \quad (33)$$



$$\Omega_\beta = 2\pi(1 - \cos\beta) = 2\pi\left(1 - \frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}}\right) \qquad (34)$$

$$E_z(z) = E_z^+ + E_z^- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z + \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} + z\right)^2}} - \frac{z - \frac{h}{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2} - z\right)^2}}\right) \qquad (35)$$

Отметим, что на больших расстояниях найденное поле соответстсвует полю точечного диполя, т.е. убавает обратно пропорционально кубу расстояния

Схематический график в этом случае имеет вид

РисГрафик

2.1. Относительная погрешность:

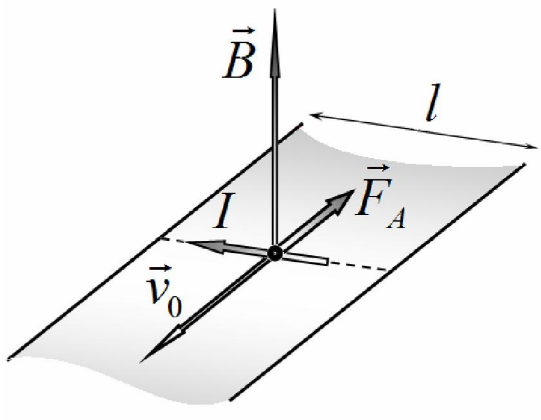
$$\varepsilon = \frac{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - |E(0)|}{|E(0)|} \cdot 100\% \qquad (37)$$

Таблица. Результат расчета относительной погрешности определения напряженности электростатического поля внутри конденсатора:

$\frac{R}{h}$	$\varepsilon, \%$
1	81
10	5,3
100	0,50

Задача 11-3. Электрогенератор и электродвигатель

Часть 1. Генератор



1.1 Пусть в некоторый момент времени скорость ленты равна v_0. Тогда со стороны магнитного поля на заряженные частицы (носители тока) в проводящей ленте действует сила Лоренца, модуль которой равен

$$F_Л = qv_0B \qquad (1)$$

Эта сила приводит к возникновению электрического тока, который в соответствии с «правилом левой руки» направлен перпендикулярно ленте, как показано на рисунке. Сила Лоренца в данном случае выступает в роли сторонней силы, ЭДС которой равна

$$\varepsilon = \frac{F_Л l}{q} = v_0 Bl. \qquad (2)$$

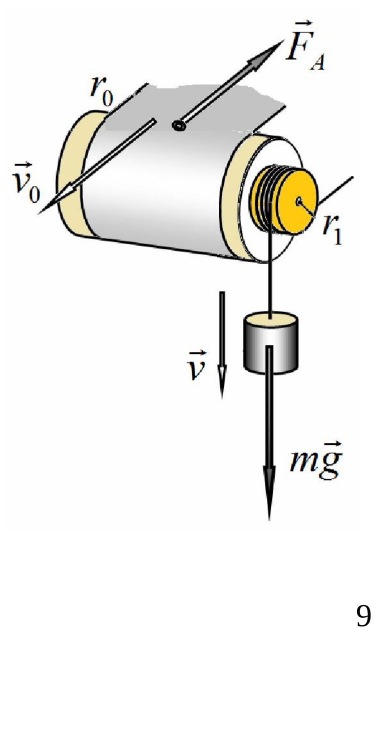
Сила возникающего тока по закону Ома равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{v_0 Bl}{R}. \qquad (3)$$

Этот взаимодействует с магнитным полем, что приводит к появлению силы Ампера $\vec{F}_A$, которая направлена в сторону, противоположную скорости движения ленты (опять «правило левой руки»). Модуль этой силы равен

$$F_A = IBl = \frac{B^2 l^2}{R} v_0. \qquad (4)$$

Таким образом, в процессе движения ленты возникает сила, направленная противоположная ее скорости и пропорциональная ей. Эта сила подобна силе вязкого трения (ее часто называют «магнитной вязкостью»). Поэтому на ленту действует постоянная сила, обусловленная силой тяжести подвешенного груза, и сила вязкого трения. В результате действия этих сил скорость ленты стабилизируется и достигает некоторого постоянного значения.



1.2.1 Для определения скорости установившегося движения рассмотрим силы, действующие на цилиндр с валом. Это найденная сила Ампера и сила натяжения нити. Когда лента и груз движутся с постоянными скоростями, сила натяжения нити равна силе тяжести $m\vec{g}$, действующей на груз. Так как цилиндр вращается с постоянной скоростью, то суммарный момент сил, действующих на него равен нулю, поэтому справедливо соотношение

$$mgr_1 = F_A r_0 \qquad (5)$$

Используя формулу (4) для силы Ампера, получим выражение

$$mgr_1 = \frac{B^2 l^2}{R} v_0 r_0. \qquad (4)$$

Из которого находим скорость движения ленты

$$v_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2} \frac{r_1}{r_0}. \qquad (5)$$

Скорость опускания груза найдем из очевидного соотношения

$$\frac{v_0}{r_0} = \frac{v}{r_1} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{r_1}{r_0} v_0 = \frac{mgR}{B^2 l^2}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2. \qquad (5)$$

1.2.2 Для расчета ЭДС воспользуемся формулой (2) и найденным значением скорости движения ленты (5):

$$\varepsilon = v_0 Bl = \frac{mgR}{Bl}\frac{r_1}{r_0}. \qquad (6)$$

Сила тока рассчитывается по закону Ома (3):

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{mg}{Bl}\frac{r_1}{r_0}. \qquad (7)$$

Интересно отметить, что сила тока в цепи нагрузки не зависит от ее сопротивления и пропорциональна массе подвешенного груза.

1.2.3 Мощность тока в нагрузке рассчитывается по закону Джоуля – Ленца:

$$P = I^2 R = \left(\frac{mg}{Bl}\frac{r_1}{r_0}\right)^2 R. \qquad (8)$$

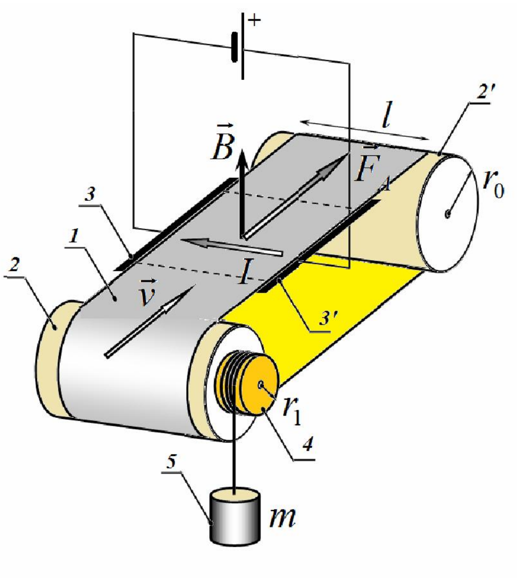
1.2.4 Данный генератор преобразует потенциальную энергию опускающегося груза в теплоту, выделяющуюся на резисторе Поэтому КПД установки можно определить как отношение мощности, выделяющейся на нагрузке, к мощности силы тяжести $P_0 = mgv$:

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{\left(\frac{mg}{Bl}\frac{r_1}{r_0}\right)^2 R}{mg \cdot \frac{mgR}{B^2 l^2}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^2} = 1 = 100\%. \qquad (9)$$

Комментарий к решению Части 1.

Могут вызывать недоумение полученные зависимости: ЭДС, сила тока, мощность генератора возрастают при уменьшении индукции магнитного поля!? А что будет, если «убрать» магнитное поле $B = 0$? Однако в решении рассматривается установившийся режим. В этом режиме при $B \to 0$ (в рамках сделанных предположений) скорости установившегося движения стремятся к бесконечности, иными словами рассматриваемый стационарный режим не возникает.

Часть 2. Электродвигатель.



Электродвигатель и электрогенератор «взаимно обратные» машины, поэтому расчет характеристик двигателя проведем без излишних (повторяющихся) комментариев.

2.1 В данном случае сила Ампера является «движущей» в механическом смысле. Используя правило левой руки не сложно определить необходимое направления тока через ленту и полярность подключения источника. Результат – показан на рисунке.

2.2 Теперь запишем уравнения, описывающие работу двигателя.

Сила Ампера, тянущая ленту:

$$F_A = IBl. \qquad (10)$$

Сила тока в цепи

$$I = \frac{\varepsilon_\Sigma}{R} = \frac{\varepsilon_0 - v_0 Bl}{R}. \qquad (11)$$

Условие равенства моментов сил на валу:

$$mgr_1 = F_A r_0. \qquad (12)$$

Уравнение для определения скорости движения ленты (просто подстановки):

$$\frac{\varepsilon_0 - v_0 Bl}{R} Blr_0 = mgr_1. \qquad (13)$$

Формула для установившейся скорости (решение уравнения (13)):

$$v_0 = \frac{\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl} \qquad (14)$$

Скорость подъема груза:

$$\frac{v_0}{r_0} = \frac{v}{r_1} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{r_1}{r_0} v_0 = \frac{\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl} \frac{r_1}{r_0} \qquad (15)$$

Таким образом, мы показали, что существует стационарный режим.

2.3 Рассчитаем требуемые характеристики двигателя.

2.3.1 Минимальное значение ЭДС источника $\varepsilon_{0\min}$, при которой груз начнет подниматься, находим из условия, что скорость подъема груза становится больше нуля:

$$\varepsilon_{0\min} = \frac{mgRr_1}{Blr_0}. \qquad (16)$$

2.3.2 Сила тока I через источник определяем с помощью формул (11) и (14):

$$I = \frac{\varepsilon_\Sigma}{R} = \frac{\varepsilon_0 - v_0 Bl}{R} = \frac{\varepsilon_0 - \left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{R} = \frac{mgr_1}{Blr_0} \qquad (17)$$

Сравните с формулой (6)!

2.3.3 Скорость подъема груза определена ранее – формула (15).

2.3.4 Механическая мощность P, развиваемая двигателем:

$$P = mgv = mg\frac{\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl}\frac{r_1}{r_0} = \frac{mg}{Bl}\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)\frac{r_1}{r_0}. \qquad (18)$$

2.3.5 КПД двигателя определяется как отношение механической мощности, развиваемой двигателем, к мощности источника тока $P_0 = \varepsilon I$:

$$\eta = \frac{mgv}{\varepsilon_0 I} = \frac{mg\frac{\left(\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}\right)}{Bl}\frac{r_1}{r_0}}{\varepsilon_0 \frac{mgr_1}{Blr_0}} = \frac{\varepsilon_0 - \frac{mgRr_1}{Blr_0}}{\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{0\min}}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{\varepsilon_{0\min}}{\varepsilon_0}. \qquad (19)$$

КПД оказался меньше 1, так как имеются потери, связанные с выделением теплоты на источнике, обладающим внутренним сопротивлением R. При $R = 0$ КПД достигает единицы.