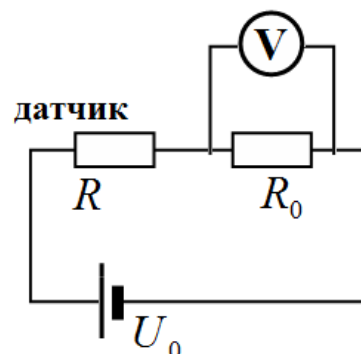


**Задание 9-1. «Разминка»**

**Задача 1.1**

Подключим датчик температуры к источнику. Так как сопротивление датчика убывает с ростом температуры, то в цепи будет возрастать сила тока, поэтому надо измерять некоторое напряжение, которое пропорционально силе тока в цепи. Для этого подключим в цепь последовательно еще один резистор, напряжение на котором будем измерять. В этой цепи показания вольтметра легко рассчитываются

$$U = IR_0 = \frac{U_0}{R + R_0} R_0. \quad (1)$$



Если подставить зависимость сопротивления датчика от температуры, то получим зависимость измеряемого напряжения от температуры:

$$U = \frac{U_0}{R + R_0} R_0 = \frac{U_0}{\frac{a - bt}{t} + R_0} R_0 = \frac{U_0}{\frac{a}{t} + (R_0 - b)} R_0. \quad (2)$$

Легко заметить, что при  $R_0 = b = 800 \text{ Ом}$ , измеряемое напряжение будет прямо пропорционально температуре

$$U = \frac{U_0}{\frac{a}{t} + (R_0 - b)} R_0 = \frac{U_0 b}{a} t. \quad (3)$$

В этой формуле коэффициент пропорциональности должен быть равным 1, отсюда находим значение напряжения источника:

$$\frac{U_0 b}{a} = 1 \Rightarrow U_0 = \frac{a}{b} = 65 \text{ мВ}. \quad (4)$$

**Задача 1.2**

1.2.1 В трубке останется воздух. При уменьшении температуры воздух начнет сжиматься, а вода частично заходить в трубку. При этом будет уменьшаться сила Архимеда, Следовательно, ареометр начнет опускаться.

Изменение объема воздуха описывается формулой (2), на основании которой можно записать

$$\Delta V = \frac{\pi D^2}{4} l \alpha_2 \Delta t. \quad (1)$$

Чтобы сила Архимеда осталась прежней, ареометр должен погрузиться на такую глубину, чтобы объем его погруженной части остался неизменным. Из этого условия следует

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4} \Delta h. \quad (2)$$

Приравнивая эти выражение, получим

$$\frac{\pi D^2}{4} l \alpha_2 \Delta t = \frac{\pi d^2}{4} \Delta h \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = l \frac{D^2}{d^2} \alpha_2 \quad (3)$$

Отметим, что в этом случае можно пренебречь тепловым расширением воды.

1.2.2 При закрытой трубке основной причиной изменения глубины погружения будет изменение плотности воды. Так как при остывании ее плотность будет увеличиваться, то ареометр начнет всплывать.

Изменение плотности воды можно выразить через коэффициент объемного расширения. Возьмем порцию воды некоторой постоянной массы. Так как масса при нагревании не изменяется, то можно записать

$$(\rho_0 + \Delta\rho)(V_0 + \Delta V) = \rho_0 V_0. \quad (4)$$

Здесь  $V_0$  - объем выбранной порции,  $\rho_0$  - ее плотность при некоторой начальной температуре,  $\Delta V$ ,  $\Delta\rho$  - их изменение при изменении температуры.

Раскрывая скобки и пренебрегая малой величиной  $\Delta\rho\Delta V$ , получим

$$\rho_0\Delta V + \Delta\rho V_0 = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho_0} = -\frac{\Delta V}{V_0} = -\alpha_1\Delta t. \quad (5)$$

Знак минус указывает, что при увеличении объема плотность уменьшается и наоборот.

Так как масса ареометра не изменяется, то остается неизменной сила Архимеда, следовательно,

$$(\rho_0 + \Delta\rho)(V_0 + \Delta V) = \rho_0 V_0. \quad (6)$$

Уравнение совпадает уравнением (4), но смысл его другой:  $V_0$  - объем погруженной части ареометра при начальной температуре, который можно считать равным объему баллона;  $\rho_0$  - плотность при этой температуре,  $\Delta\rho$  - изменение плотности воды;

$$\Delta V = -\frac{\pi d^2}{4} \Delta h \quad (7)$$

- изменение объема погруженной части (знак минус указывает, что при увеличении  $h$  объем погруженной части уменьшается).

Из уравнения (6) следует

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{\Delta\rho}{\rho_0}.$$

Подставляя выражения (5) и (7) получим

$$-\frac{\pi d^2}{4V_0} \Delta h = \alpha_1\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\alpha_1 \frac{4V_0}{\pi d^2}. \quad (8)$$

## Задача 9-2. Векторная кинематика

Задача допускает как графическое, так и алгебраическое решение (для его реализации бланк можно оцифровать). Мы будем использовать оба подхода. Для сокращения записей компоненты векторов (метрах, или «клеточках») будем записывать в скобках, например, положение тела в момент времени  $t_0 = 0$ :  $\vec{r}_0 = (4, 35)$ . Для всех векторов (перемещений, скоростей, ускорения) будем использовать систему единиц СИ.

1 Так как движение является равноускоренным, то векторы перемещений тела из положения в момент времени  $t_0 = 0$  за время  $t$  описываются формулой:

$$\Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2 \quad (1)$$

Для моментов времени  $t_1 = 1,0c$  и  $t_4 = 4,0c$  можно записать:

$$\begin{cases} \Delta\vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 \\ \Delta\vec{r}_{04} = \vec{v}_0 t_4 + \frac{1}{2} \vec{g} t_4^2 \end{cases} \quad (2)$$

Это система уравнений относительно неизвестных векторов ускорения и начальной скорости имеет решение

$$\begin{cases} \Delta\vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 \\ \Delta\vec{r}_{04} = \vec{v}_0 t_4 + \frac{1}{2} \vec{g} t_4^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1 \\ \frac{\Delta\vec{r}_{04}}{t_4} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \vec{g} t_4 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \vec{g} (t_4 - t_1) = \frac{\Delta\vec{r}_{04}}{t_4} - \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} \Rightarrow \quad (3)$$

$$\vec{g} = \frac{2}{t_4(t_4 - t_1)} \Delta\vec{r}_{04} - \frac{2}{t_1(t_4 - t_1)} \Delta\vec{r}_{01}$$

Подстановка численных значений времен дает следующие значения искомых векторов

$$\vec{g} = \frac{2}{t_4(t_4 - t_1)} \Delta\vec{r}_{04} - \frac{2}{t_1(t_4 - t_1)} \Delta\vec{r}_{01} = \frac{1}{6} \Delta\vec{r}_{04} - \frac{2}{3} \Delta\vec{r}_{01} = \frac{\Delta\vec{r}_{04} - 4\Delta\vec{r}_{01}}{6}. \quad (4)$$

Эти векторы можно построить на бланке (см. рис.). Там же указан вектор  $\vec{S}_1$

Можно также найти численные значения их компонент (в изображенной системе координат):

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = (3, 31) \\ \vec{r}_1 = (4, 35) \\ \vec{r}_4 = (19, 23) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\vec{r}_{01} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (1, 4) \\ \Delta\vec{r}_{04} = \vec{r}_4 - \vec{r}_0 = (16, -8) \end{cases} \Rightarrow \vec{g} = \frac{\Delta\vec{r}_{04} - 4\Delta\vec{r}_{01}}{6} = (2, -4) \quad (5)$$

Модуль вектора ускорения равен

$$g = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4,5 \frac{M}{c^2}. \quad (6)$$

2. Вектор скорости  $\vec{v}_0$  можно выразить из первого уравнения системы (2):

$$\Delta\vec{r}_{01} = \vec{v}_0 t_1 + \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 \Rightarrow \vec{v}_0 = \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} - \frac{1}{2} \vec{g} t_1. \quad (7)$$

Тогда требуемый вектор

$$\vec{S}_2 = \vec{v}_0 t_1 = \Delta\vec{r}_{01} - \frac{1}{2} \vec{g} t_1^2 = \Delta\vec{r}_{01} - \frac{1}{2} \vec{S}_1 \quad (8)$$

Построение этого вектора также показано на рисунке.

Численные значения его компонент:

$$\vec{S}_2 = \frac{\Delta\vec{r}_{01}}{t_1} - \frac{1}{2}\vec{g}t_1 = (0, 6). \quad (9)$$

Модуль вектора скорости, очевидно, равен  $v_0 = 6,0 \frac{м}{с}$ .

3. Используя закон равноускоренного движения (1), положение объекта в произвольный момент времени можно описать формулой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 = \vec{r}_0 + \vec{S}_2 \frac{t}{t_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \vec{S}_1. \quad (10)$$

Так в момент падения  $t = 5,0с$  радиус-вектор объекта равен

$$\vec{r}_5 = \vec{r}_0 + 5\vec{S}_2 + \frac{25}{2}\vec{S}_1 = (28, 11) \quad (11)$$

4. Линия горизонта перпендикулярна вектору ускорения  $\vec{g}$  (или  $\vec{S}_1$ ) и проходит через точку падения. На рисунке – жирная двойная линия.

5. Расчет координат остальных точек выполняется аналогично, как графически, так и алгебраически. Отметим, что приведенная формула (10) справедлива как для положительных, так и для отрицательных времен. Построения этих точек показаны на рисунке. В таблице приведены рассчитанные значения координат.

T, с	X, м	Y, м
0	3	31
1	4	35
2	7	35
3	12	31
4	19	23
5	28	11
-1	4	23
-2	7	11
-3	12	-5

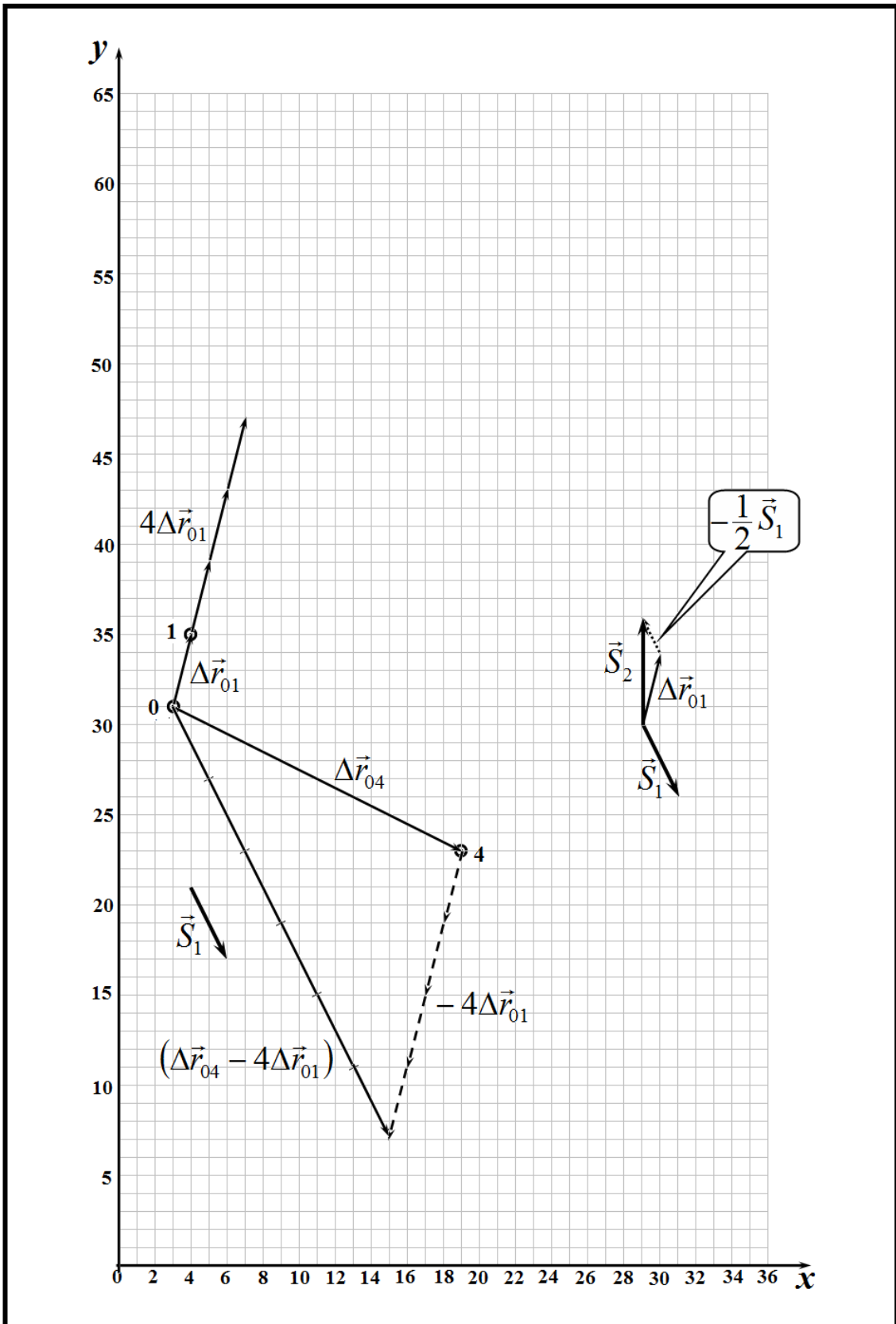
6. Определение точки вылета может быть проведено различными способами.

Простейший из них – формально отметить точку траектории, соответствующую моменту времени  $t = -3,0с$ , заметить, что она лежит ниже линии горизонта. На интервале времени  $[-3, -2]$  участок траектории приближенно можно считать отрезком прямой линии. Поэтому точка вылета есть точка пересечения указанного отрезка траектории с линией горизонта – точка  $E$  на рисунке.

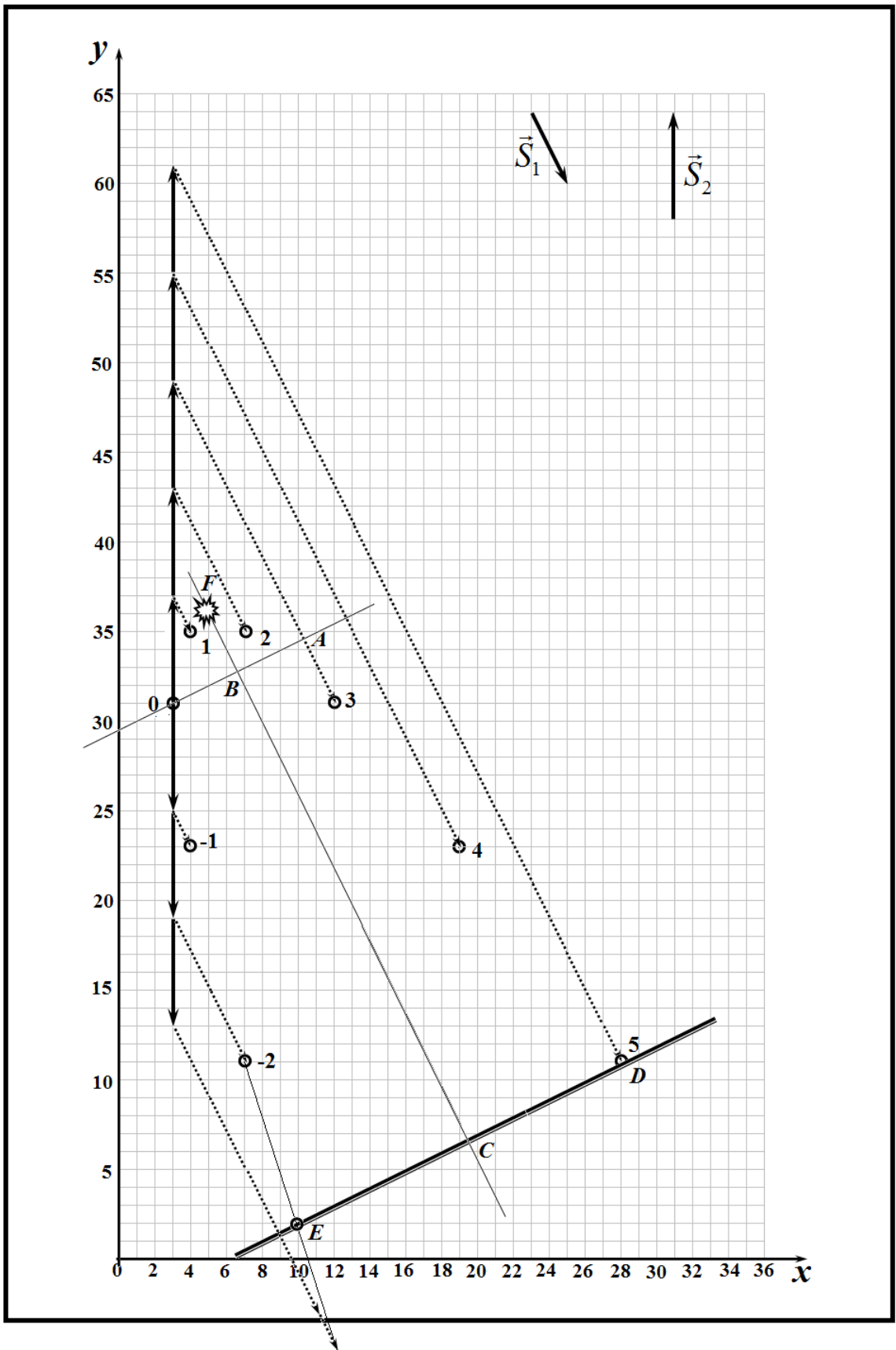
Более точным является следующий способ. Траектория движения симметрична относительно вертикали на всех уровнях. Поэтому проведем через первую точку  $O$  прямую  $OA$ , параллельную линии горизонта и через ее середину проведем перпендикуляр  $BC$ . Эта прямая является осью симметрии параболы (траектории). Поэтому расстояние от точки вылета  $E$  до основания перпендикуляра  $C$ , на таком же расстоянии, что и точка падения  $D$ .

7. Положения вершины параболы с требуемой точностью можно указать и «на глаз» - точка  $F$ !

Бланк 1.



Бланк 2



### Задача 9-3. Опыты Джоуля

0. Уравнение закона сохранения энергии в данном случае имеет вид

$$c_0 m_0 \Delta t = mgh. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что

$$c_0 = \frac{mgh}{m_0 \Delta t}. \quad (2)$$

1. Теплоемкость системы является аддитивной величиной, поэтому общую теплоемкость можно представить следующим образом

$$c_{Cu}(m_1 + m_2) + c_{Zn} m_3 + c_w m_0 = C_w M_0. \quad (3)$$

Тогда эффективная масса воды оказывается равной

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{c_{Cu}}{c_w} (m_1 + m_2) + \frac{c_{Zn}}{c_w} m_3 + m_0 = \\ &= 0,09512 \cdot (1655,0 + 969,9) + 0,09555 \cdot 254,85 + 6041,11 = 6315,14 \text{ г} \end{aligned} \quad (4)$$

2.1 Обратим внимание, что в данной серии экспериментов температура окружающего воздуха была выше, чем температура воды в баке, поэтому вода дополнительно получала теплоту от воздуха. При наличии теплообмена с воздухом уравнение теплового баланса имеет вид

$$C \Delta t_w = Q_0 + Q_1, \quad (5)$$

где  $C$  - общая теплоемкость бака с водой,  $\Delta t_w^{(1)}$  - изменение температуры воды в опыте с вращением лопастей (первая строка в таблице),  $Q_0$  - количество теплоты, выделившейся из-за вращения лопастей,  $Q_1$  - количество теплоты, полученной посредством теплообмена с воздухом.

При отсутствии теплообмена воды бы нагрелась на величину  $\Delta t^*$ , которая определяется выражением

$$C \Delta t_w^* = Q_0 = C \Delta t_w^{(1)} - Q_1, \quad (6)$$

Разумно предположить, что величина  $Q_1$  пропорциональна разности между средней температурой воздуха и средней температурой воды в ходе опыта

$$Q_1 = \gamma (t_{\text{возд}}^{(1)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(1)}). \quad (7)$$

Для определения коэффициента пропорциональности в этом выражении следует воспользоваться результатами опыта без вращения лопастей. В этом опыте уравнение теплового баланса имеет вид

$$C \Delta t_w^{(2)} = Q_1^{(2)} = \gamma (t_{\text{возд}}^{(2)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(2)}). \quad (8)$$

Следовательно, коэффициент теплопередачи равен

$$\gamma = \frac{C \Delta t_w^{(2)}}{(t_{\text{возд}}^{(2)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(2)})}. \quad (9)$$

Подставляя выражения (7) и (9) в формулу (6), получим

$$C\Delta t_w^* = Q_0 = C\Delta t_w^{(1)} - Q_1 = C\Delta t_w^{(1)} - \gamma(t_{\text{возд}}^{(1)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(1)}) = C\Delta t_w^{(1)} - \frac{C\Delta t_w^{(2)}}{(t_{\text{возд}}^{(2)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(2)})} (t_{\text{возд}}^{(1)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(1)}). \quad (10)$$

Таким образом, при отсутствии теплообмена вода бы нагрелась на

$$\begin{aligned} \Delta t_w^* &= \Delta t_w^{(1)} - \Delta t_w^{(2)} \frac{(t_{\text{возд}}^{(1)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(1)})}{(t_{\text{возд}}^{(2)} - \bar{t}_{\text{воды}}^{(2)})} = \\ &= (13,208 - 12,843) - (13,268 - 13,208) \frac{14,277 - \frac{13,208 + 12,843}{2}}{14,371 - \frac{13,268 + 13,208}{2}} = 0,298^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (11)$$

3.1 Приравнивая выражения для кинетической и потенциальной энергии, получим

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow g = \frac{v^2}{2h} = \frac{(2,420 \cdot 2,540)^2}{2 \cdot 0,00760 \cdot 2,540} \cdot 0,01 = 9,786 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}. \quad (12)$$

3.2 Наличие трения приводит к уменьшению эффективной массы грузов на величину  $\Delta m$ . Поэтому энергия, пошедшая на нагревание бака равна

$$E = (M_1 - \Delta m)gh = \frac{(26317,9 - 183,8)}{1000} \cdot 9,786 \cdot 31,927 = 8165,50 \text{ Дж}. \quad (13)$$

4. Подставляя все найденные величины в формулу для теплоемкости воды, получим

$$c_0 = \frac{E}{M_0 \Delta t^*} = \frac{8165,50 \text{ Дж}}{6315,142 \cdot 0,298^\circ\text{C}} = 4,336 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot ^\circ\text{C}}. \quad (14)$$

Это и есть численное значение энергии в 1 калорию, выраженную в джоулях.

Для интереса, отметим, что без учета всех поправок прямой расчет по формуле 1 приводит к значению  $c_0 = 3,58 \frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot ^\circ\text{C}}$ .



**Задача 10-1. «Разминка»**

**Задача 1.1**

Понятно, что для того чтобы вытянуть брусок, к нему следует прикладывать горизонтальную силу немного превышающую сумму сил трения, действующих на брусок

$$F = \mu(N_1 + N_0). \quad (1)$$

Все обозначения стандартные, вертикальные силы показаны на рисунке.

Из условия равновесия доски следует уравнение моментов

$$N_1 x = Mg \frac{l}{2} \Rightarrow N_1 = \frac{Mg l}{2 x} \quad (2)$$

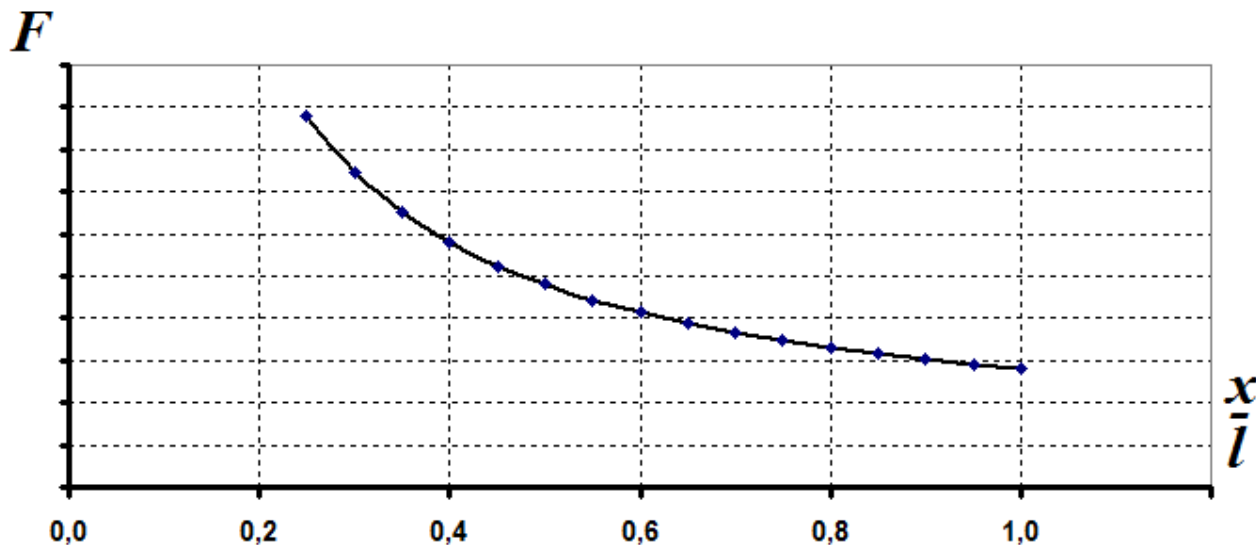
Так как брусок в вертикальном направлении не движется, то справедливо выражение

$$N_0 = mg + N_1 \quad (3)$$

Таким образом, необходимая минимальная горизонтальная сила должна быть равна

$$F = \mu(N_1 + N_0) = \mu \left( Mg \frac{l}{x} + mg \right). \quad (4)$$

График этой функции показан на рисунке



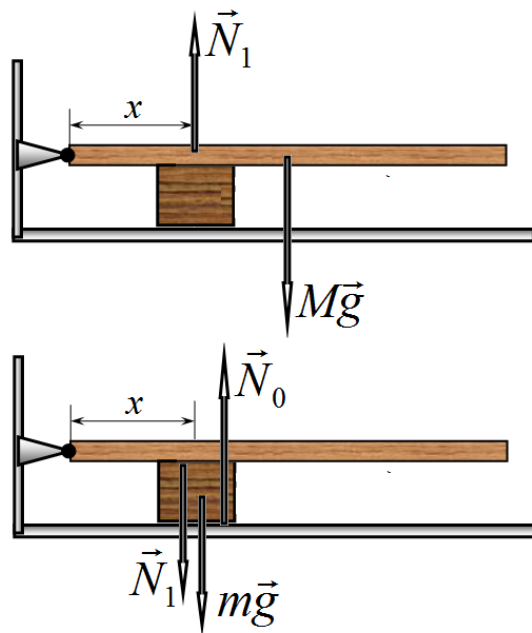
Работа численно равна площади под графиком данной функции. Строгое вычисление этой площади сводится к интегралу и оказывается равным:

$$A = \mu Mgl \ln 4 + \mu mgl. \quad (5)$$

Здесь  $\ln 4 \approx 1,4$

Однако вычисление интегралов выходит за рамки школьной программы. Поэтому для оценки эту площадь можно подсчитать численно. Такой расчет по 4 точкам (с шагом 0,25) дает выражение

$$A = 1,5\mu Mgl + \mu mgl. \quad (6)$$



## Задача 1.2

1.2.1 С помощью формулы Пуазейля находим

$$q_1 = \frac{(2r)^4 \Delta P}{8\pi\eta l} = 16 \frac{r^4 \Delta P}{8\pi\eta l} = 16q_0. \quad (1)$$

При соединении двух трубок необходимо учесть, что давления на концах трубок перераспределяться так, чтобы расходы газов через них были одинаковы. Обозначим разности давлений концах трубок  $\Delta P_0, \Delta P_1$ .

Для расходов газов из уравнения Пуазейля можно записать

$$\begin{aligned} q &= g\Delta P_0 \\ q &= 16g\Delta P_1. \end{aligned} \quad (2)$$

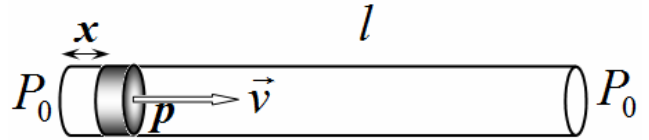
Где  $g$  - некоторая постоянная величина,  $q$  - искомый расход через составную трубку. Кроме того

$$\Delta P_0 + \Delta P_1 = \Delta P. \quad (3)$$

Из этих уравнений находим

$$\frac{q}{g} + \frac{q}{16g} = \Delta P \Rightarrow q = \frac{16}{17} g\Delta P = \frac{16}{17} q_0 \quad (4)$$

1.2.2 Так как труба тонкостенная и хорошо проводит тепло, а скорость движения поршня мала, то процесс можно считать изотермическим и равновесным. Т.е. при любом положении поршня распределение давления газа соответствует равновесному движению газа. В этом случае формула Пуазейля применима при любом положении поршня. Обозначим расстояние от конца трубы до поршня  $x$ , а избыточное (над атмосферным) давление вблизи поршня  $p$ .



Расход газа при движении поршня со скоростью  $v$  равен

$$q = vS. \quad (5)$$

Где  $S$  - площадь поперечного сечения трубы

Из формулы Пуазейля можно найти, какое избыточное давление может обеспечить такой расход и какую силу следует прикладывать к поршню:

$$q = vS = \frac{r^4 p}{8\pi\eta(l-x)} \Rightarrow p = \frac{8\pi\eta S v}{r^4} (l-x) \Rightarrow F = pS = \frac{8\pi\eta S^2 v}{r^4} (l-x) = \frac{8\pi^3 \eta v}{r^4} (l-x)$$

Так как сила изменяется по линейному закону от максимального до нулевого значения, то при вычислении работы можно взять ее среднее значение  $\langle F \rangle = \frac{1}{2} F_{\max}$ .

Тогда работа по выталкиванию воздуха из трубы будет равна

$$A = \langle F \rangle l = \frac{4\pi^3 \eta v}{r^4} l^2. \quad (6)$$

## Задача 10-2. «Конденсатор»

0. Емкость конденсатора определяется по известной формуле

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{h}. \quad (1)$$

### Часть 1.

1.1 Напряженность электрического поля внутри конденсатора выражается через разность потенциалов на его обкладках

$$E = \frac{U_0}{h}. \quad (2)$$

И остается постоянной при смещении пластин, так заряды на пластинах остаются неизменными. Эту же напряженность можно выразить через поверхностную плотность зарядов  $\sigma$  на пластинах

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Из этих выражений следует, что

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{U_0}{h}. \quad (4)$$

Следовательно, сила притяжения пластин (и равная ей сила, с которой надо раздвигать пластины) равна

$$F = \sigma S E' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 a^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_0}{h} \right)^2 a^2 \quad (5)$$

Здесь учтено, что поле между пластинами создается зарядами на обеих пластинах, а при вычислении силы, действующей на одну из них, следует учитывать поле, создаваемое зарядами на другой. Напряженность этого поля  $E'$ , очевидно в два раза меньше, чем  $E$ . Эту формулу можно записать сразу, если знать, что давление электрического поля на проводник равно плотности энергии электрического поля.

Эта сила не зависит от расстояния между пластинами.

1.2 Работа по перемещению пластины на расстояние  $h$  в этом случае равна

$$A = Fh = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_0}{h} \right)^2 a^2 h = \frac{\varepsilon_0 a^2 U_0^2}{2h} = \frac{C_0 U_0^2}{2}. \quad (6)$$

1.3 Так как в данном случае постоянным остается заряд на пластинах, то изменение энергии конденсатора можно рассчитать по формуле

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} \quad (7)$$

где  $C = \frac{C_0}{2}$  - емкость конденсатора после увеличения расстояния между пластинами в 2 раза.

Следовательно,

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2C_0} = \frac{C_0 U_0^2}{2} \quad (8)$$

1.4 Таким образом, закон сохранения энергии в данном случае строго выполняется: работа внешних сил равна увеличению энергии конденсатора.

## Часть 2.

При подключенном источнике заряды на пластинах изменяются, так как остается постоянной разность потенциалов, а напряженность поля изменяется!

2.1 Сила взаимодействия между пластинами зависит только от напряженности поля между ними, поэтому можно воспользоваться формулой (5)

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 a^2.$$

Только в данном случае следует учесть, что напряженность поля при изменении расстояния между пластинами изменяется. Обозначим расстояние между пластинами  $x$ . Тогда напряженность поля будет равна

$$E = \frac{U_0}{x}. \quad (9)$$

Следовательно, сила их притяжения описывается формулой

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left( \frac{U_0}{x} \right)^2 a^2 \quad (10)$$

Таким образом, необходимая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между пластинами.

2.2 Для вычисления работы можно воспользоваться аналогией: напряженность поля точечного заряда также обратно пропорциональна квадрату расстояния, а потенциал этого поля обратно пропорционален расстоянию. Поэтому для работы по раздвиганию пластин можно записать

$$A = \frac{1}{2} \varepsilon_0 U_0^2 a^2 \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{2h} \right) = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a^2}{h} = \frac{1}{4} C_0 U_0^2 \quad (11)$$

2.3 Изменение энергии конденсатора в данном случае равно (с учетом того, что емкость конденсатора уменьшилась в 2 раза  $C = \frac{C_0}{2}$ )

$$\Delta W = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{C_0 U_0^2}{2} = -\frac{C_0 U_0^2}{4}. \quad (12)$$

2.4 Внешние силы совершили положительную работу, а энергия конденсатора уменьшилась!?

Таким образом, данная проблема требует более тщательного анализа.

Сомнений в выполнимости закона сохранения энергии быть не должно, только надо его применять правильно! Энергия сохраняется в замкнутой системе, а конденсатор таковой не является - он же подключен к источнику ЭДС. При увеличении расстояния между пластинами емкость конденсатора уменьшается, поэтому уменьшается заряд на пластинах, которому некуда деться, кроме как вернуться назад, в источник. Их возвращению препятствуют сторонние силы (вспомните – сторонние силы источника стремятся «вытолкнуть заряды из источника»), поэтому при возвращении зарядов энергия источника повышается. Таким образом, при раздвигании пластин конденсатора происходит подзарядка источника, а энергия, переданная посредством совершенной работы, переходит в энергию источника. Кроме того, энергия поля в конденсаторе также уменьшается, поэтому эта «потеря» энергии также переходит в источник. Иными словами, при перемещении пластины внешняя сила не только совершает работу по подзарядке источника, но и «заставляет» электрическое поле вернуть часть своей энергии.

При уменьшении емкости заряд конденсатора уменьшился на величину

$$\Delta q = C_0 U_0 - C U_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0. \quad (13)$$

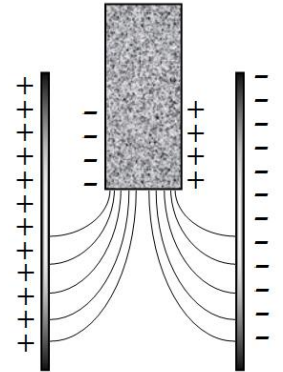
Следовательно, увеличение энергии источника равно:

$$\Delta W_{ист} = U_0 \Delta q = \frac{1}{2} C_0 U_0^2. \quad (14)$$

Таким образом «баланс энергии» сходится: работа внешних сил плюс уменьшение энергии конденсатора равно увеличению энергии источника.

### Часть 3.

3.1 Механизм возникновения силы, действующей на пластинку со стороны электрического поля, проиллюстрирован на рисунке. При ее смещении изначально однородное распределение зарядов на обкладках конденсатора и поляризационных зарядов на пластинке искажается. Как следствие этого перераспределения зарядов искажается и электрическое поле, поэтому возникают силы, стремящиеся втянуть пластинку внутрь конденсатора. Если конденсатор заряжен, то для извлечения пластинки необходимо приложить к ней внешнюю силу и совершить положительную работу.



Прямой расчет силы, действующей на пластинку сложен, однако для ее определения можно воспользоваться энергетическим подходом: изменение энергии системы равно работе внешних сил:

$$F \Delta x = \Delta W \quad (15)$$

В данном случае емкость конденсатора также уменьшается при постоянном напряжении на нем. Поэтому можно воспользоваться идеями, полученными во второй части задачи. При малом изменении емкости:

энергия конденсатора изменяется на величину

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} U_0^2 \Delta C ; \quad (16)$$

Энергия источника изменяется на величину ( $\Delta q = U_0 \Delta C$  - изменение заряда конденсатора, изменение заряда источника имеет противоположный знак)

$$\Delta W_U = -U_0 \Delta q = -U_0^2 \Delta C ; \quad (17)$$

Изменение полной энергии системы

$$\Delta W = -\frac{1}{2} U_0^2 \Delta C ; \quad (18)$$

Если пластина сместилась на расстояние  $x$  вдоль пластин то емкость конденсатора окажется равной (как емкость двух параллельно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{\epsilon_0 a x}{h} + \frac{\epsilon_0 \epsilon a (a - x)}{h} = \frac{\epsilon_0 a}{h} (x + \epsilon (a - x)) \quad (19)$$

Изменение емкости при малом смещении пластины равно

$$\Delta C = \frac{\epsilon_0 a x}{h} + \frac{\epsilon_0 \epsilon a (a - x)}{h} = -\frac{\epsilon_0 a}{h} (\epsilon - 1) \Delta x. \quad (20)$$

Наконец, с помощью формул (15) и (18) находим

$$F = \frac{\epsilon_0 a}{2h} (\epsilon - 1) U_0^2. \quad (21)$$

### Задача 10-3 Цикл Ренкина.

#### Часть А. Пройдемся по циклу

**А1.** Количество теплоты, необходимое для испарения воды массы  $m$ , находящейся при температуре кипения, определяется известным выражением:

$$Q_{1-2} = L_{100\text{ }^\circ\text{C}} m$$

**А2.** Согласно первому началу термодинамики  $Q_{1-2} = A_{1-2} + \Delta U_{1-2}$ . Так как кипение воды происходит при постоянном атмосферном давлении, то работу  $A_{1-2}$  можно рассчитать следующим образом:

$$A_{1-2} = p_{\text{атм}}(V_2 - V_1)$$

Объем воды  $V_1$  в жидком состоянии можно найти, зная ее плотность. Объем водяного пара  $V_2$  можно выразить из уравнения Менделеева-Клапейрона, где химическое количество выразим через массу и молярную массу:

$$A_{1-2} = p_{\text{атм}} \left( \frac{\nu RT_{\text{кип}}}{p_{\text{атм}}} - \frac{m}{\rho_{\text{в}}} \right) = m \left( \frac{RT_{\text{кип}}}{M} - \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_{\text{в}}} \right)$$

Тогда изменение внутренней энергии порции воды:

$$\Delta U_{1-2} = Q_{1-2} - A_{1-2} = m \left( L_{100\text{ }^\circ\text{C}} + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_{\text{в}}} - \frac{RT_{\text{кип}}}{M} \right)$$

**А3.** В этом пункте нам необходимо будет использовать выражение для внутренней энергии водяного пара. Для этого рассмотрим мысленный изохорный процесс с идеальным газом. По условию задачи нам известна молярная теплоемкость такого процесса, значит

$Q_V = c_V \nu \Delta T = \frac{9}{2} \nu R \Delta T$ . С другой стороны, при изохорном процессе пар не совершает работы, значит  $Q_V = \Delta U$ . Получаем, что изменение внутренней энергии равно  $\Delta U = \frac{9}{2} \nu R \Delta T$ . Зная, что при 0 К внутренняя энергия обращается в нуль, получаем выражение для внутренней энергии водяного пара:

$$U = \frac{9}{2} \nu RT$$

Процесс нагревания пара в задаче – изобарный, поэтому, воспользовавшись первым началом термодинамики и уравнением Менделеева-Клапейрона, можем получить:

$$Q_{2-3} = A_{2-3} + \Delta U_{2-3} = p_{\text{атм}}(V_3 - V_2) + \frac{9}{2} \nu R \Delta T_{2-3} = \nu R \Delta T_{2-3} + \frac{9}{2} \nu R \Delta T_{2-3} = \frac{11}{2} \nu R \Delta T_{2-3}$$

Полученный множитель  $c_p = \frac{11}{2} R$  является молярной теплоемкостью водяного пара при постоянном давлении. Её можно было также получить, воспользовавшись формулой Майера:  $c_p - c_V = R$ . Используя молярную массу воды, получаем ответ на вопрос данного пункта:

$$Q_{2-3} = \frac{11 m}{2 M} R (T_{\text{max}} - T_{\text{кип}})$$

**А4.** Как сказано в условии задачи, процесс раскручивания турбины будет происходить адиабатически. При этом будет изменяться и давление, и температура, и объем порции газа. Считая процесс квазистационарным, из условия знаем, что он подчиняется уравнению  $p T^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \text{const}$ . Показатель адиабаты  $\gamma$  мы можем рассчитать, используя выражения для теплоемкостей из предыдущего пункта задачи:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{11}{2} R}{\frac{9}{2} R} = \frac{11}{9}$$

То есть адиабатический процесс будет происходить в соответствии с уравнением  $pT^{-\frac{11}{2}} = const$ . Зная давление ( $p_{атм}$ ) и температуру ( $T_{max}$ ) в начале процесса, можем получить зависимость давления от температуры в явном виде:

$$pT^{-\frac{11}{2}} = p_{атм} T_{max}^{-\frac{11}{2}} \Rightarrow p = p_{атм} \left( \frac{T}{T_{max}} \right)^{\frac{11}{2}}$$

Процесс будет происходить до тех пор, пока пар не начнет конденсироваться. Пар начинает конденсироваться, если его давление «попытается» превысить давление насыщенного водяного пара при текущей температуре. Тогда для нахождения конечного давления изобразим кривую зависимости  $p(T)$  адиабатического процесса на графике зависимости давления насыщенных паров воды от температуры на бланке к условию задачи. Для этого рассчитаем давление в нескольких точках, не забыв, конечно, перевести температуру в абсолютную шкалу (Кельвины). Результаты расчетов представим в виде таблицы.

$T, ^\circ\text{C}$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	85	87
$T, \text{K}$	323	333	343	353	363	373	383	393	403	358	360
$p, \text{кПа}$	34,3	40,6	47,8	56,0	65,3	75,8	87,7	101	116	60,5	62,3

Последние два столбца были рассчитаны для уточнения координат точки пересечения графиков.

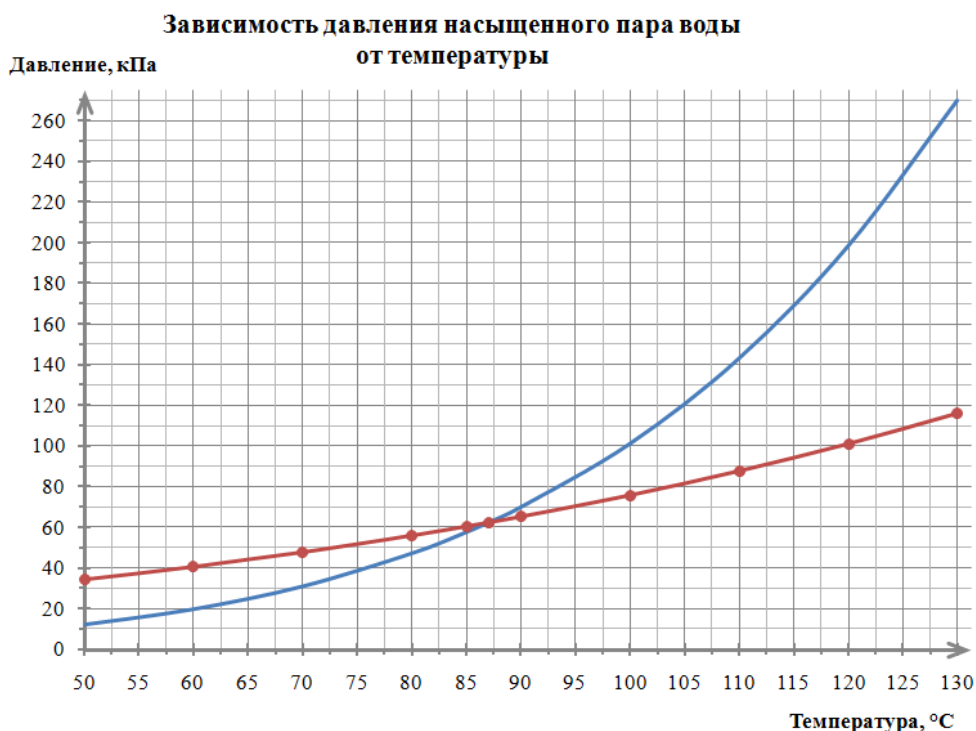


Рисунок 1 - Пересечение графиков зависимости давления от температуры

Из полученного пересечения графиков делаем вывод, что конечное давление после этапа 3-4, при котором пар начнет конденсироваться, приблизительно равно:

$$p_{конд} = 62,3 \text{ кПа}$$

**A5.** Также из графика мы получаем и температуру, при которой пар начнет и будет дальше изотермически конденсироваться:

$$T_{конд} = 87 \text{ } ^\circ\text{C} = 360 \text{ K}$$

Кроме того отметим, что поскольку, согласно условию задачи, конденсация происходит изотермически, то она происходит и изобарно в силу однозначной связи между температурой и давлением насыщенных водяных паров.

**A6.** В условии отмечено, что насос перекачивает воду адиабатически, то есть без передачи тепла. Кроме того, поскольку плотность воды по условию задачи постоянна, то ее объем в

процессе перекачки не изменяется, что приводит к отсутствию совершаемой работы. По первому началу термодинамики из этого следует, что и внутренняя энергия воды не изменяется в процессе 5-6, то есть ее температура остается постоянной и равной  $T_{\text{конд}}$ . Теплоту вода получает в процессе нагревания 6-1. Количество этой теплоты можно легко рассчитать с помощью известного выражения:

$$Q_{6-1} = c_v m \Delta T = c_v m (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}})$$

### Часть В. Исследуем цикл

**В1.** Схематические диаграммы в координатах  $p$ - $V$  и  $p$ - $T$  приведены на рисунках.

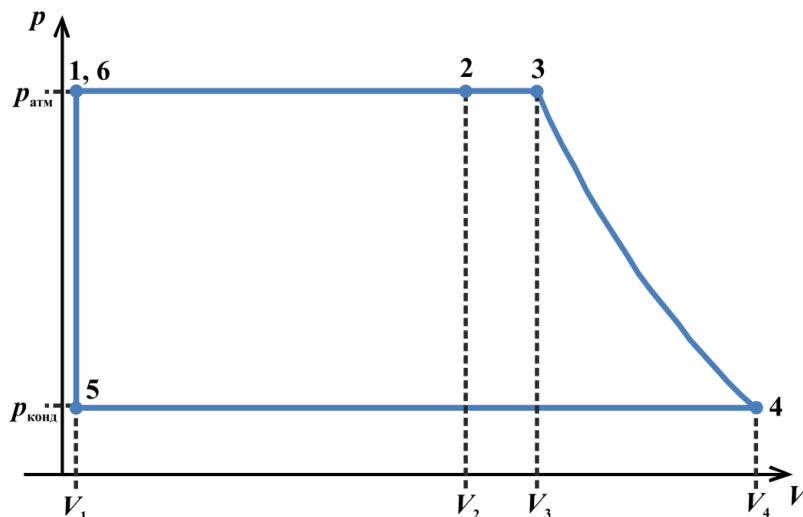


Рисунок 2 -  $p$ - $V$  диаграмма цикла

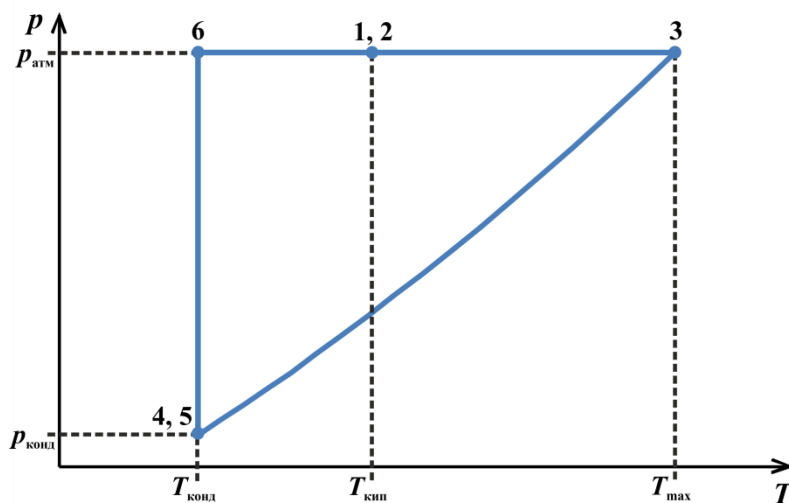


Рисунок 3 -  $p$ - $T$  диаграмма цикла

Значения объемов на  $p$ - $V$  диаграмме следующие:

$$V_1 = \frac{m}{\rho_v}; \quad V_2 = \frac{mRT_{\text{кип}}}{Mp_{\text{атм}}}; \quad V_3 = \frac{mRT_{\text{max}}}{Mp_{\text{атм}}}; \quad V_4 = \frac{mRT_{\text{конд}}}{Mp_{\text{конд}}}$$

Необходимо отметить, что объем  $V_1$  значительно меньше остальных характерных объемов, так как плотность воды в жидком состоянии гораздо больше плотности пара.

На  $p$ - $V$  диаграмме точки 1 и 6 совпадают, так как при нагревании воды в резервуаре ее давление и объем остаются постоянными. Отметим, что мы здесь пренебрегаем разницей давлений, обусловленной высотой столба жидкости. На  $p$ - $T$  диаграмме совпадают точки 1 и 2, а также точки 4 и 5, так как при испарении и конденсации температура и давление остаются постоянными.



Участок 3-4 на обеих диаграммах относится к адиабатическому процессу и отличен от прямой в обоих случаях.

**В2.** Удельная теплота конденсации связана с теплотой, которую выделяет некоторая порция пара в этом процессе:  $Q_{4-5} = L_{\text{конд}} m$ . С другой стороны, эту теплоту можно найти, используя первое начало термодинамики:

$$-Q_{4-5} = A_{4-5} + \Delta U_{4-5}$$

Знак «минус» здесь учитывает то, что теплота отводится от пара, а не передается ему. Работу газа на участке 4-5 можно легко найти, так как давление при конденсации не изменялось:

$$A_{4-5} = p_{\text{конд}}(V_1 - V_4) = -p_{\text{конд}} \left( \frac{mRT_{\text{конд}}}{Mp_{\text{конд}}} - \frac{m}{\rho_v} \right) = -m \left( \frac{RT_{\text{конд}}}{M} - \frac{p_{\text{конд}}}{\rho_v} \right)$$

Работа отрицательна, так как пар уменьшает свой объем при конденсации. Изменение внутренней энергии найдем из условия того, что она является функцией состояния, и полное изменение внутренней энергии за весь цикл равно нулю:

$$\Delta U_{1-2} + \Delta U_{2-3} + \Delta U_{3-4} + \Delta U_{4-5} + \Delta U_{5-6} + \Delta U_{6-1} = 0$$

В предыдущих частях задачи у нас имеются выражения для всех слагаемых, кроме  $\Delta U_{3-4}$  и искомого  $\Delta U_{4-5}$  (напомним, в части **А6** было указано, что  $\Delta U_{5-6} = 0$ , а  $\Delta U_{6-1}$  совпадает с  $Q_{6-1}$ , так как вода в жидком состоянии работу не совершает). Для адиабатического процесса 3-4 с водяным паром:

$$\Delta U_{3-4} = \frac{9}{2} \nu R \Delta T_{3-4} = \frac{9}{2} \frac{m}{M} R (T_{\text{конд}} - T_{\text{max}})$$

Тогда искомое изменение внутренней энергии равно:

$$\begin{aligned} \Delta U_{4-5} &= -\Delta U_{1-2} - \Delta U_{2-3} - \Delta U_{3-4} - \Delta U_{6-1} = \\ &= -m \left( L_{100^\circ\text{C}} + \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_v} - \frac{RT_{\text{кип}}}{M} \right) - \frac{9}{2} \frac{m}{M} R (T_{\text{max}} - T_{\text{кип}}) - \frac{9}{2} \frac{m}{M} R (T_{\text{конд}} - T_{\text{max}}) - \\ &- c_v m (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}) = m \left( -L_{100^\circ\text{C}} - \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_v} + \frac{RT_{\text{кип}}}{M} - (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}) \left( c_v - \frac{9}{2} \frac{R}{M} \right) \right) \end{aligned}$$

Наконец, подставляя полученные результаты для работы и изменения внутренней энергии в первое начало термодинамики, получаем:

$$\begin{aligned} &-L_{\text{конд}} m = \\ &= -m \left( \frac{RT_{\text{конд}}}{M} - \frac{p_{\text{конд}}}{\rho_v} \right) + m \left( -L_{100^\circ\text{C}} - \frac{p_{\text{атм}}}{\rho_v} + \frac{RT_{\text{кип}}}{M} - (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}) \left( c_v - \frac{9}{2} \frac{R}{M} \right) \right) \end{aligned}$$

Сокращая массу и приводя подобные слагаемые, получаем выражение для искомой удельной теплоты конденсации:

$$L_{\text{конд}} = L_{100^\circ\text{C}} + \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{конд}}}{\rho_v} + (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}) \left( c_v - \frac{11}{2} \frac{R}{M} \right) = 2,28 \text{ МДж/кг}$$

Разница между значениями удельной теплоты парообразования (конденсации) при разных температурах:

$$\Delta L = L_{\text{конд}} - L_{100^\circ\text{C}} = \frac{p_{\text{атм}} - p_{\text{конд}}}{\rho_v} + (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}) \left( c_v - \frac{11}{2} \frac{R}{M} \right) = 21,6 \text{ кДж/кг}$$

Интересно отметить, что если в сумме пренебречь первым слагаемым, содержащим давления (а оно на самом деле малое), то разница  $\Delta L$  оказывается прямо пропорциональна разности температур  $T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}$ , а коэффициентом пропорциональности оказывается разность удельных теплоемкостей воды и пара при изобарном процессе.

**В3.** Для определения КПД цикла воспользуемся выражением:

$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{пол}}} = \frac{Q_{\text{пол}} - Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{пол}}} = 1 - \frac{Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{пол}}}$$

Теплота поступает в систему на этапе 6-1-2-3. Ее несложно рассчитать, используя уже записанные выше выражения:

$$Q_{\text{пол}} = Q_{6-1} + Q_{1-2} + Q_{2-3} = c_v m (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}) + L_{100^\circ\text{C}} m + \frac{11}{2} \frac{m}{M} R (T_{\text{max}} - T_{\text{кип}})$$

Отдает теплоту система во время конденсации водяного пара. Отдаваемую теплоту несложно определить, используя результаты предыдущего пункта:

$$Q_{\text{отд}} = L_{T_{\text{конд}}} m$$

Тогда КПД цикла равен:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{пол}}} = 1 - \frac{L_{T_{\text{конд}}}}{c_v (T_{\text{кип}} - T_{\text{конд}}) + L_{100^\circ\text{C}} + \frac{11}{2} \frac{R}{M} (T_{\text{max}} - T_{\text{кип}})} = 3,54 \%$$

Тепловая машина Карно с такой же максимальной и минимальной температурой работала бы с КПД:

$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{T_{\text{конд}}}{T_{\text{max}}} = 8,40 \%$$

Предложенный тепловой двигатель, как видим, обладает небольшим КПД, однако он всего в 2,4 раза меньше наилучшего возможного КПД при тех же температурах.

## Задача 11-1. «Разминка»

### Задача 1.1

Для расчета периодов колебаний можно использовать как динамический, так и энергетический подход. Воспользуемся энергетическим подходом. В рамках этого метода необходимо ввести некоторую переменную величину  $x$ . Далее необходимо найти кинетическую энергию системы, представив ее в виде

$$E_k = Mv^2. \quad (1)$$

Где  $v = x'$  - первая производная от координаты по времени,  $M$  - постоянная величина. Найти потенциальную энергию, как функцию координаты  $U(x)$ , Полагая смещение от положения равновесия малым, записать приближенное выражение для изменения потенциальной энергии, оставляя только квадратичные слагаемые, т.е. представив это изменение в виде

$$U = Kx^2. \quad (2)$$

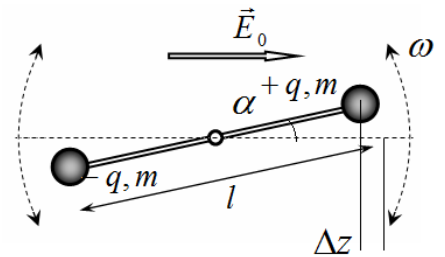
Где  $K$  - также постоянная величина. Затем записать уравнение закона сохранения энергии:

$$Mv^2 + Kx^2 = const, \quad (3)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}. \quad (4)$$

1.1.1 В положении равновесия ось маятника совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля. В качестве координаты будем рассматривать угол отклонения маятника от этого направления  $\alpha$ . Производная от этого угла есть угловая скорость вращения  $\omega$ .



Кинетическая энергия маятника легко рассчитывается по формулам

$$E_k = 2\frac{mv^2}{2} = m\left(\frac{l}{2}\omega\right)^2 = \frac{ml^2}{4}\omega^2. \quad (5)$$

Потенциальная энергия каждого шарика выражается через разность потенциалов в положении равновесия и в отклоненном положении. Поэтому

$$\Delta U = 2q\Delta\phi = 2qE\Delta z = 2qE\frac{l}{2}(1 - \cos\alpha) = qEl\frac{\alpha^2}{2}. \quad (6)$$

Используя формулу (4) и полученные выражения для энергий находим период колебаний

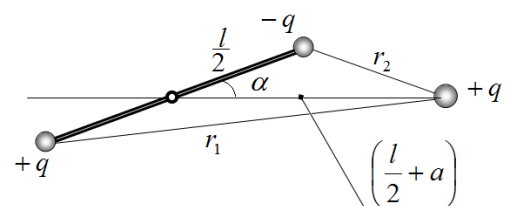
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{2qE}}. \quad (7)$$

1.1.2 Выражение для кинетической энергии (5)

справедливо и в данном случае.

Рассмотрим потенциальную энергию взаимодействия зарядов на маятнике с одним из неподвижных зарядов. Энергия взаимодействия шариков выражается формулой (см. рис.)

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \quad (8)$$



Расстояния между шариками можно выразить из теоремы косинусов:

$$r_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2} + a\right)^2 \pm 2\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)\cos\alpha}. \quad (9)$$

В формулу для потенциальной энергии входят величины обратные расстояниям, поэтому сразу проведем их разложение, учитывая малость угла  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} r_{1,2}^{-1} &= \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2} + a\right)^2 \pm 2\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)\cos\alpha\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2} + a\right)^2 \pm 2\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2}\right)^2 \mp \left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2}\right)^{-1} \left(1 \mp \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{\left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2}\right)^2}\alpha^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \\ &= \left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2}\right)^{-1} \left(1 \pm \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{\left(\frac{l}{2} + a \pm \frac{l}{2}\right)^2}\alpha^2\right) \end{aligned}$$

Запишем эти выражения отдельно:

$$\begin{aligned} r_1^{-1} &= (l+a)^{-1} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{(l+a)^2}\alpha^2\right) = (l+a)^{-1} + \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{(l+a)^3}\alpha^2 \\ r_2^{-1} &= a^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{a^2}\alpha^2\right) = a^{-1} - \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{a^3}\alpha^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь подставим их в формулу для кинетической энергии (не зависящие от  $\alpha$  слагаемые опускаем):

$$U = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{(l+a)^3} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{a^3}\right)\alpha^2 \quad (11)$$

Снова используем формулу (5) для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi\epsilon_0 ml^2}{q^2 \left(\frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{(l+a)^3} + \frac{\left(\frac{l}{2}\right)\left(\frac{l}{2} + a\right)}{a^3}\right)}}. \quad (12)$$

1.1.3 Так как выражение для кинетической энергии остается неизменным, то необходимо только просуммировать выражения для энергии потенциальных (фактически сложить два коэффициента  $K$  в формуле (5)). Это приведет к тому, что для периодов колебаний будет выполняться соотношение:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2^2} \Rightarrow T = \frac{T_1 \cdot T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}. \quad (13)$$

## Задача 1.2

1.2.1 В данном случае будет наблюдаться дифракция на решетке: возникать равноотстоящие пятна.

Период данной решетки равен

$$d = 2h = 20 \text{ мкм} = 2,0 \cdot 10^{-5} \text{ м} \quad (1)$$

По формуле дифракционной решетки определим углы дифракции:

$$d \sin \theta_m = m\lambda \Rightarrow \sin \theta_m = \frac{m\lambda}{d}. \quad (2)$$

Пятна на экране, соответствующие данным углам дифракции, будут отстоять от центрального максимума на расстояниях

$$x_m = L \operatorname{tg} \theta_m. \quad (3)$$

В таблице 1 рассчитаны эти углы для нескольких первых максимумов.

Таблица 1.

$m$	$\sin \theta_m$	$x$ , мм
1	0,0275	27,5
2	0,0550	55,0
3	0,0825	82,5
4	0,1100	110,0

Как следует из проведенных расчетов, углы дифракции являются малыми, поэтому можно считать, что их тангенсы и синусы равны. В последнем столбце приведены координаты максимумов. Видно, что четвертый максимум окажется за пределами экрана.

Далее необходимо учесть, что штрихи являются изогнутыми. Поэтому пятна также будут изогнутыми и представлять собой симметричные дуги окружностей.

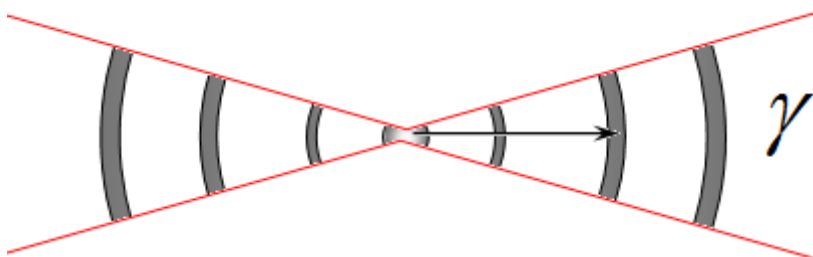
Схематически положение этих пятен при попадании света на разные части дуг решетки, показаны на рисунке (масштабы дуг решетки и расстояний до пятен не соблюдены). Вычислим угловой размер дуговых пятен, который совпадает с угловым размером лазерного пучка на решетке.

Этот угловой размер не сложно вычислить с помощью рисунка:

$$\gamma = 2 \arcsin\left(\frac{a}{2l}\right) \approx 11^\circ \quad (4)$$



На следующем рисунке показана схематически дифракционная картина.



1.2.2 При изменении расстояния  $l$  дифракционная картина сместится на такое же расстоянии, угловой размер пятен уменьшится приблизительно в два раза.

## Задача 11-2. «Кольцевая»

### Часть 1. Электрическое поле кольца.

1.1 Напряженность электрического поля, создаваемого зарядом кольца легко рассчитывается с помощью закона Кулона и принципа суперпозицию

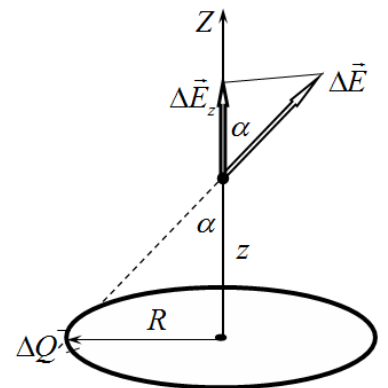
Разобьем кольцо на малые участки, заряд каждого из них обозначим  $\Delta Q_i$ . В точке наблюдения вектор напряженности поля  $\Delta \vec{E}_i$ , создаваемого этим зарядом, направлен вдоль линии, соединяющей заряд и точку наблюдения. Величина этого вектора может быть рассчитана по закону Ш. Кулона

$$\Delta E_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

где  $r = \sqrt{z^2 + R^2}$  - расстояние от заряда до точки наблюдения.

Из симметрии задачи следует, что результирующий вектор напряженности направлен вдоль оси кольца. Поэтому для его расчета достаточно просуммировать проекции векторов  $\Delta \vec{E}$  на эту ось  $\Delta E_{iz} = \Delta E_i \cos \alpha = \Delta E_i \frac{z}{r}$ . Просуммируем

проекции векторов напряженностей полей, создаваемых всеми зарядами, на которые мы разбили кольцо



$$E_z = \Delta E_{1z} + \Delta E_{2z} + \dots = \sum_i \Delta E_{iz} = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \cos \alpha.$$

Так как все заряды находятся на равных расстояниях  $r$  от точки наблюдения, а векторы  $\Delta \vec{E}_i$  образуют равные углы  $\alpha$  с осью  $Z$ , вычисление этой суммы сводится суммированию зарядов (постоянные множители можно вынести за знак суммы):

$$E_z = \sum_i \frac{\Delta Q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}} = E_0 \frac{\xi}{(1 + \xi^2)^{3/2}}. \quad (1)$$

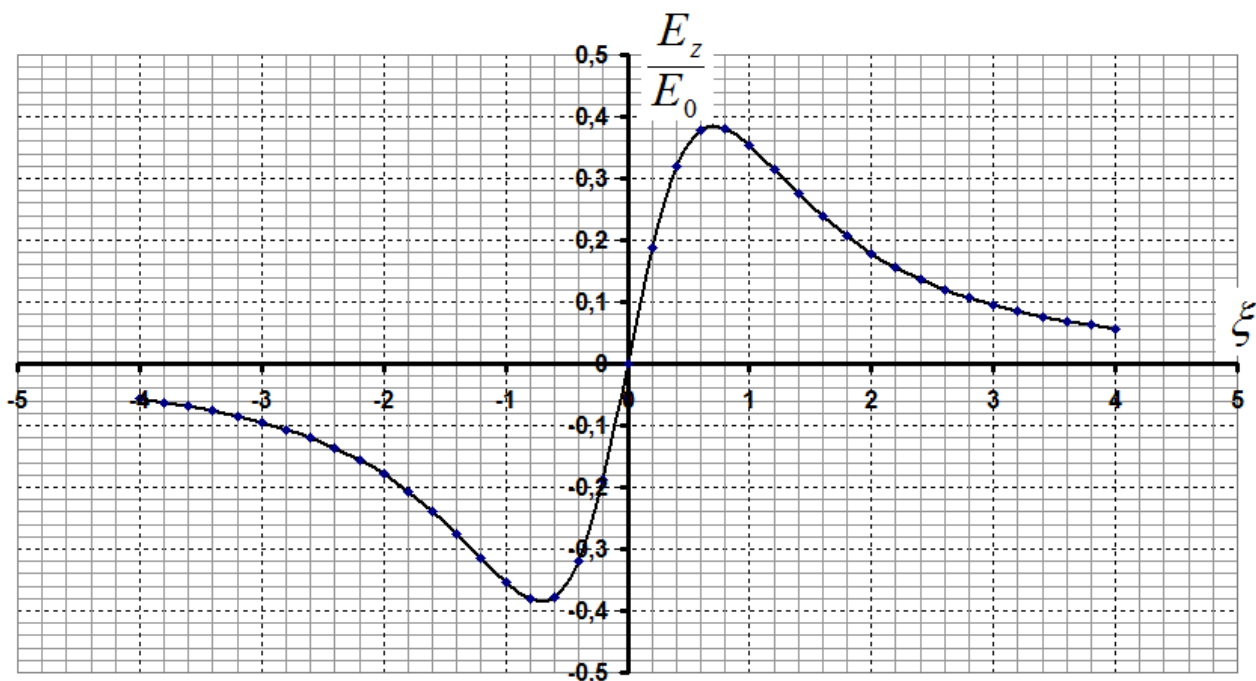
1.2 График функции  $\frac{E_z}{E_0}(\xi)$  может быть построен традиционными способами. Результат построения показан на рисунке.

1.3 При  $z \gg R$  напряженность поля выражается формулой

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}, \quad (2)$$

Что совпадает с полем точечного заряда, что и следовало ожидать.

График 1.2 Напряженность электрического поля кольца.



1.4 Ось диполя совпадает с направлением вектора напряженности внешнего электрического поля. Совместим ось  $x$  системы координат с направлением вектора напряженности. Результирующая сила, действующая на диполь, равна векторной сумме сил, действующих на заряды диполя,

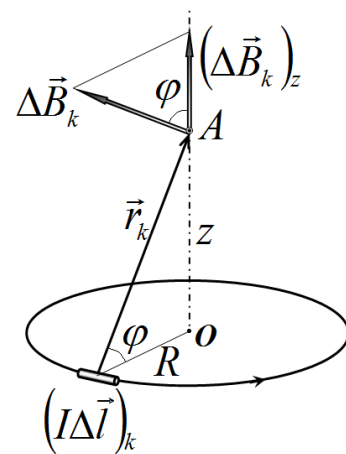
$$F = F_+ - F_- = q(E(z+a) - E(z)) = qa \frac{\Delta E}{\Delta z} = p_e \frac{\Delta E_z}{\Delta z}. \quad (3)$$

Используя полученную формулу и выражение для напряженности поля (2)

$$F = p_e \frac{\Delta E_z}{\Delta z} = p_e \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \right)' = -\frac{p_e Q}{4\pi\epsilon_0 z^3}. \quad (4)$$

## Часть 2. Магнитное поле кольца.

- найдем индукцию поля в точке  $A$ , находящейся на оси кольца на расстоянии  $z$  от его центра. Выделяем малый участок кольца  $(I\Delta\vec{l})_k$  и строим вектор индукции поля  $\Delta\vec{B}_k$ , созданным этим элементом, в рассматриваемой точке. Это вектор перпендикулярен вектору  $\vec{r}_k$ , соединяющему выделенный участок с точкой наблюдения. Векторы  $(I\Delta\vec{l})_k$  и  $\vec{r}_k$ , как и ранее, перпендикулярны, поэтому  $\sin \alpha = 1$ . Так кольцо обладает осевой симметрией, то суммарный вектор индукции поля в точке  $A$  должен быть направлен по оси кольца. К этому же выводу о направлении суммарного вектора индукции можно прийти, если заметить, что каждому выделенному участку кольца имеется симметричный ему с противоположной стороны, а сумма двух симметричных векторов направлена вдоль оси кольца. Таким образом, для того чтобы определить модуль суммарного вектора индукции, необходимо просуммировать проекции векторов на ось кольца. Эта операция не представляет особой сложности, если учесть, что расстояния от всех точек кольца до точки наблюдения одинаковы  $r_k = \sqrt{R^2 + z^2}$ , а также



одинаковы углы  $\varphi$  между векторами  $\vec{\Delta B}_k$  и осью кольца. Запишем выражение для модуля искомого суммарного вектора индукции

$$B = \sum_k \Delta B_{zk} = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\Delta l)_k}{r^2} \cos\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos\varphi}{r^2} \sum_k \Delta l_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cos\varphi}{r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I R}{2r^2} \cos\varphi.$$

Из рисунка следует, что  $\cos\varphi = \frac{R}{r}$ , с учетом выражения для расстояния  $r$ , получим окончательное выражение для вектора индукции поля

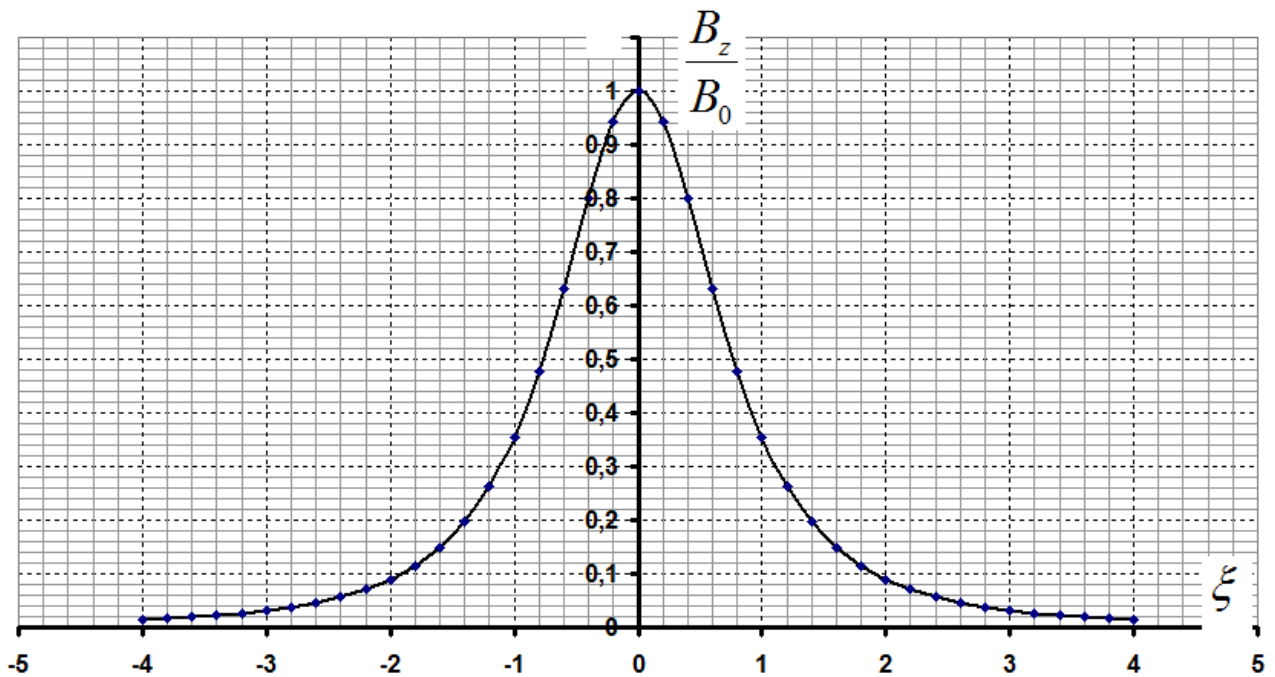
$$B = \frac{\mu_0 I R}{2r^2} \cos\varphi = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (5)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2R} \cdot \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{B_0}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (6)$$

График этой функции показан на следующем рисунке.

График 2.2 Магнитное поле кольцевого тока.



2.3 При  $z \gg R$  формула (6) принимает вид

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}. \quad (7)$$

2.4 Сила, действующая на магнитный диполь, рассчитывается по формуле

$$F_z = p_m \frac{\Delta B_z}{\Delta z} = p_m \left( \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \right)' = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 I R^2}{z^4} p_m. \quad (8)$$



### Часть 3. Взаимодействие постоянных магнитов.

Согласно подтвержденной ныне гипотезе Ампера поле постоянного магнита эквивалентно полю молекулярных токов, протекающих по его поверхности.

Для соотнесения этих полей следует приравнять магнитные моменты магнита и соответствующего тока. Так в случае цилиндрического магнита можно записать

$$JSh = IS. \quad (9)$$

где  $S$  - площадь основания магнита,  $I$  - сила эквивалентного тока протекающего по боковой поверхности магнита. Таким образом, поле данного магнита совпадает с полем кругового тока силой  $I = Jh$ , протекающего по кольцу радиуса  $R$ . Далее можно использовать все формулы, полученные в Части 2.

3.1 Так индукция в центре диска рассчитывает по формуле (5) при  $z = 0$  :

$$B_0(z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 Jh}{2R}. \quad (10)$$

3.2 Индукция поля на оси диска  $B_z(z)$  описывается той же формулой

$$B(z) = \frac{\mu_0 Jh}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (11)$$

3.3 Для силы взаимодействия применима формула (8)

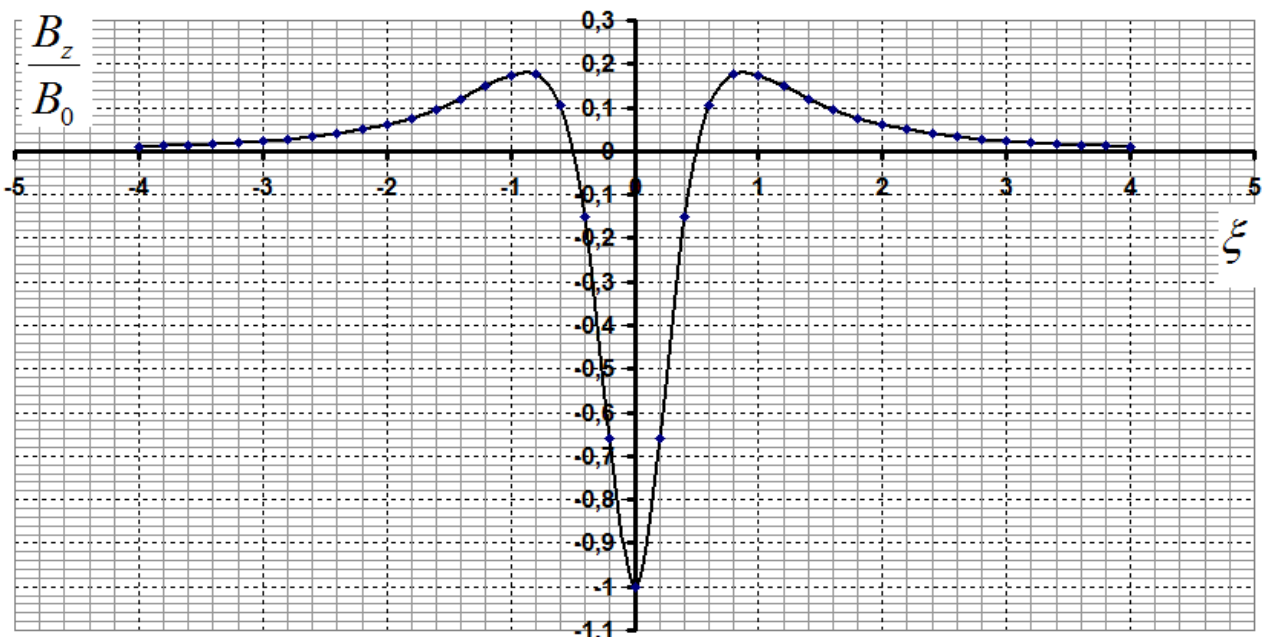
$$F_z = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0 IR^2}{L^4} p_m = \frac{3}{2} \frac{\mu_0 JhR^2}{L^4} Jh\pi R^2 = \frac{3}{2\pi} \frac{\mu_0 (Jh\pi R^2)^2}{L^4}. \quad (12)$$

3.4 Поле молекулярных токов, текущих по внутренней поверхности тока эквивалентно толю кругового тока силой  $I = -Jh$ , протекающего по кольцу радиуса  $\frac{R}{2}$ . Поэтому величина индукции поля кольцевого магнита описывается «составной» формулой:

$$B(z) = \frac{\mu_0 Jh}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu_0 Jh}{2} \cdot \frac{R^2/4}{(R^2/4 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = B_0 \left( \frac{1}{(1 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{0,25}{(0,25 + \xi^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \quad (13)$$

График этой функции показан на последнем рисунке.

График 3.4 Поле кольцевого магнита.



### Задача 11.3 «Пилообразный и импульсный ток»

1.

1.1. Период колебаний напряжения  $T=3,0\text{мс}$ .

1.2. Зависимости  $U(t)$  на временном интервале  $0,0 - 0,50\text{мс}$  прямо пропорциональная. Зависимости  $U(t)$  имеет вид:

$$U = k_1 t \quad (1),$$

$$\text{где } k_1 = 8,0 \frac{\text{кВ}}{\text{с}}.$$

На временном интервале  $0,50 - 2,5\text{мс}$  зависимости  $U(t)$  линейная. Зависимости  $U(t)$  имеет вид:

$$U = U_0 + k_2 t \quad (2),$$

$$\text{где } k_2 = -4,0 \frac{\text{кВ}}{\text{с}}, U_0 = 6,0\text{В}.$$

1.3. Если напряжение в электрической цепи, содержащей конденсатор, изменяется, то в цепи течёт ток зарядки или перезарядки конденсатора. Для получения зависимости  $I(t)$  воспользуемся уравнением

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (3).$$

Заряд конденсатора определяется уравнением

$$q = CU \quad (4).$$

На временном интервале  $0,0 - 0,50\text{мс}$

$$q = Ck_1 t \quad (5).$$

Следовательно:

$$\Delta q = Ck_1 \Delta t \quad (6),$$

$$I_1 = Ck_1 = 1,0\text{мкФ} \cdot 8,0 \frac{\text{кВ}}{\text{с}} = 8,0\text{мА} \quad (8).$$

На временном интервале и  $0,50 - 2,5\text{мс}$

$$q = CU_0 + Ck_2 t \quad (9).$$

Следовательно:

$$\Delta q = Ck_2 \Delta t \quad (10),$$

$$I_2 = Ck_2 = 1,0\text{мкФ} \cdot \left(-4,0 \frac{\text{кВ}}{\text{с}}\right) = -4,0\text{мА} \quad (11).$$

При заданной форме напряжения сила тока в электрической цепи, содержащей источник напряжения и конденсатор, от времени не зависит.

1.4. График зависимости  $I(t)$  на временном интервале в два периода представлен на рисунке 10.

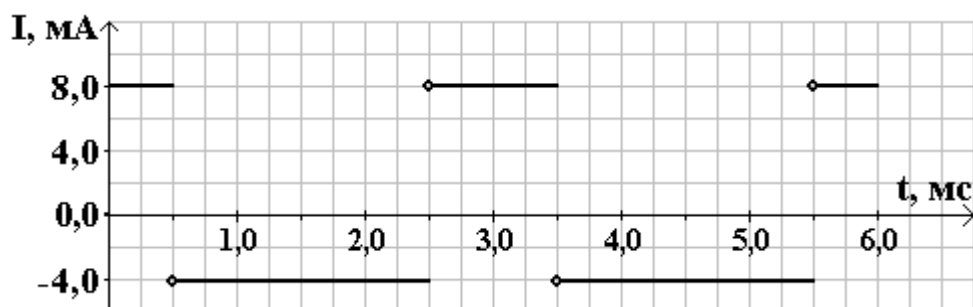


Рисунок 10.

2.

2.1. На временном интервале  $0,0 - 1,0\text{мс}$  зависимость  $U(t)$  прямо пропорциональная

$$U(t) = k_3 t \quad (12),$$

где

$$k_3 = 4,0 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{с}}.$$

Так как, согласно условию задачи, полное сопротивление цепи равно нулю, то Закон Ома для полной цепи приобретает вид:

$$U + \mathcal{E}_{si} = 0 \quad (13).$$

Так как

$$\mathcal{E}_{si} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (14),$$

то

$$U - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \quad (15).$$

Следовательно

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = U \quad (16),$$

откуда

$$\Delta I = \frac{U}{L} \Delta t \quad (17).$$

Подставляя в (17) уравнение (12) получим:

$$\Delta I = \frac{k_3 t}{L} \Delta t \quad (18),$$

откуда

$$\Delta I = \frac{k_3}{2L} \Delta(t^2) \quad (19),$$

$$I = \frac{k_3}{2L} t^2 \quad (20).$$

На временном интервале 1,0 – 2,0мс  $U(t) = 0$ .

Закон Ома для полной цепи приобретает вид:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \quad (21),$$

откуда  $\Delta I = 0$ , следовательно

$$I(t) = \text{const} \quad (22).$$

Сила тока на указанном временном интервале остаётся постоянной и имеет значение, как и в момент времени 1,0мс. Обозначим  $t_1 = 1,0\text{мс}$ , тогда

$$I(t) = I(t_1) = \frac{k_3}{2L} t_1^2 = \frac{4,0 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{с}}}{2 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} \text{Гн}} \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \text{с}^2 = 2,0 \text{А}.$$

2.2. График зависимости силы тока от времени  $I(t)$  на временном интервале 0,0 – 5,0мс представлен на рисунке 11.

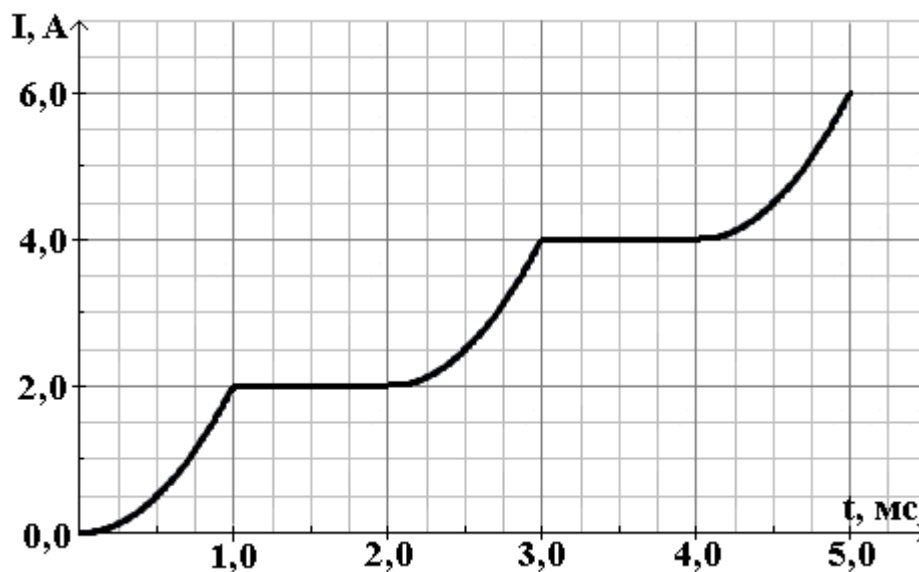


Рисунок 11.

3.

3.1. Средняя тепловая мощность будет определяться зависимостью модуля напряжения и силы тока от времени. Построим графики данных зависимостей (см. рис. 12, 13).

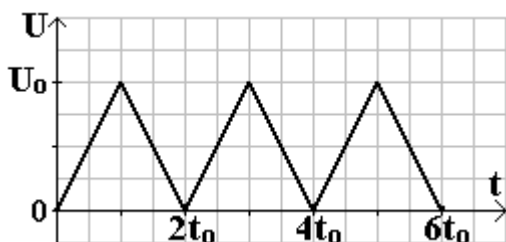


Рисунок 12. Зависимость модуля напряжения от времени

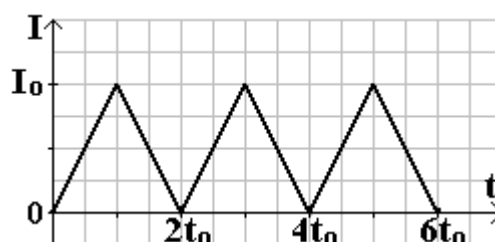


Рисунок 13. Зависимость модуля силы тока от времени

«Произведение» зависимостей на рисунках 12 и 13 даст нам зависимость мощности, выделяющейся на резисторе, от времени. Несложно догадаться, что зависимость  $P(t)$  будет «состоять» из симметричных кусочков парабол (рис. 14) с максимальной точкой  $P_0 = U_0 I_0$ .

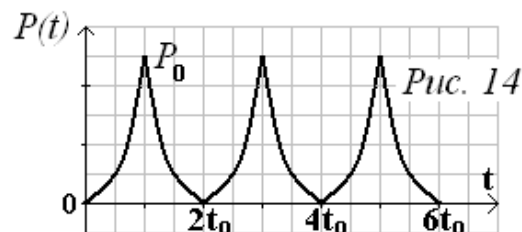


Рис. 14

Средняя тепловая мощность за длительный промежуток времени будет равна средней тепловой мощности за период колебаний модуля силы тока и напряжения.

Так как на временном интервале, равном периоду колебаний модуля силы тока и напряжения, графики данных величин симметричны относительно прямой, проходящей через точку максимума и перпендикулярной оси времени, то средняя тепловая мощность за первую половину периода  $t_0$  будет равна средней тепловой мощности за вторую половину периода и равна средней тепловой мощности за период. Таким образом, достаточно определить среднюю тепловую мощность за первую половину периода  $t_0$  колебаний модуля силы тока и напряжения.

Определим мгновенное значение тепловой мощности на временном интервале  $[0, t_0]$ .

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) \quad (23),$$

где

$$U(t) = \frac{U_0}{t_0} t \quad (24), \quad I(t) = \frac{I_0}{t_0} t \quad (25).$$

Подставляя (24) в (25) получим:

$$P(t) = \frac{U_0 I_0}{t_0^2} t^2 \quad (26).$$

С другой стороны, мгновенную мощность можно определить как

$$P(t) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad (27).$$

Приравняв (26) и (27) и выполняя преобразования, получим:

$$\Delta Q = \frac{U_0 I_0}{t_0^2} t^2 \Delta t \quad (28),$$

откуда

$$Q(t) = \frac{U_0 I_0}{3 t_0^2} t^3 \quad (29).$$

Теплота, выделяемая за половину периода колебаний модуля силы тока и напряжения

$$Q(t_0) = \frac{U_0 I_0 t_0}{3} \quad (30).$$

Средняя тепловая мощность, выделяемая на резисторе  $R_0$ :

$$\langle P \rangle = \frac{Q(t_0)}{t_0} = \frac{U_0 I_0}{3} \quad (31),$$

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2 R_0}{3} \quad (32), \quad \langle P \rangle = \frac{U_0^2}{3 R_0} \quad (33).$$

3.2. Среднюю тепловую мощность, выделяемую на резисторе  $R_0$ , через действующие значения силы тока и напряжения можно определить как:

$$\langle P \rangle = I_d^2 R_0 \quad (34), \quad \langle P \rangle = \frac{U_d^2}{R_0} \quad (35).$$

Приравняв (32) и (34), (33) и (35) получим:

$$I_d = \frac{I_0}{\sqrt{3}} \quad (36), \quad U_d = \frac{U_0}{\sqrt{3}} \quad (37).$$

#### 4.

4.1. Изобразим эквивалентные схемы заданной электрической цепи для положительной и отрицательной части периода (рис. 15 и 16)

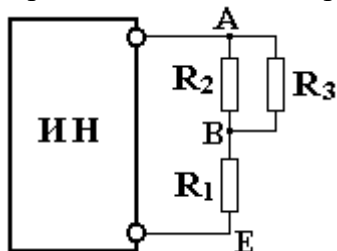


Рисунок 15. Эквивалентная схема электрической цепи для положительной части периода

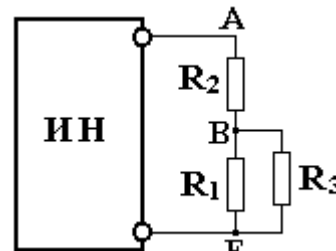


Рисунок 16. Эквивалентная схема электрической цепи для отрицательной части периода

Зависимости силы тока от времени  $I_3(t)$  на резисторе  $R_3$  на положительной части периода

$$I_3(t) = \frac{U_{AB}(t)}{R_3} \quad (38)$$

Где

$$R_{AB} = \frac{4}{3} \text{ Ом} \quad (39), \quad U_{AB}(t) = \frac{2U(t)}{5} \quad (40).$$

$$I_3(t) = \frac{U(t)}{5} \quad (41).$$

Для второго интервала получим

$$R_{BE} = \frac{R_3}{2} = 1,0 \text{ Ом} \quad , \quad U_{BE}(t) = \frac{U(t)}{5}$$

График зависимости силы тока от времени  $I_3(t)$  на резисторе  $R_3$  на временном интервале в два периода представлен на рисунке 17.



Рисунок 17.

4.2. Для определения количества теплоты построим графики зависимостей модуля напряжения и силы тока на резисторе  $R_3$  от времени (рис. 18 и 19).

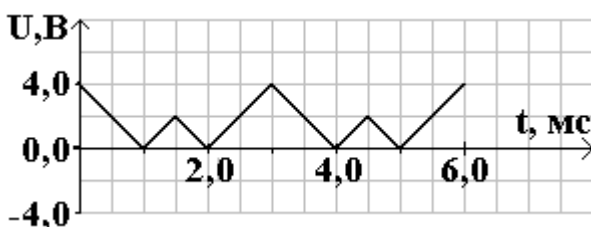


Рисунок 18. Зависимость модуля напряжения от времени

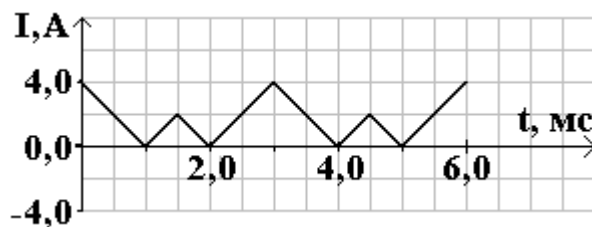


Рисунок 19. Зависимость модуля силы тока от времени

Обозначим среднее значение тепловой мощности выделяющейся на положительной части периода  $\langle P \rangle_1$ , на отрицательной части периода –  $\langle P \rangle_2$ .

Обозначим максимальные значения модулей напряжения и силы тока на положительной части периода  $U_{01}$  и  $I_{01}$ , на отрицательной части периода –  $U_{02}$  и  $I_{02}$ . Из графиков (рис. 8 и 16) следует, что период колебаний силы тока и напряжения одинаков и составляет 3,0мс. Длительность положительной части периода равна 2,0мс, отрицательной 1,0мс.

Тогда

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (42), \quad Q = \langle P \rangle_1 \cdot \frac{2}{3} \Delta t + \langle P \rangle_2 \cdot \frac{1}{3} \Delta t \quad (43).$$

Применяя равенство (31) получим:

$$\langle P \rangle_1 = \frac{U_{01} I_{01}}{3} \quad (44), \quad \langle P \rangle_2 = \frac{U_{02} I_{02}}{3} \quad (45).$$

Подставляя (44) и (45) в (43) получим:

$$Q = \frac{2U_{01}I_{01}}{9} \Delta t + \frac{U_{02}I_{02}}{9} \Delta t = (2U_{01}I_{01} + U_{02}I_{02}) \frac{\Delta t}{9} \quad (46).$$

По графикам (рис. 18 и 19) определяем:

$$U_{01} = 4,0\text{В}; \quad I_{01} = 4,0\text{А}; \quad U_{02} = 2,0\text{В} \quad I_{02} = 2,0\text{А}.$$

Подставляя эти значения в (45) получим:

$$Q = (2 \cdot 4,0\text{В} \cdot 4,0\text{А} + 2,0\text{В} \cdot 2,0\text{А}) \frac{6,0\text{мс}}{9} = 24\text{мДж}. \quad (47)$$