

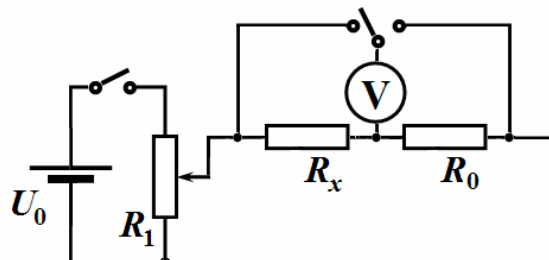
Задача 9-1. Термодатчик

Часть 1. Сопротивление при комнатной температуре.

1.1 Электрическая схема, позволяющая измерить требуемую зависимость, является традиционной и показана на рисунке.

Здесь $R_0 = 2,0 \text{ кОм}$, R_x - исследуемое сопротивление (термодатчик).

Сила тока через термодатчик рассчитывается по измеренному напряжению на резисторе R_0 с помощью формулы

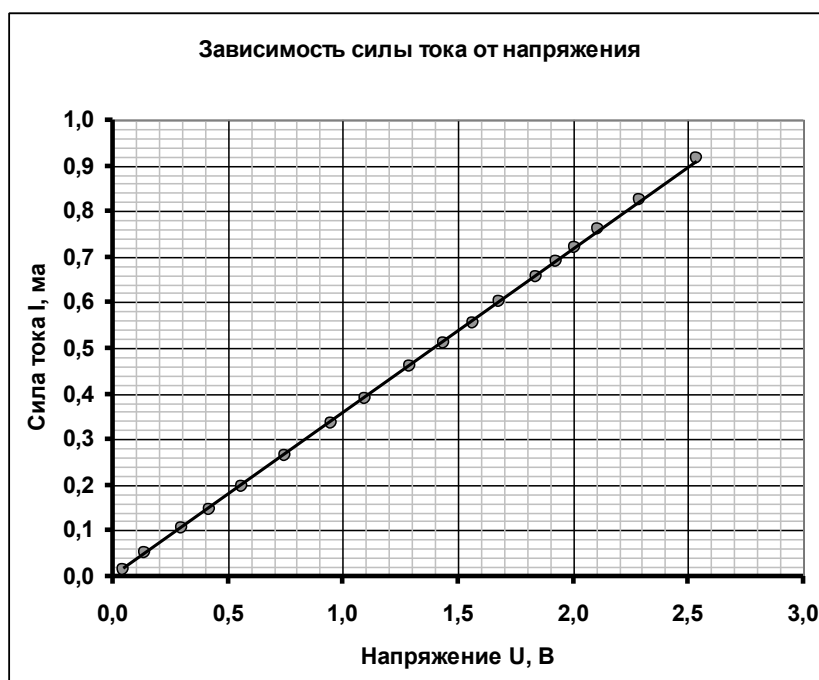


$$I = \frac{U_0}{R_0}. \quad (1)$$

1.2 Результаты измерений зависимости силы тока от приложенного напряжения приведены в Таблице 1.

Таблица 1.

$U_x, \text{ В}$	$U_0, \text{ В}$	$I_x, \text{ мА}$
2,54	1,83	0,915
2,29	1,65	0,825
2,11	1,52	0,760
2,01	1,44	0,720
1,93	1,38	0,690
1,84	1,31	0,655
1,68	1,20	0,600
1,57	1,11	0,555
1,44	1,02	0,510
1,29	0,92	0,460
1,10	0,78	0,390
0,95	0,67	0,335
0,75	0,53	0,265
0,56	0,39	0,195
0,42	0,29	0,145
0,30	0,21	0,105
0,14	0,10	0,050
0,05	0,03	0,015



1.3 График полученной зависимости показан на рисунке.

1.4 Полученная зависимость является прямо пропорциональной; это означает, что сопротивление датчика не зависит от приложенного напряжения.

1.5 Величина сопротивления точнее всего может быть найдена по наклону графика.

Расчет¹ по МНК дает следующее значение сопротивления

$$R = (2,77 \pm 0,02) \text{ кОм}.$$

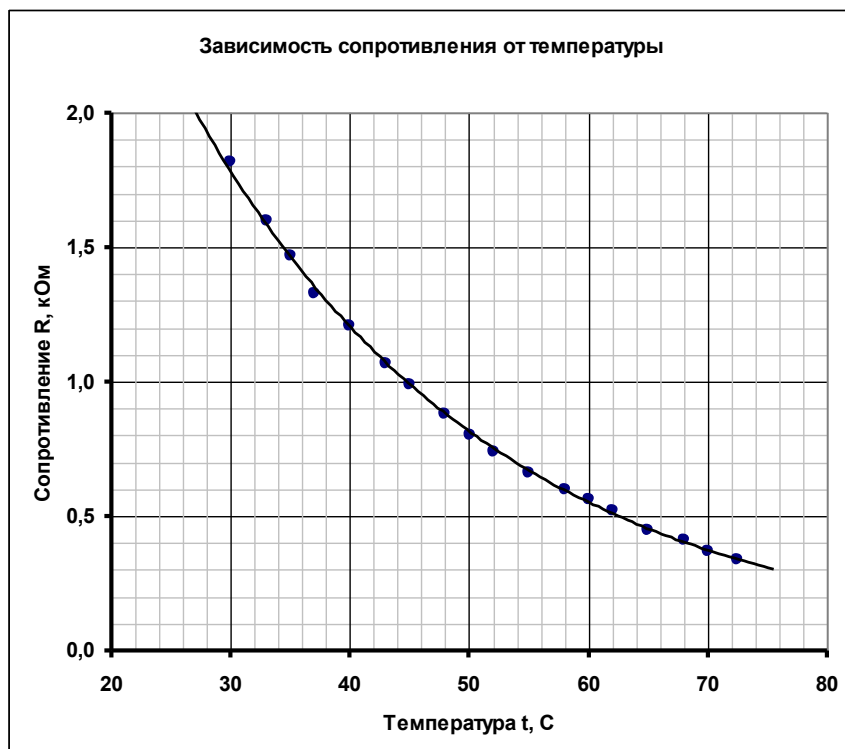
¹ Расчет графическим методом также допустим.

Часть 2. Сопротивление при повышенной температуре.

2.1 – 2.2 Результаты измерений зависимости сопротивления датчика от температуры приведены в Таблице 2 и показаны на графике.

Таблица 2.

$t, ^\circ\text{C}$	$R, \text{кОм}$	$1/t$
72,5	0,34	0,014
70,0	0,37	0,014
68,0	0,41	0,015
65,0	0,45	0,015
62,0	0,52	0,016
60,0	0,56	0,017
58,0	0,60	0,017
55,0	0,66	0,018
52,0	0,74	0,019
50,0	0,80	0,020
48,0	0,88	0,021
45,0	0,99	0,022
43,0	1,07	0,023
40,0	1,21	0,025
37,0	1,33	0,027
35,0	1,47	0,029
33,0	1,60	0,030
30,0	1,82	0,033



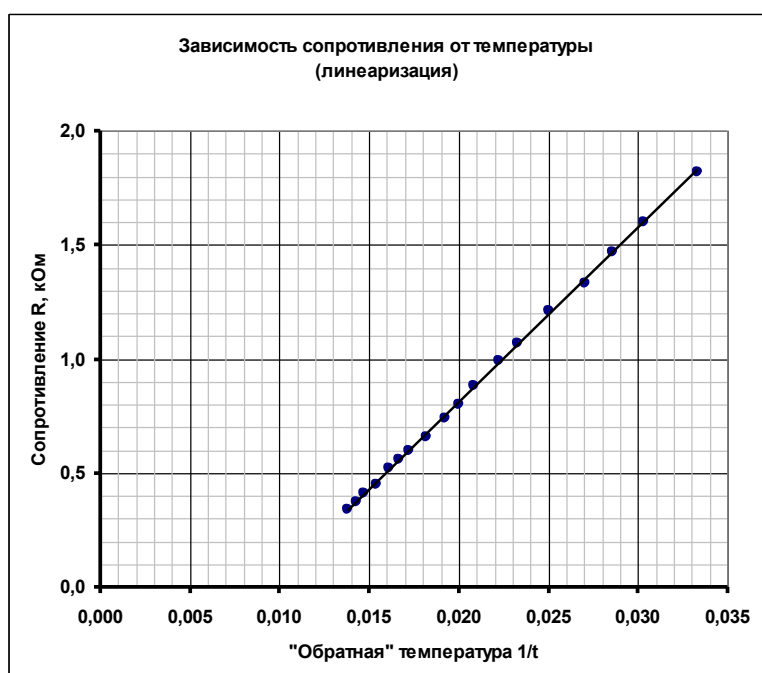
2.3 Указанную в условии задачи формулу можно записать в виде

$$R = \frac{a + bt^\circ}{t^\circ} = \frac{a}{t^\circ} + b, \quad (1)$$

из которого следует, что зависимость сопротивление от величины, обратной температуре, должна быть линейной. График такой зависимости показан на следующем рисунке. Линейность полученного графика подтверждает, что приведенная формула правильно описывает полученную зависимость. Расчет параметров этой зависимости по МНК дает следующие значения

$$a = (78,4 \pm 0,8) \frac{\text{кОм}}{\text{К}}$$

$$b = -(0,72 \pm 0,02) \text{кОм}$$



Часть 3. Конструирование.

3.1 Схема для измерения температуры очевидна и показана на рисунке. Если выставить значение сопротивления

$$R_0 = -b = 0,72 \text{ кОм},$$

то зависимость напряжения на этом резисторе от температуры будет иметь вид

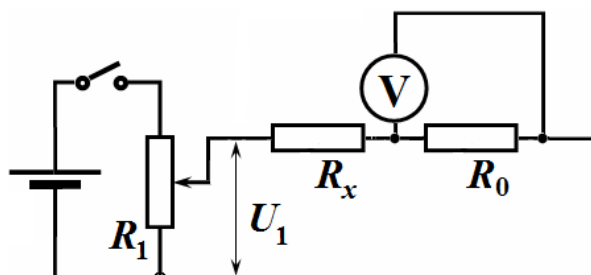
$$U = \frac{U_1}{\frac{a}{t} + (R_0 - b)} R_0 = \frac{U_1 b}{a} t. \quad (2)$$

Теперь с помощью потенциометра R_1 следует выставить такое напряжение, чтобы выполнялось условие

$$\frac{U_1 b}{a} = 10 \Rightarrow U_1 = \frac{78,4}{0,72} = 108 \text{ мВ}. \quad (4)$$

В этом случае показания вольтметра будут в 10 раз больше температуры датчика.

3.2 Тестирование схему подтверждает проделанные расчеты.



Задача 9-2. Изучение теплового расширения.

Результаты измерений в данной задаче сильно зависят от параметров прибора, который используется в данной установке, поэтому кратко остановимся только на качественном описании наблюдаемых эффектов.

Часть 1. Открытая трубка.

При открытом нижнем конце трубки при ее опускании в горячую воду в трубке остается воздух. По мере остывания воды объем воздуха в трубке уменьшается – воды заходит в трубку снизу. При этом уменьшается сила Архимеда, действующая на поплавок. Поэтому **поплавок начинает погружаться!**

Пусть высота столбика воздуха в трубке уменьшилась на величину ΔH . При этом сила Архимеда также уменьшится на величину

$$\Delta F_A = \rho g \Delta V = \rho g S \Delta H, \quad (1)$$

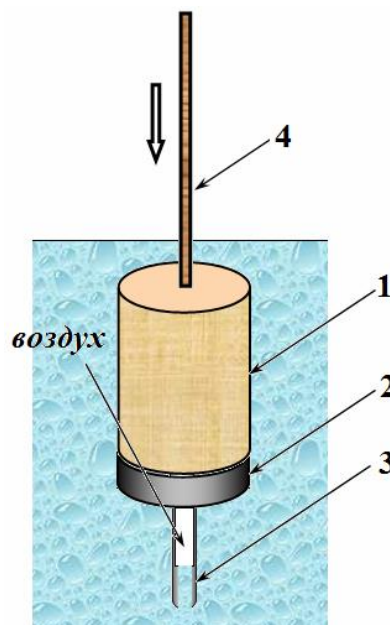
Здесь S - площадь поперечного сечения трубки, ρ - плотность воды.

Этому уменьшению выталкивающей силы должно компенсироваться увеличением силы Архимеда вследствие погружения стержня 4 (вместе с поплавком) на величину

$$\Delta F_A = \rho g s \Delta h \quad (2)$$

Здесь s - площадь поперечного сечения стержня. Приравняв эти выражения, получим

$$\Delta h = \frac{S}{s} \Delta H = \left(\frac{D}{d} \right)^2 \Delta H, \quad (3)$$



Где D, d - диаметры трубки и стержня, соответственно. Проще эту формулу получить из условия того, что объем погруженной части поплавок в состоянии равновесия остается неизменным.

Величина ΔH связана с изменением температуры соотношением

$$\Delta H = H_0(1 + \alpha\Delta t). \quad (4)$$

Где α - коэффициент теплового расширения воздуха. Следовательно, зависимость Δh глубины погружения от температуры линейная. Коэффициент наклона этой зависимости равен

$$K_1 = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \alpha H_0 \left(\frac{D}{d} \right)^2. \quad (5)$$

По экспериментальному значению этого коэффициента наклона можно рассчитать коэффициент теплового расширения воздуха. Отметим, что при изменении температуры изменяется и плотность воды. Но так как коэффициент теплового расширения воздуха значительно больше коэффициента теплового расширения воды, то последним можно пренебречь.

Часть 2. Закрытая трубка.

Когда трубка закрыта, объем поплавок можно считать неизменным (тепловое расширение твердых тел еще меньше, чем тепловое расширение воды). Поэтому основным фактором, влияющим на положение поплавок, является изменение плотности воды. Так как при остывании плотность воды возрастает, то в *этом эксперименте поплавок всплывает!*

Учитывая постоянство силы Архимеда (численно равно весу поплавок), можно записать

$$(\rho_0 + \Delta\rho)g(V_0 + \Delta V) = \rho_0 g V_0 \quad (6)$$

Откуда следует

$$\Delta\rho V_0 + \rho_0 s \Delta h = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta h = -\frac{V_0}{\rho_0 s} \Delta\rho \quad (7)$$

Здесь $s\Delta h = \Delta V$ - изменение объема погруженной части поплавок. Таким образом, коэффициент наклона зависимости глубины погружения от температуры в данном случае равен

$$K_2 = \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{V_0}{\rho_0 s} \frac{\Delta\rho}{\Delta t} \quad (2)$$

И определяется изменением плотности воды при изменении температуры.

Задача 10-1. Удержание и сдвиг

Часть 1. Удержание

1.1. Обозначим силы, действующие на дощечку и грузы (рис.3). Запишем условие равновесия системы тел «дощечка – грузы» для моментов сил. (Сила реакции опоры и сила трения, действующие на дощечку со стороны поверхности стола в точке А на рисунке не показаны, так моменты этих сил относительно данной точки равны нулю).

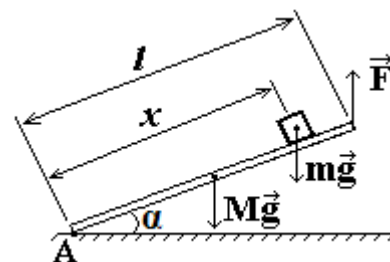


Рисунок 3.

$$Fl \cos \alpha = Mg \frac{l}{2} \cos \alpha + mgx \cos \alpha \quad (1).$$

Из (1) получаем

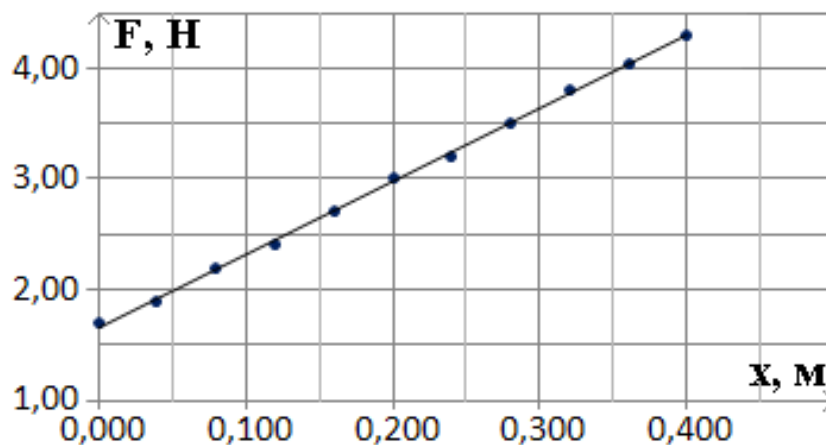
$$F = \frac{1}{2} Mg + \frac{mg}{l} x \quad (2).$$

1.2. Изначально следует выбрать динамометр, которым будет измеряться сила F . Чтобы выполнить условие минимизации погрешности, следует выбрать динамометр с пределом измерения 5,0Н, так как данный динамометр будет задействован почти на всю шкалу. (Динамометром с пределом измерения 2,5Н нельзя будет выполнить измерения во всём диапазоне изменения величины x , а динамометр с пределом измерения 10,0Н будет задействован только на половину шкалы). Для более удобного и быстрого измерения величины x мерную ленту следует прикрепить скотчем вдоль поверхности доски. (Моментом силы тяжести, действующим на мерную ленту, по сравнению с моментами сил тяжести, действующими на дощечку и грузы, можно пренебречь). Динамометр крепим в лапке штатива, дощечку с помощью петли цепляем за крючок динамометра. Угол наклона дощечки подбираем таким, чтобы грузы ни в одном положении не скользили по дощечке. Результаты эксперимента представлены в таблице 1 и графике 1.

Таблица 1.

х, м	F, Н
0,000	1,70
0,040	1,90
0,080	2,20
0,120	2,40
0,160	2,70
0,200	3,00
0,240	3,20
0,280	3,50
0,320	3,80
0,360	4,05
0,400	4,30

График 1. Зависимость $F(x)$



Результаты эксперимента подтверждают линейную зависимость $F(x)$.

1.3. Зависимость $F(x)$ имеет вид:

$$F = b + kx \quad (3).$$

Сравнивая (3) и (2) получим:

$$b = \frac{1}{2}Mg \quad (4), \quad k = \frac{mg}{l} \quad (5).$$

Значения коэффициентов b и k определим по графику зависимости $F(x)$:

b – координата пересечения усредняющей прямой оси F , k – тангенс угла наклона усредняющей прямой к оси x .

$$\langle b \rangle = 1,65\text{Н}, \quad \langle k \rangle = 6,61 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Из (5) получим:

$$\langle m \rangle = \frac{\langle k \rangle \cdot \langle l \rangle}{\langle g \rangle} \quad (6).$$

Длину дощечки измеряем мерной лентой: $l = (45,2 \pm 0,1)\text{см}$.

Подставляя значения соответствующих величин в (6) получим:

$$\langle m \rangle = \frac{6,61 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \cdot 0,452\text{м}}{9,813 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}} = 0,304\text{кг} = \mathbf{304\text{г}}.$$

1.4. Абсолютную и относительную погрешность определения массы груза m определим следующим образом:

$$\varepsilon_m = \sqrt{\left(\frac{\Delta k}{\langle k \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{\langle l \rangle}\right)^2} \quad (7),$$

$$\Delta m = \varepsilon_m \cdot \langle m \rangle \quad (8).$$

Относительной погрешностью ε_g пренебрегаем, так как ускорение свободного падения задано с четырьмя значащими цифрами и относительная погрешность данной величины пренебрежимо мала по сравнению с относительными погрешностями величин k и l .

Абсолютная погрешность измерения длины дощечки мерной лентой $\Delta l = 1\text{мм}$. Абсолютную погрешность коэффициента k определим простым графическим способом.

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2} = \frac{6,67 \frac{\text{Н}}{\text{м}} - 6,50 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{2} = 0,085 \frac{\text{Н}}{\text{м}} \approx 0,09 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\left(\frac{0,09 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}{6,61 \frac{\text{Н}}{\text{м}}}\right)^2 + \left(\frac{1\text{мм}}{452\text{мм}}\right)^2} = 0,014 = 1,4\%,$$

$$\Delta m = 0,014 \cdot 304\text{г} = 4\text{г}.$$

Окончательно

$$m = (\langle m \rangle \pm \Delta m) = \mathbf{(304 \pm 4)\text{г}}.$$

Часть 2. Сдвиг

2.1. Обозначим силы, действующие на брусок (рис.4) и дощечку (рис.5).

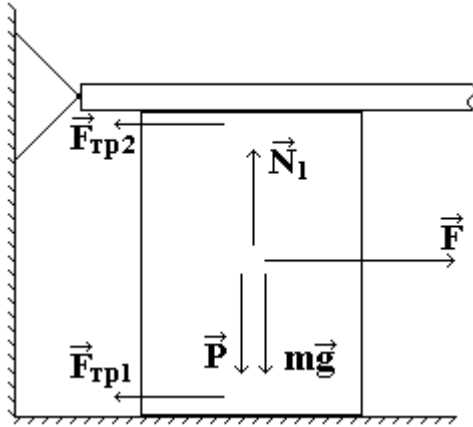


Рисунок 4.

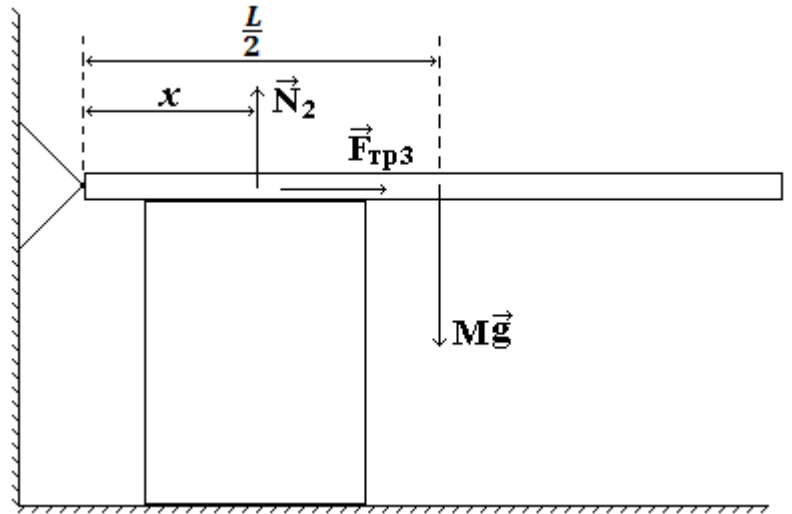


Рисунок 5.

Здесь: $m\vec{g}$ – сила тяжести, действующая на брусок; \vec{P} – вес дощечки, действующий на брусок; $\vec{F}_{\text{тр}1}$ – сила трения, действующая на брусок со стороны листа бумаги; $\vec{F}_{\text{тр}2}$ – сила трения, действующая на брусок со стороны дощечки; \vec{N}_1 – сила нормальной реакции опоры, действующая на брусок со стороны стола; \vec{F} – сила, действующая на брусок со стороны динамометра; $\vec{F}_{\text{тр}3}$ – сила трения, действующая на дощечку со стороны бруска; \vec{N}_2 – сила нормальной реакции опоры, действующая на дощечку со стороны бруска; $M\vec{g}$ – сила тяжести, действующая на дощечку.

Будем считать, что в момент сдвига выполняется условие:

$$F = F_{\text{тр}1} + F_{\text{тр}2} \quad (9),$$

где

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 \quad (10), \quad F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 \quad (11).$$

\vec{N}_2 определим из правила моментов сил, действующих на дощечку:

$$N_2 x = Mg \frac{L}{2} \quad (12),$$

Моментом силы $\vec{F}_{\text{тр}3}$ пренебрегаем, так как её плечо много меньше, чем плечи сил \vec{N}_2 и $M\vec{g}$. Из (12) получим

$$N_2 = Mg \frac{L}{2x} \quad (13).$$

Подставляя (13) в (11), получим:

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 Mg \frac{L}{2x} \quad (14).$$

Для \vec{N}_1 , \vec{P} , и $m\vec{g}$ выполняется условие:

$$N_1 = mg + P \quad (15).$$

По третьему закону Ньютона

$$P = N_2 \quad (16).$$

С учетом (13), получим:

$$N_1 = mg + Mg \frac{L}{2x} \quad (17).$$

Подставляя (17) в (10) получим:

$$F_{\text{тр1}} = \mu_1 mg + \mu_1 Mg \frac{L}{2x} \quad (18).$$

Подставляя (18) и (14) в (9) после преобразований окончательно получим:

$$F = \mu_1 mg + \frac{(\mu_1 + \mu_2)MgL}{2} \cdot \frac{1}{x} \quad (19).$$

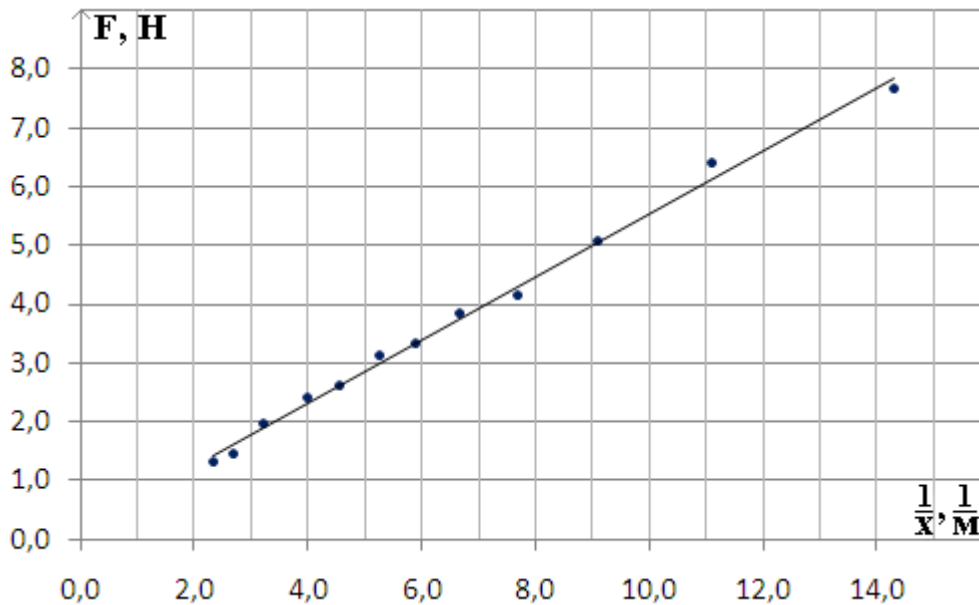
2.2. Массу бруска и доски измеряем на электронных весах. Длину доски измеряем мерной лентой. Масса бруска $m = (93,2 \pm 0,1)\text{г}$, масса доски $M = (343,1 \pm 0,1)\text{г}$, длина доски $L = (45,2 \pm 0,1)\text{см}$.

2.3. Силу F , при малых значениях x , измеряем динамометром с пределом измерения 10,0Н. С увеличением x , сила F уменьшается. Когда значения силы станут меньше 5,0Н, используем динамометр с пределом измерения 5,0Н, при значениях силы меньше 2,5Н используем динамометр с пределом измерения 2,5Н. Расстояние x измеряем мерной лентой. Для удобства измерения x мерную ленту крепим на верхней поверхности дощечки скотчем. Случайной погрешностью измерения силы F в данном эксперименте пренебрегать нельзя, поэтому для каждого значения x проводим пять повторных измерений силы F . Результаты эксперимента представлены в таблице 2.

Таблица 2. Экспериментальные данные зависимости $F(x)$

Повторные измерения силы $F, \text{Н}$					$\langle F \rangle, \text{Н}$	$X, \text{м}$	$1/X, 1/\text{м}$
F_1	F_2	F_3	F_4	F_5			
7,6	7,8	7,6	7,5	7,8	7,7	0,070	14
6,8	6,2	6,4	6,4	6,2	6,4	0,090	11
5,3	4,9	5,2	5,2	4,8	5,1	0,11	9,1
4,0	4,4	3,8	4,3	4,2	4,1	0,13	7,7
3,8	4,0	3,8	3,6	4,0	3,8	0,15	6,7
3,3	3,6	3,2	3,3	3,2	3,3	0,17	5,9
3,2	3,0	3,1	3,1	3,2	3,1	0,19	5,3
2,8	2,5	2,6	2,6	2,6	2,6	0,22	4,6
2,5	2,4	2,3	2,6	2,3	2,4	0,25	4,0
1,90	2,00	1,85	2,00	2,10	2,0	0,31	3,2
1,55	1,35	1,40	1,45	1,50	1,5	0,37	2,7
1,25	1,35	1,30	1,30	1,35	1,3	0,43	2,3

График 1. Зависимость $F(1/x)$



Результаты эксперимента подтверждают, что зависимость $F(x)$ имеет вид:

$$F = b + k \frac{1}{x} \quad (20),$$

$$b = \mu_1 mg \quad (21), \quad k = \frac{(\mu_1 + \mu_2)MgL}{2} \quad (22).$$

2.4. Значения коэффициентов b и k определим по графику зависимости $F(1/x)$:

b – координата пересечения усредняющей прямой оси F , k – тангенс угла наклона усредняющей прямой к оси $1/x$.

$$b = 0,17 \text{ Н}, \quad k = 0,54 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Из (21) получим:

$$\mu_1 = \frac{b}{mg} = \frac{0,17 \text{ Н}}{0,0932 \text{ Г} \cdot 9,813 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}} = 0,19 \quad (23).$$

Из (22) получим:

$$\mu_2 = \frac{2k}{MgL} - \mu_1 = \frac{2 \cdot 0,54 \text{ Н} \cdot \text{м}}{0,3431 \text{ кг} \cdot 9,813 \frac{\text{М}}{\text{с}^2} \cdot 0,452 \text{ м}} - 0,19 = 0,52 \quad (24).$$

Задача 10-2. Закон Пуазейля.

Часть 1. Без воды.

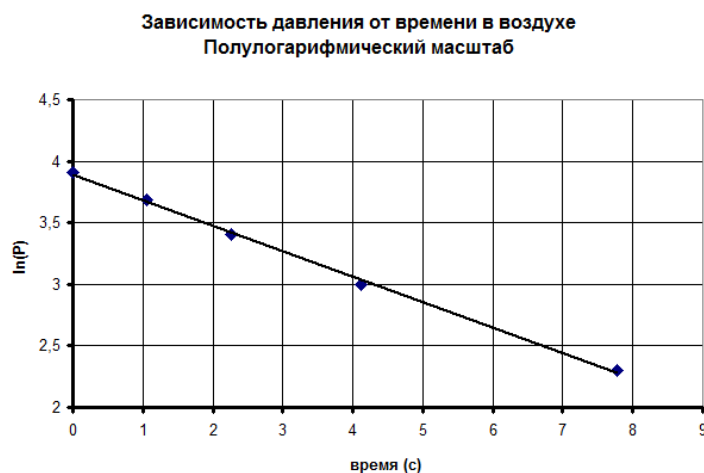
1.1. Результаты измерений зависимости давления в колбе от времени приведены в Таблице 1.

Измерения удобно проводить, исследуя обратную зависимость. То есть, фиксировать времена по достижении определенных значений давления. Кроме того, ввиду кратковременности процесса и заметных ошибок измерения, измерения следует проводить несколько раз, и рассчитывая затем средние значения

Таблица 1

t, c						р, мм рт. ст.	$\langle p_i \rangle$	$(\Delta p / \Delta t)$
1	2	3	4	5	ср. знач			
0	0	0	0	0	0	50	-	-
1,04	1,16	0,96	1,03	1,06	1,05	40	45	9,524
2,26	2,35	2,25	2,24	2,24	2,27	30	35	8,210
4,02	4,18	4,21	4,08	4,11	4,12	20	25	5,400
7,97	7,84	7,71	7,56	7,81	7,78	10	15	2,734

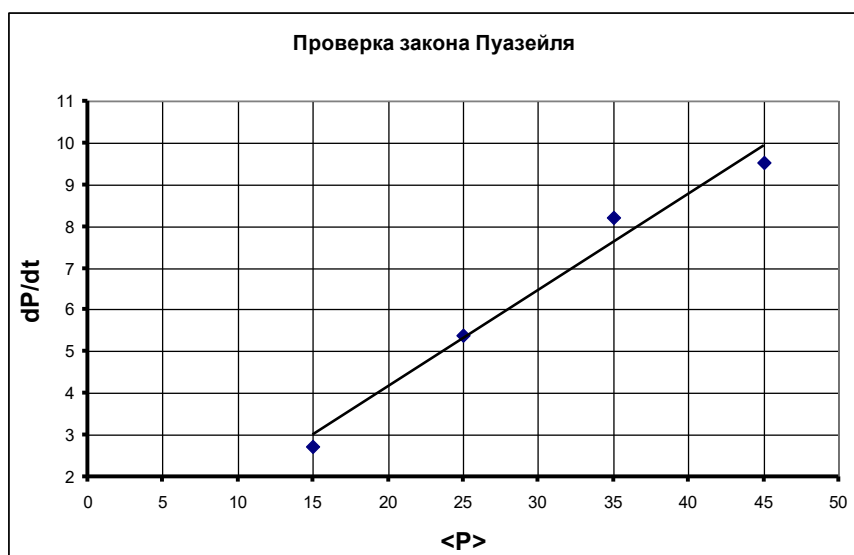
На рисунке представлен график полученной зависимости в обычно и полулогарифмическом масштабе.



Если формула Пуазейля справедлива, то эта зависимость должна быть экспоненциальной. Для проверки этого и построена данная зависимость в полулогарифмическом масштабе.

Линейность полученной зависимости подтверждает применимость формулы Пуазейля.

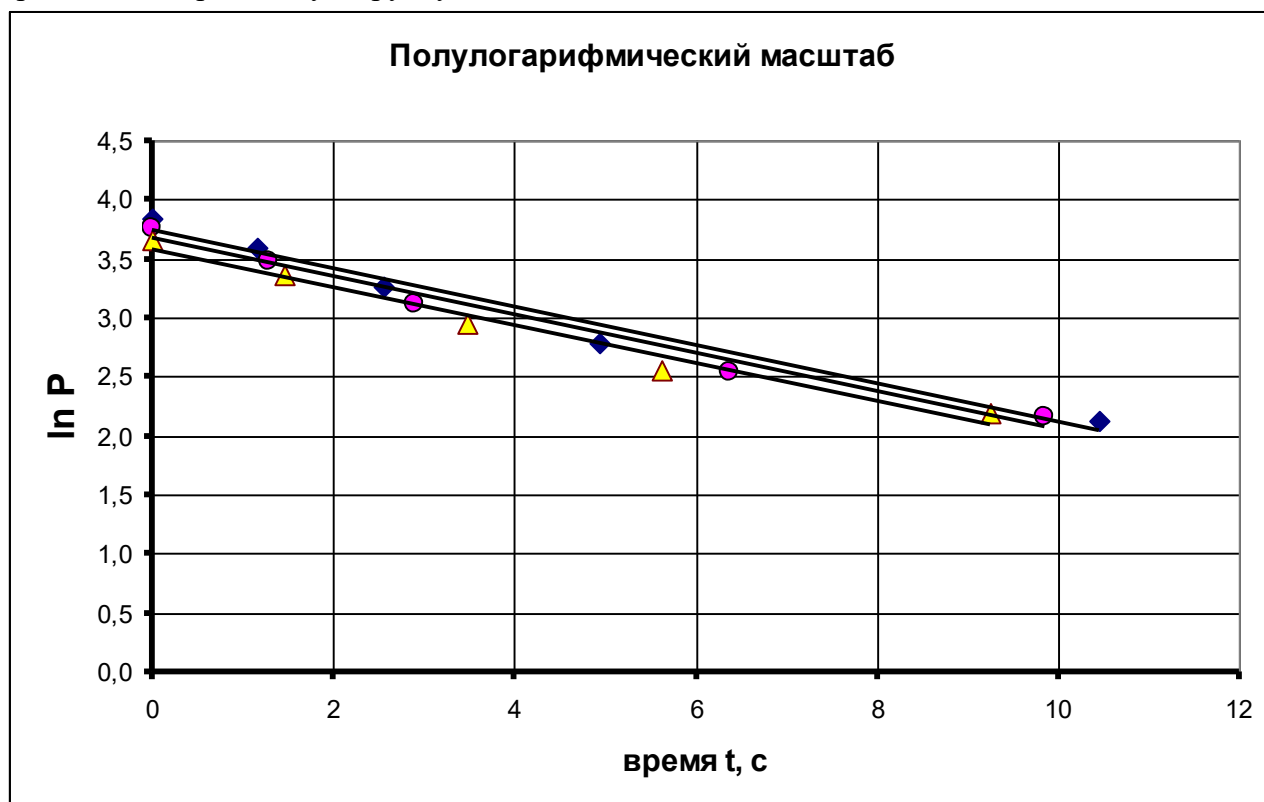
Вторая возможность – построить зависимость $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ от среднего давления на промежутке времени Δt . Эта зависимость также примерно линейна. Однако, в этом случае достоверность вывода о применимости закона менее обоснована, так как



численный расчет производной всегда приводит к большим погрешностям.

Часть 2. Дополнительное давление.

При опускании капилляра в воду измерения проводятся аналогично. Ограничимся экспериментальными данными, приведенными в виде графика в полулогарифмическом масштабе. Очевидно, что при построении этого графика следует при расчете разности давлений на концах трубки следует вычесть гидростатическое давление воды на глубине погружения. Полученные зависимости являются линейными и практически совпадающими. Это еще раз подтверждает применимость формулы Пуазейля для расхода воздуха при его протекании через тонкую трубку.



Одинаковый наклон графика говорит о постоянстве коэффициента G

Для расчета этого коэффициента сначала запишем уравнение закона Бойля-Мариотта из которого выразим связь между изменением объема (объем вышедшего газа) и изменением давления в трубке

$$PV = const \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = -\frac{\Delta V}{V_0}. \quad (1)$$

Величина расхода газа определяется формулой

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = -V_0 \left(\frac{1}{P} \frac{\Delta P}{\Delta t} \right) \quad (2)$$

Сравнивая с формулой Пуазейля, находим значение коэффициента пропорциональности

$$G = -\frac{V_0}{P_0} \left(\frac{1}{P} \frac{\Delta P}{\Delta t} \right). \quad (3)$$

Величина $\left(\frac{1}{P} \frac{\Delta P}{\Delta t} \right)$ может быть определена по наклону приведенных графиков.

Задача 11-1. Магнитные взаимодействия.

Часть 1. Влияние магнитного поля Земли.

1.1 Результаты трех измерений периода колебаний следующие

T_{01}, c	T_{02}, c	T_{03}, c	$\langle T_0 \rangle, c$
8,860	8,985	8,680	8,842

Из данных следует, что случайная погрешность заметно превышает приборную. Для оценки погрешности применима любая из формул

а) самая правильная ($t_{n,p}$ - коэффициент Стьюдента):

$$\Delta T = t_{n,p} \sqrt{\frac{\sum_k (T_{0k} - \langle T_0 \rangle)^2}{n(n-1)}} = 0,4c \quad (1)$$

б)

$$\Delta T = 2 \sqrt{\frac{\sum_k (T_{0k} - \langle T_0 \rangle)^2}{n(n-1)}} = 0,18c. \quad (2)$$

в)

$$\Delta T = \sqrt{\frac{\sum_k (T_{0k} - \langle T_0 \rangle)^2}{n}} = 0,13c \quad (3)$$

г)

$$\Delta T = \frac{\sum_k |T_{0i} - \langle T_0 \rangle|}{n} = 0,11c \quad (4)$$

В дальнейшем будем использовать оценку (2)

Таким образом, измеренное значение периода колебаний, обусловленных магнитным полем Земли, равно

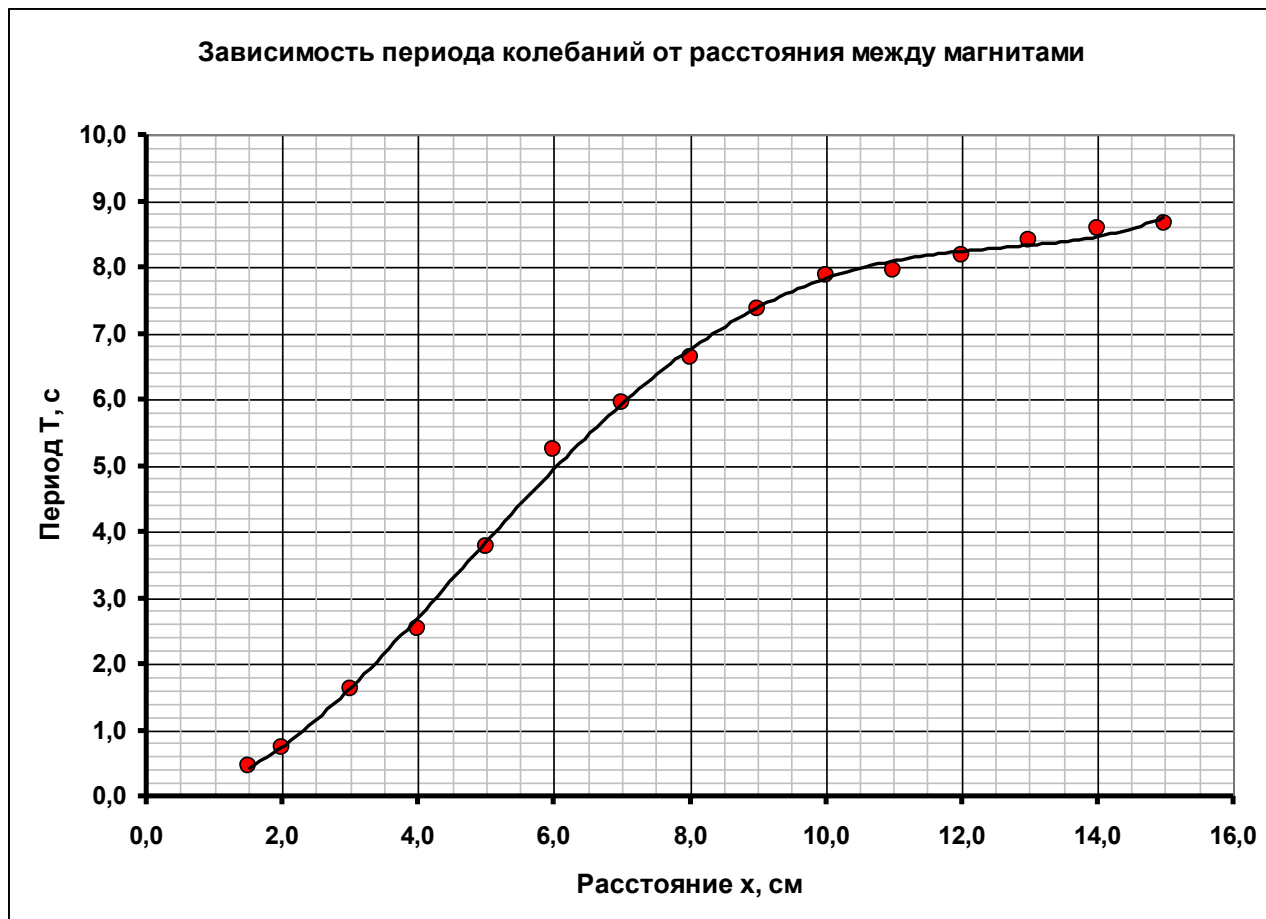
$$T_0 = (8,84 \pm 0,18)c$$

Часть 2. Взаимодействие магнитов.

2.1 Результаты измерений зависимости периода колебаний маятника от расстояния x между магнитами приведены в Таблице 1. Ниже приведен график полученной зависимости.

Таблица 1

$l, \text{ см}$	$T_1, \text{ с}$	$T_2, \text{ с}$	$T_3, \text{ с}$	$T_4, \text{ с}$	$T_5, \text{ с}$	$\langle T \rangle, \text{ с}$	ΔT
1,5	0,451	0,462	0,450	0,458	0,454	0,455	0,004
2,0	0,738	0,743	0,767	0,725	0,739	0,742	0,014
3,0	1,634	1,648	1,580	1,594	1,594	1,610	0,026
4,0	2,548	2,542	2,498	2,520	2,578	2,537	0,027
5,0	3,756	3,794	3,820	3,790	3,750	3,782	0,026
6,0	5,060	5,040	5,170	5,124	5,760	5,231	0,269
7,0	5,958	5,964	5,932	5,952	5,978	5,957	0,015
8,0	6,596	6,700	6,584	6,638	6,598	6,623	0,042
9,0	7,336	7,390	7,397	7,340	7,322	7,357	0,030
10,0	7,800	7,960	7,970	7,864	7,820	7,883	0,070
11,0	7,997	7,943	7,953	7,900	7,960	7,951	0,031
12,0	8,150	8,197	8,200	8,140	8,170	8,171	0,024
13,0	8,387	8,427	8,436	8,405	8,420	8,415	0,017
14,0	8,620	8,520	8,600	8,580	8,600	8,584	0,034
15,0	8,665	8,610	8,672	8,680	8,678	8,661	0,026



2.2 Для расчета периода колебаний можно воспользоваться двумя подходами. Первый – «динамический». В его рамках следует получить уравнение вида

$$J\varepsilon = -K\varphi, \quad (5)$$

где φ - малый угол поворота маятника, ε - его угловое ускорение, J - константа, определяющая инерционные свойства маятника (момент инерции), $-K\varphi$ - возвращающий момент силы, действующий на маятник. В общем случае момент силы сложным образом зависит от угла поворота $M = f(\varphi)$. Однако при малых колебаниях эту функцию можно приближенно заменить линейной $M = f(\varphi) \approx K\varphi$ и подставить ее в уравнение (5).

Уравнение (5) является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K}}. \quad (6)$$

Второй способ расчета периода, «энергетический» подробно описан в решении теоретической задачи 11-1. Естественно он применим и в данном случае.

Рассмотрим сначала колебания маятника только под воздействием магнитного поля Земли. В этом случае на маятник действует вращательный момент силы, пропорциональный углу поворота маятника (так как магнитное поле можно считать однородным):

$$M_0 = -K_0\varphi \quad (7)$$

где K_0 - постоянная величина, зависящая от индукции магнитного поля и магнитного момента маятника. На рисунке силы \vec{F}_0 - показаны, как условные. Физический смысл имеет действующий момент сил.

Период колебаний в этом случае определяется по формуле

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{K_0}} \quad (8)$$

Рассчитаем теперь момент сил, действующих на маятник, если на расстояниях x расположены притягивающие магниты.

Сила взаимодействия между \vec{F} магнитами является центральной.

Кроме того, можно учитывать

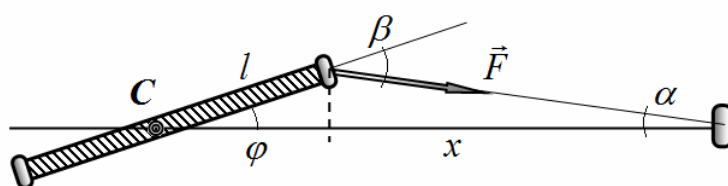
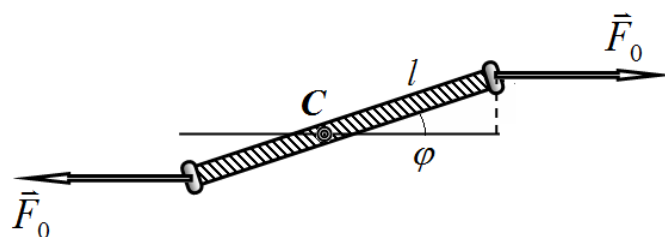
только взаимодействия между ближайшими магнитами, т.к. длина маятника достаточно велика ($2l = 15\text{см}$, l - половина длины стержня). Из рисунка следует, что момент силы, действующий на магнит маятника, равен (все углу отклонения полагаем малыми)

$$M = -lF \sin \beta \approx -lF\beta. \quad (9)$$

Из геометрии следует, что $\beta = \alpha + \varphi$ (внешний угол треугольника) и $\varphi l = \alpha x$ (теорема синусов). Поэтому $\beta = \varphi\left(1 + \frac{l}{x}\right)$, а момент силы выражается формулой

$$M = -lF\left(1 + \frac{l}{x}\right)\varphi. \quad (10)$$

В приближении малых углов модуль силы F можно считать постоянным и равным $F(x)$. Таким образом, уравнение колебаний в этом случае будет иметь вид



$$J\varepsilon = -K_0\varphi - 2l\left(1 + \frac{l}{x}\right)F(x) \cdot \varphi \quad (11)$$

Период колебаний маятника

$$T(x) = 2\pi \sqrt{\frac{J}{K_0 + 2l\left(1 + \frac{l}{x}\right)F(x)}}. \quad (12)$$

Отметим, что основную в данном выводе формулу можно получить более простым, но формальным способом. Пусть энергия взаимодействия магнитов описывается некоторой функцией $U(r)$, где r - расстояние между магнитами. Из теоремы косинусов следует, что $r = \sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)\cos\varphi}$. Производная от потенциальной энергии по углу поворота равна моменту силы $M = -\frac{dU}{d\varphi}$. По правилу вычисления производной от

сложной функции получаем (с учетом формулы $-\frac{dU}{dr} = F(r)$):

$$M = -\frac{dU}{d\varphi} = -\frac{dU}{dr} \frac{dr}{d\varphi} = F(r) \frac{l(l+x)\sin\varphi}{\sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)\cos\varphi}}.$$

С точностью до малых величин первого порядка

$$M = F(r) \frac{l(l+x)\sin\varphi}{\sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)\cos\varphi}} \approx F(x) \frac{l(l+x)}{\sqrt{l^2 + (l+x)^2 - 2l(l+x)}} \varphi = \frac{l(l+x)}{x} F(x)$$

Зависимость силы взаимодействия можно выразить из полученных формул (8) и (12):

$$\begin{cases} \frac{1}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2 J} \left(K_0 + 2l\left(1 + \frac{l}{x}\right)F(x) \right) \\ \frac{1}{T_0^2} = \frac{1}{4\pi^2 J} K_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2} = \frac{l}{2\pi^2 J} \left(1 + \frac{l}{x}\right)F(x).$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя сила взаимодействия может быть рассчитана по периодам колебаний с помощью формулы

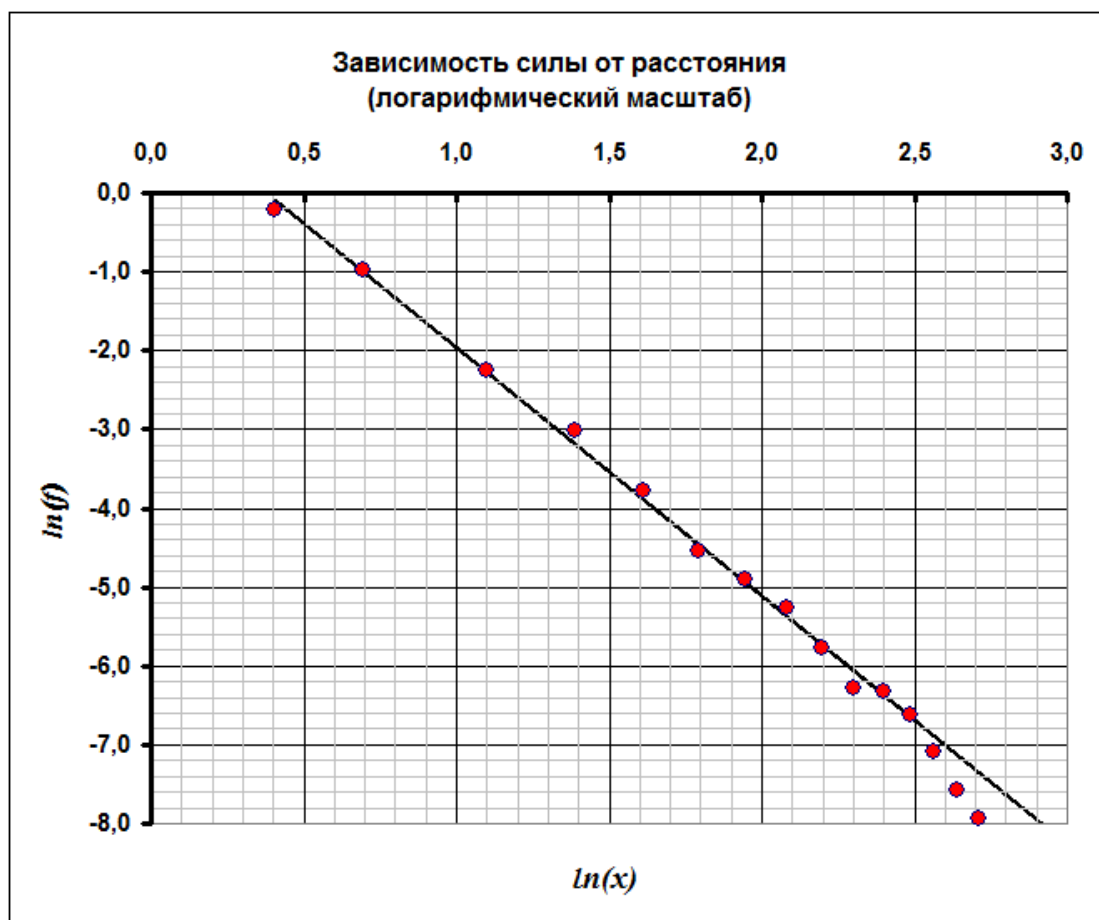
$$f(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{l}{x}\right)} \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2} \right). \quad (13)$$

2.3 – 2.4 В Таблице 2 показаны результаты расчетов зависимости силы взаимодействия магнитов от расстояния $f(x)$, проведенные по формуле (13).

Таблица 2.

$l, \text{см}$	$T, \text{с}$	$f(x)$	$\ln(l)$	$\ln(f)$
1,5	0,455	$8,029 \cdot 10^{-1}$	0,405	-0,219
2	0,742	$3,793 \cdot 10^{-1}$	0,693	-0,969
3	1,610	$1,066 \cdot 10^{-1}$	1,099	-2,239
4	2,537	$4,958 \cdot 10^{-2}$	1,386	-3,004
5	3,782	$2,285 \cdot 10^{-2}$	1,609	-3,779
6	5,231	$1,056 \cdot 10^{-2}$	1,792	-4,551
7	5,957	$7,430 \cdot 10^{-3}$	1,946	-4,902
8	6,623	$5,164 \cdot 10^{-3}$	2,079	-5,266
9	7,357	$3,100 \cdot 10^{-3}$	2,197	-5,776
10	7,883	$1,886 \cdot 10^{-3}$	2,303	-6,273
11	7,951	$1,800 \cdot 10^{-3}$	2,398	-6,320
12	8,171	$1,344 \cdot 10^{-3}$	2,485	-6,612
13	8,415	$8,434 \cdot 10^{-4}$	2,565	-7,078
14	8,584	$5,076 \cdot 10^{-4}$	2,639	-7,586
15	8,661	$3,595 \cdot 10^{-4}$	2,708	-7,931

График этой зависимости удобно строить в логарифмическом масштабе, так сила быстро убывает с увеличением расстояния.



Полученная зависимость во всем диапазоне расстояний является практически линейной с коэффициентом наклона $a = -3,14 \approx 3$. Поэтому можно считать, что сила взаимодействия магнитов убывает обратно пропорционально кубу расстояния:

$$F = \frac{A}{x^3}. \quad (14)$$

Примечания (не входящие в основное решение)

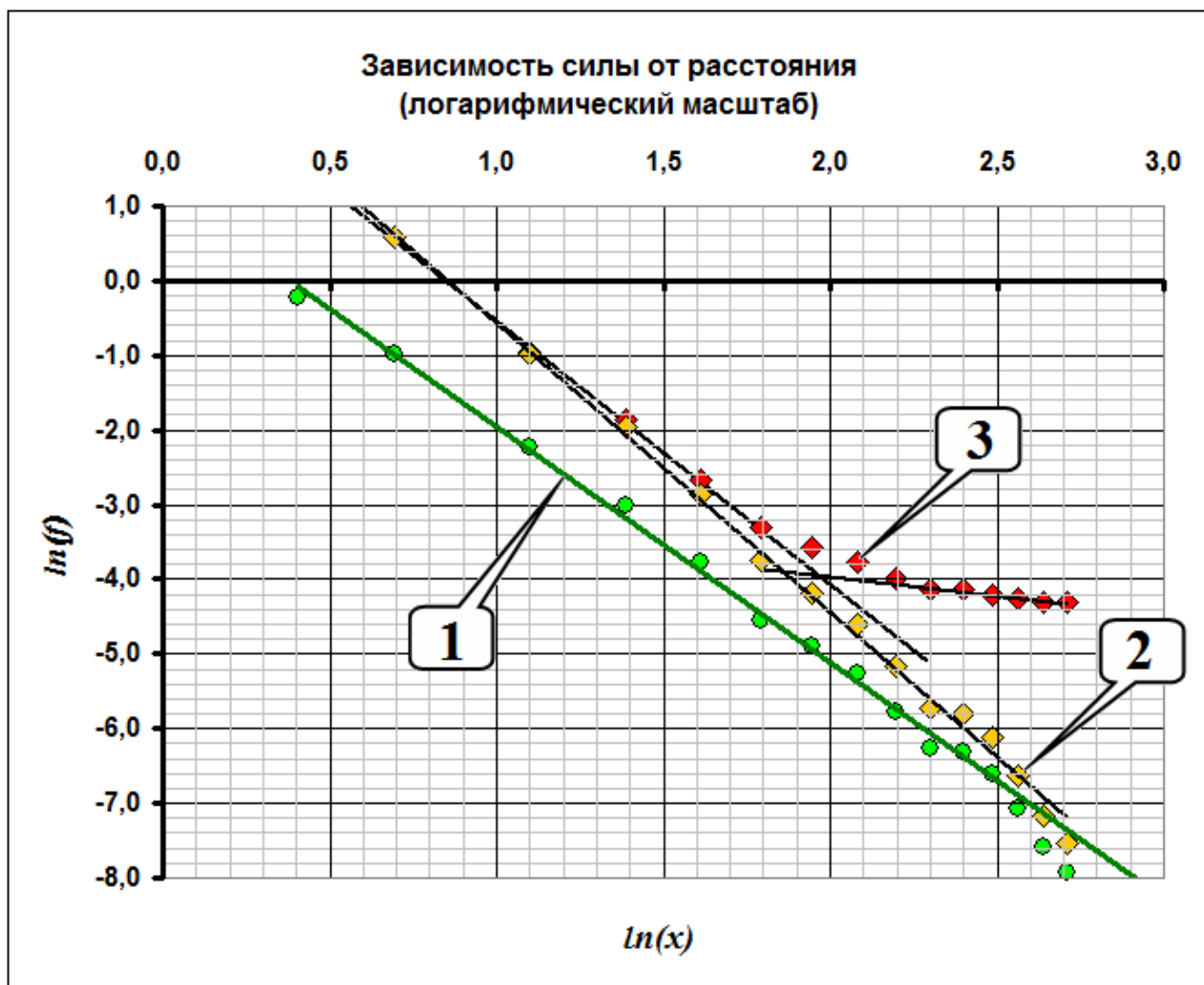
1. При выводе формулы (12) для периода колебаний учет изменения направления силы взаимодействия магнитов приводит к появлению множителя $\left(1 + \frac{l}{x}\right)$. Пренебрежение этим фактором приводит к следующей формуле для расчета силы

$$f(x) = \left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{T_0^2}\right). \quad (13.a)$$

Учет взаимодействия с магнитным полем Земли приводит к появлению постоянного слагаемого K_0 в формуле (12) и как следствие величины $-\frac{1}{T_0^2}$ в формуле для периода. Без его учета формула для силы взаимодействия приобретает вид

$$f(x) = \frac{C}{T^2}. \quad (13.б)$$

Следующий рисунок показывает значимость обоих оговоренных факторов.

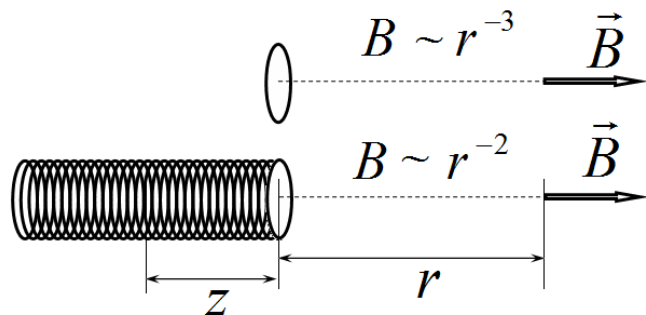


Здесь:

- 1- Зависимость, рассчитанная по формуле (13) (та, которая является, или считается правильной).
- 2- Зависимость, рассчитанная по формуле (13а) (без учета изменения направления силы). Эта зависимость также может считаться линейной, но ее коэффициент наклона близок к -4.
- 3- Зависимость, рассчитанная по формуле (13б) (без учета влияния земного магнитного поля). В этом случае зависимость нелинейная. Именно для нее в условии задачи рекомендовано предложить две формулы для малых и больших расстояний.

2. Полученная зависимость силы от расстояния $F \propto r^{-3}$ имеет теоретическое обоснование.

Индукция магнитного поля кольца² убывает обратно пропорционально кубу расстояния. Однако в данном случае намагничивается весь стержень маятника. Поэтому система «стержень плюс два магнита» эквивалентна длинному соленоиду. В этом случае для вычисления индукции поля необходимо проинтегрировать индукции полей, создаваемых всеми витками. Так для полубесконечного $z \in (0, \infty)$ соленоида на большом расстоянии от его торца получим



$$B \propto \int_0^{\infty} \frac{dz}{(r+z)^3} \propto \frac{1}{r^2}.$$

Интересно, что в этом случае можно говорить о «магнитных зарядах», расположенных на концах стержня - почти монополю Дирака.

Отдельный магнит можно рассматривать как магнитный диполь. Сила, действующая на него пропорциональна производной от магнитной индукции, в данной системе

$$F \propto \frac{dB}{dr} \propto \frac{1}{r^3}.$$

² См. Решение теоретической задачи 11.2

Задача 11-2. Голограммы.

Данная задача носит качественный характер, потому, что с помощью имеющегося оборудования провести точные измерения не возможно. Понятно, что для решения задачи необходимо направить луч лазера на пластинку и наблюдать в отраженном свете дифракционную картину. В обоих случаях дифракционная картина представляет собой два размытых пятна, центры которых расположены диаметрально противоположно на некоторой окружности. Размеры и ориентация этих пятен изменяются при изменении точки падения луча света на пластинки.

Схематически типичная дифракционная картина показана на рисунке. Здесь S - набор полос, на которых происходит дифракция света (масштаб сильно увеличен). $1, 1'$ – дифракционные пятна (при некоторых положениях точки падения луча света эти пятна образуют почти полную окружность). В соответствии с общими законами дифракции ось дифракционной картины перпендикулярна линиям, на которых происходит дифракция. Угол дифракции δ , который определяет, в данном случае, радиус дифракционного кольца r зависит от расстояния между линиями d , задается формулой

$$d\delta = \lambda, \quad (1)$$

Угол α можно считать малым, λ - длина волны света.

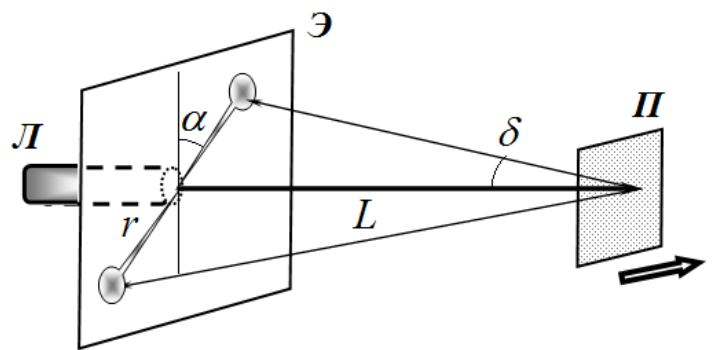
Тогда радиус кольца оказывается равным

$$r = L\delta = \frac{L\lambda}{d}. \quad (2)$$

Угловой размер дифракционных пятен θ определяется изгибом полос и равен углу дуги колец в пределах светового кольца.

Таким образом, имеется три характеристики дифракционной картины (угол отклонения оси, радиус кольца, угловой размер пятна), которые поддаются приближенному измерению.

Для проведения измерений необходимо луч лазера L направить на пластинку Π перпендикулярно ей и наблюдать дифракционную картину на экране \mathcal{E} (см. рис.), в центре которого проделано отверстие для луча света. На экране также имеется радиально-круговая шкала для измерения угла отклонения оси α и радиуса дифракционного кольца r . Смещая пластинку, можно изменять положение точки падения луча.

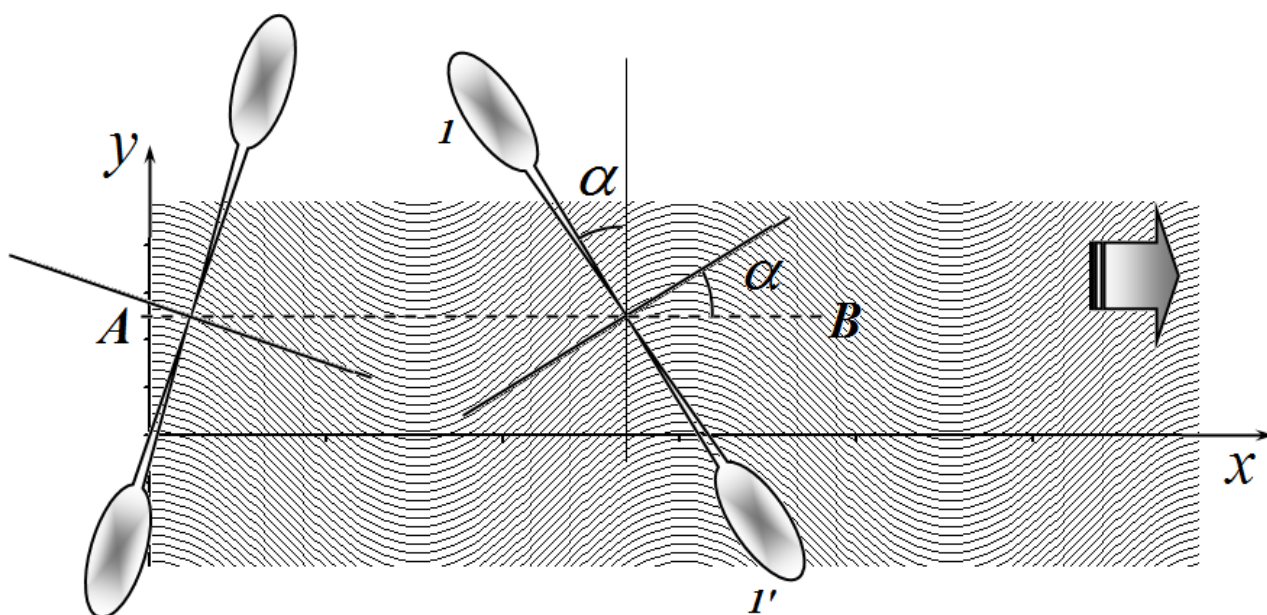
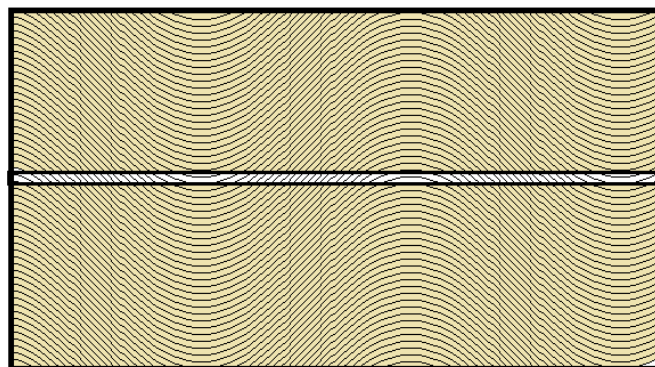


Для пластики 1 угол отклонения α может незначительно изменяться. Это связано с тем, что линия сканирования (на пластинке) не всегда проходит через центр колец на пластинке. Отклонение дифракционных пятен r практически не зависит от положения точки падения луча. Это дает возможность утверждать, что кольца на пластинке являются равноотстоящими. То есть радиус кольца **возрастает прямо пропорционально его номеру**. По измеренному радиусу r можно оценить расстояние между кольцами, которое составляет величину порядка 10-30 мкм.

Пластинка 2 заклеена полосами плотной бумаги, между которыми оставлена только тонкая щель.

На рисунке показана действительная форма вытесненных полос, имеющих форму синусоид (участники олимпиады видеть ее не могли).

При смещении пластинки изменялось положение луча, который все время должен попадать в открытую щель. При этом на экране наблюдается описанная дифракционная картина. При смещении пластинки периодически изменяется угол отклонения оси дифракционной картины α . Также значительно изменяется и угловые размеры пятен θ . Для восстановления структуры полос достаточно измерить зависимость угла α от координаты точки падения x . Следующий рисунок иллюстрирует основную идею решения поставленной задачи.



Как уже было отмечено, направление оси дифракционной картины перпендикулярно направлениям рисок пластинки. Точнее, касательных к этим линиям. Следовательно, угол отклонения оси от вертикали α равен углу наклона касательных к горизонтали, т.е. к оси x (в наших обозначениях). А тангенс угла наклона касательной равен производной от искомой функции $y(x)$, описывающей форму линий. Заметим, что значение производной в данном случае зависит только от координаты x , так как вертикальное смещение линий не изменяет эту производную. Иными словами, хотя дифракция происходит на разных линиях, но все они имеют одинаковый наклон при заданном значении x . Таким образом, измеряя зависимость угла наклона $\alpha(x)$ от координаты, x мы можем получить зависимость производной искомой функции от координаты

$$\frac{dy(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha(x). \quad (3)$$

Измерения показывают, что зависимость $\alpha(x)$ является периодической, следовательно, и сами линии являются периодическими. Можно приближенно считать, что **они являются синусоидами.**