

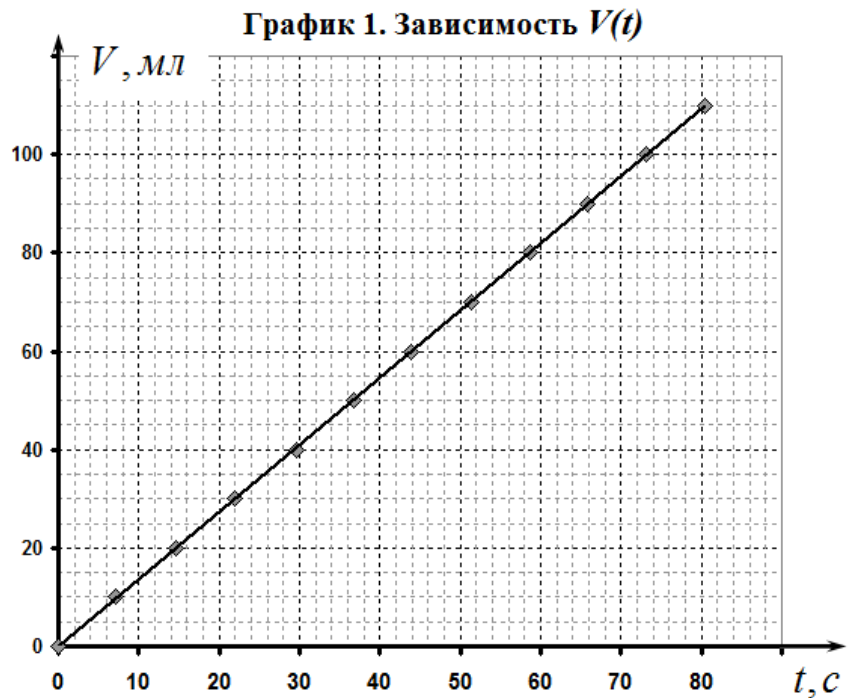
Задание 9.1 Вытекание из бутылки.

Часть 1. Закон вытекания.

1.1 Результаты измерений зависимости объема вытекающей жидкости $V(t)$ от времени приведены в таблице 1 и на графике 1. Измерения проведены при разности уровней трубок в сосуде $h = 5,5\text{ см}$

Таблица 1.

$V, \text{мл}$	$t, \text{сек}$
0	0,00
10	7,11
20	14,58
30	22,02
40	29,54
50	36,76
60	43,81
70	51,29
80	58,66
90	65,75
100	73,18
110	80,37



1.1 Данная зависимость с высокой степенью точностью является прямо пропорциональной вида

$$V = qt . \tag{1}$$

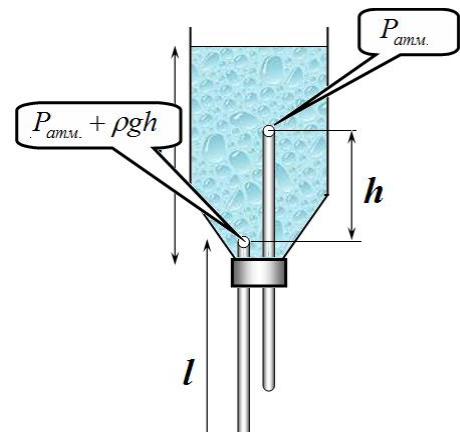
Коэффициент пропорциональности имеет очевидный смысл расхода жидкости

$q = \frac{\Delta V}{\Delta t}$. Его численное значение в данном случае можно определить по наклону

графика, он равен $q = 1,37 \frac{\text{мл}}{\text{с}}$.

1.3 Так полученная зависимость линейна, то скорость вытекания является постоянной, не смотря на то, что в процессе вытекания уровень жидкости в сосуде H заметно изменяется.

1.4 Разумно предположить, что скорость вытекания определяется разностью давления на концах трубки, через которую вытекает вода. Давление воды на верхнем срезе верхней трубки примерно равно атмосферному давлению. Поэтому давление на нижнем уровне нижней трубки остается постоянным и не зависящем от уровня жидкости в бутылке.



Часть 2. От чего зависит расход?

2.1 В таблице 2 показаны результаты измерений зависимости времени вытекания t жидкости объемом $V_0 = 100 \text{ мл}$ от разности уровней трубок h . Измерения проведены дважды (от участников достаточно одной серии измерений). Расход рассчитан по формуле $q = \frac{V_0}{\langle t \rangle}$, где $\langle t \rangle$ - среднее время вытекания при заданном значении h . График зависимости $q(h)$ показан на рисунке.

Таблица 2.

h , мм	t_1 , с	t_2 , с	$\langle t \rangle$, с	q , $\frac{\text{мл}}{\text{с}}$
55	73,18	72,02	72,60	1,38
45	76,06	75,32	75,69	1,32
35	81,8	81,51	81,66	1,22
25	91,36	87,81	89,59	1,12
15	96,31	95,58	95,95	1,04
5	105,64	107,04	106,34	0,94

Полученная зависимость является линейной, но не прямо пропорциональной. Она описывается функцией

$$q = ah + b$$

(2)

Параметры этой зависимости, найденные из графика равны

$$a = 8,9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{мл}}{\text{с} \cdot \text{мм}},$$

$$b = 0,90 \frac{\text{мл}}{\text{с}}.$$

Данную зависимость удобно представить в виде

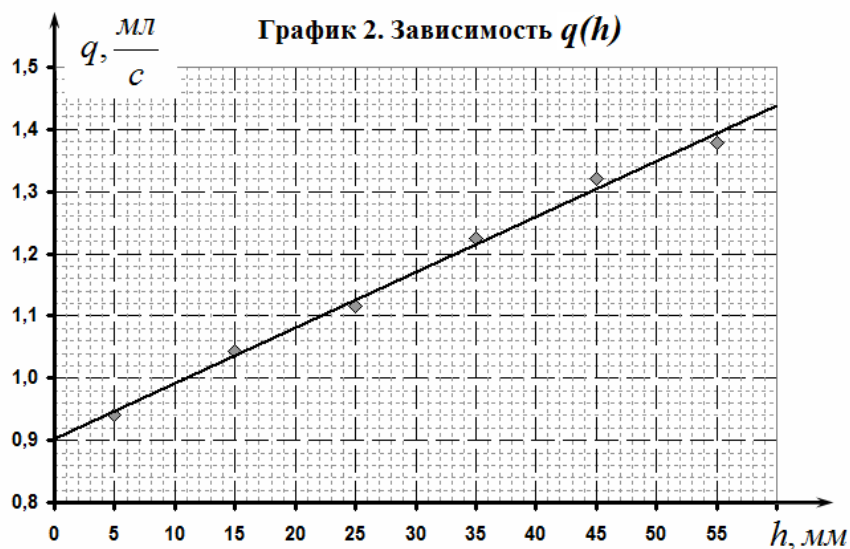
$$q = ah + b = a(h + l')$$

(3)

В такой записи параметр $l' = \frac{b}{a} \approx 10 \text{ см}$.

Полученная зависимость качественно объясняется следующим образом: расход жидкости пропорционален разности давлений на концах трубки, которая примерно равна гидростатическому давлению столба воды высотой $h + l$, где l - длина трубки. Отличие полученного значения l' от длины трубки $l \approx 6 \text{ см}$ объясняется дополнительным давлением, создаваемым струей вытекающей воды (тем самым увеличивается эффективная длина трубки).

Параметрам a и b в зависимости (2) также можно приписать определенный физический смысл:



b - расход жидкости при $h = 0$, в этом случае разность давлений создается только жидкостью в трубке, через которую течет вода. Такой эксперимент можно провести, в этом случае нельзя заранее предсказать, через какую из двух трубок потечет вода.

a - расход жидкости через трубку, если разность давлений на ее концах создается водяным столбом в 1 мм.

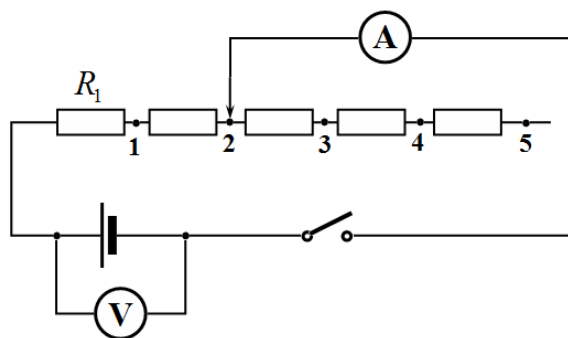
Задание 9-2. Правду ли нам говорят?

Часть 1. Чему равен нуль?

1.1 Результаты измерений зависимостей напряжения на вольтметре U_n и силы тока через амперметр I_n от номера точки подключения n приведены в Таблице 1. Также в ней приведены и результаты расчетов, которые требуются в последующих пунктах этой части задания.

Таблица 1.

n	I_n, A	$U_n, \text{В}$	$U_n / I_n, \text{Ом}$
0	0,45	1,55	3,444
1	0,25	2,45	9,800
2	0,20	2,70	13,500
3	0,15	2,95	19,667
4	0,11	3,09	28,091
5	0,10	3,20	32,000



1.2 Из закона Ома следует, что сила тока в цепи равна

$$I_n = \frac{U_n}{nR_1 + R_A}. \quad (1)$$

1.3 Из этой формулы следует, что отношение $Z_n = \frac{U_n}{I_n}$ линейно зависит от номера точки подключения.

$$\frac{U_n}{I_n} = nR_1 + R_A \quad (2)$$

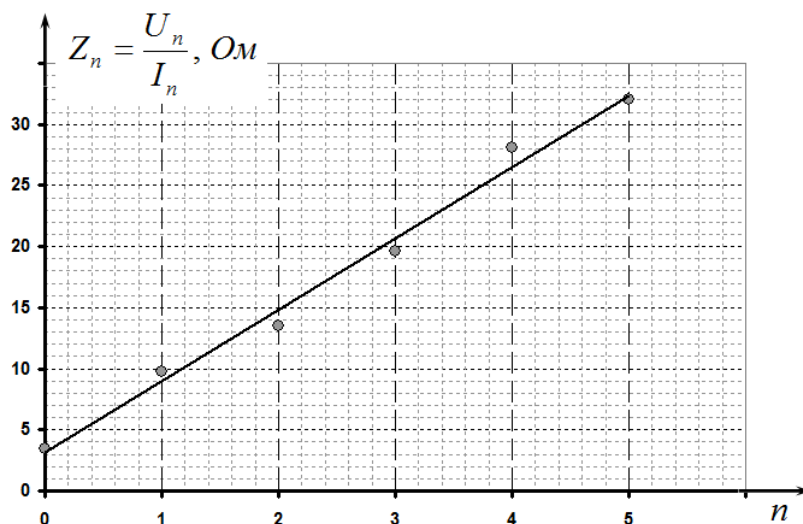


График данной зависимости показан на рисунке.

Из вида функции (2) следует, что коэффициент наклона графика равен сопротивлению R_1 , а его сдвиг сопротивлению амперметра R_A . Из данного графика находим

$$R_A = 3,2 \text{ Ом}, \quad R_1 = 5,8 \text{ Ом}$$

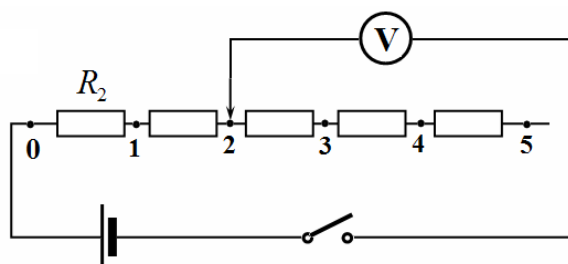
Погрешности данных значений также могут быть оценены графически (либо другим способом). В любом случае они оказываются не менее $\Delta R \approx 1,5 \text{ Ом}$.

Часть 2. Чему равна бесконечность?

2.1 Результаты измерений зависимости напряжения на вольтметре U_n от номера точки подключения n приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

n	$U_n, \text{В}$	U_n / U_0
0	4,50	1,00
1	1,60	2,81
2	0,95	4,74
3	0,70	6,43
4	0,55	8,18
5	0,45	10,00



2.2 Для получения теоретической зависимости напряжения U_n и номера точки подключения n запишем закон Ома для данной цепи

$$I_n = \frac{U_0}{nR_2 + R_V} \quad (3)$$

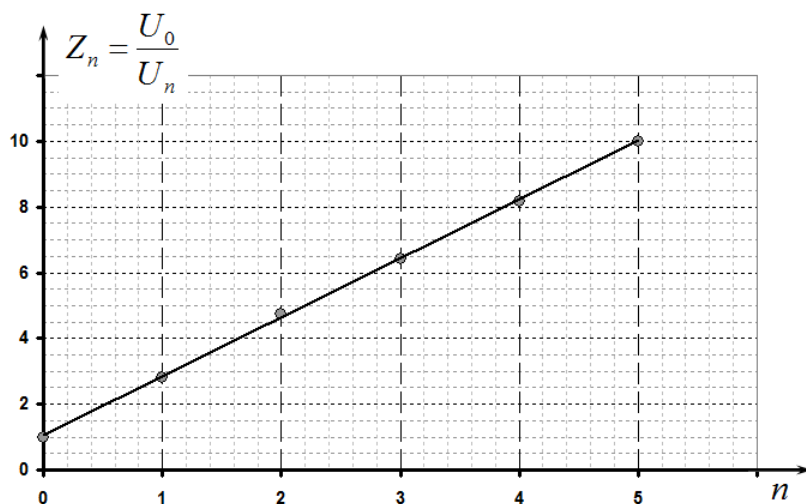
Из этой формулы следует, что измеряемое напряжение на вольтметре определяется формулой

$$U_V = R_V \frac{U_0}{nR_2 + R_V} = \frac{U_0}{n \frac{R_2}{R_V} + 1}. \quad (4)$$

2.3 Из полученного выражение следует, что величина $Z_n = \frac{U_n}{U_V}$ линейно зависит от номера точки подключения:

$$\frac{U_n}{U_V} = n \frac{R_2}{R_V} + 1. \quad (5)$$

График этой функции показан на рисунке. Сдвиг прямой с высокой точностью равен 1, что подтверждает применимость формулы (5), коэффициент наклона прямой примерно равен $k = \frac{\Delta Z}{\Delta n} \approx 1,8$. Из формулы (5) следует, что этот коэффициент равен отношению $\frac{R_2}{R_V}$. Это



позволяет найти значение сопротивления вольтметра (в наших измерениях использовались резисторы $R_2 = 11 \text{ кОм}$):

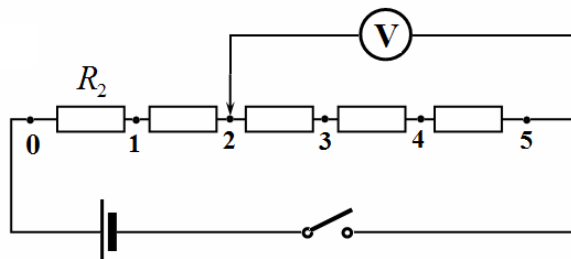
$$\frac{R_2}{R_V} = k \Rightarrow R_V = \frac{R_2}{k} = 6,1 \text{ кОм}. \quad (6)$$

Часть 3. Что Вы поняли?

3.1 Экспериментальная зависимость напряжения на вольтметре U_n от номера точки подключения n приведена в Таблице 3.

Таблица 3.

n	U_n , В	U_n/U_0	(U_n/U_0) Теор.
0	4,45	1,01	1,00
1	1,45	3,10	3,08
2	0,85	5,29	5,33
3	0,55	8,18	7,99
4	0,35	12,86	12,32
5	0,00		



3.2 Для расчета теоретической зависимости запишем соотношения для токов и напряжений:

$$U_0 = InR_2 + U_V, \quad (7)$$

Здесь I - сила тока через источник, которая равна сумме сил токов через вольтметр и параллельную ему цепь

$$I = \frac{U_V}{R_V} + \frac{U_V}{(5-n)R_2}. \quad (8)$$

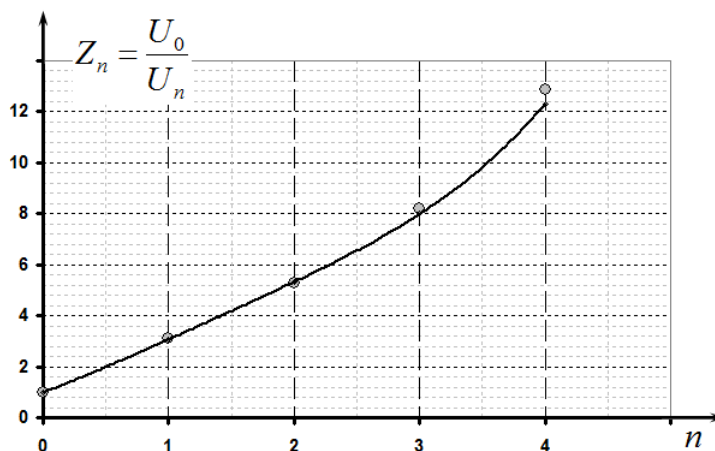
Из этих уравнений следует, что измеряемое напряжение равно

$$U_V = \frac{U_0}{\frac{5}{5-n} + n \frac{R_2}{R_V}}. \quad (9)$$

3.3 В соответствии с полученной формулой величина $Z_n = \frac{U_n}{U_V}$ описывается формулой

$$\frac{U_0}{U_V} = \frac{5}{5-n} + n \frac{R_2}{R_V}. \quad (10)$$

Результаты расчетов этой величины (экспериментальной и теоретической) приведены в таблице 3. Графики полученных зависимостей показаны на следующем рисунке (кружки – экспериментальные значения, сплошная линия теоретическая зависимость). Видно хорошее соответствие между полученными данными. Незначительные отличия объясняются неизбежными погрешностями измерений.



Задание 10-1 «Трение в неподвижном блоке»

Часть 1. Теоретическая

Для общности описания силы натяжения нити, переброшенной через блок, обозначим F_1 и F_2 . Причем сила F_1 направлена в сторону движения блока (см. рис.). На рисунке обозначена точка касания колеса блока с осью – точка A . Именно к ней приложены сила нормальной реакции \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{mp.}$. Будем считать, что сила трения связана с силой нормальной реакции уравнением (закон Кулона – Амонтона):

$$F_{mp.} = \mu N. \quad (1)$$

Положение точки касания можно найти из условия равновесия вдоль горизонтальной оси:

$$N \sin \alpha = F_{mp.} \cos \alpha. \quad (2)$$

С учетом закона (1), из уравнения (2) следует

$$tg \alpha = \mu. \quad (3)$$

Условие равновесия вдоль вертикальной оси имеет вид:

Условия равномерности движения имеют вид:

$$F_1 + F_2 = N \cos \alpha + F_{mp.} \sin \alpha. \quad (4)$$

Подставляя выражения для силы трения (1) и коэффициента трения (3), получим

$$F_1 + F_2 = N(\cos \alpha + \mu \sin \alpha) = N(\cos \alpha + tg \alpha \cdot \sin \alpha) = \frac{N}{\cos \alpha}. \quad (5)$$

Наконец, запишем условия равновесия моментов сил, действующих на колесо блока

$$(F_1 - F_2)R = F_{mp.}r. \quad (6)$$

В это уравнение также следует подставить ранее найденные соотношения (сила реакции выражается из уравнения (5)), в результате получаем:

$$(F_1 - F_2)R = F_{mp.} \cdot r = \mu N \cdot r = (F_1 + F_2) \cos \alpha \cdot r \cdot tg \alpha = (F_1 + F_2) r \sin \alpha. \quad (7)$$

Последнее соотношение запишем в виде

$$(F_1 - F_2) = \gamma(F_1 + F_2). \quad (8)$$

Здесь обозначено $\gamma = \frac{\sin \alpha}{\beta}$, $\beta = \frac{R}{r}$.

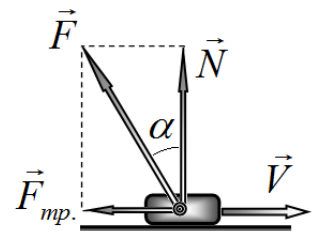
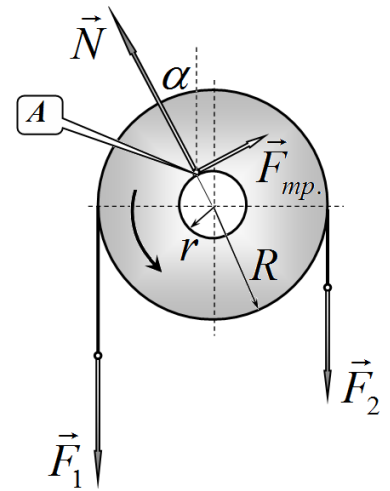
Запишем также явное выражение для силы F_1 , следующее из формулы (8):

$$F_1 = \frac{1+\gamma}{1-\gamma} F_2 \quad (9)$$

Дополнение.

Приведем также очень краткое, но нетрадиционное теоретическое решение этой задачи. В его основе лежит понимание смысла закона для силы трения и коэффициента трения. Сила взаимодействия движущегося тела с поверхностью, по которой происходит движение, \vec{F} разлагается на две составляющих: нормальную \vec{N} (сила нормальной реакции) и касательную $\vec{F}_{mp.}$, которая является силой трения. Тангенс угла

α , под которым направлена суммарная сила \vec{F} к нормали, является коэффициентом трения $tg \alpha = \mu$.



Обратимся к рис. 1. Суммарная сила взаимодействия колеса блока с осью должна быть направлена вертикально, поэтому точка касания A лежит на прямой отклоненной от вертикали на угол α , тангенс которого равен коэффициенту трения. При равномерном движении сумма моментов сил, действующих на колесо блока равна нулю, относительно любой точки. Запишем это условие относительно точки касания A :

$$F_1(R - r \sin \alpha) = F_2(R + r \sin \alpha).$$

Из этого уравнения сразу следует

$$F_1 = F_2 \frac{1 + \frac{r}{R} \sin \alpha}{1 - \frac{r}{R} \sin \alpha},$$

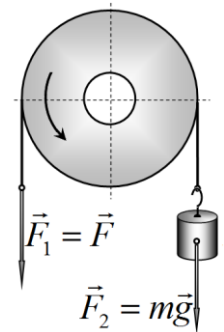
что эквивалентно уравнению (9).

Теперь можно записать соотношения, которые подлежат экспериментальной проверке.

1. Подъем груза.

В этом случае силой F_1 является измеряемая динамометром сила F , а силой F_2 - сила тяжести грузов $F_2 = mg$. Поэтому соотношение (9) имеет вид

$$F = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} mg. \quad (10)$$



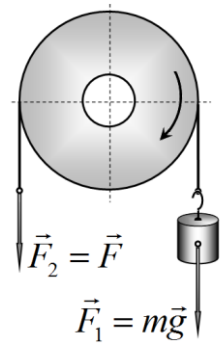
2. Опускание груза.

В этом случае силы F_1 и F_2 меняются местами: $F_1 = mg$, $F = F_2$. Следовательно, соотношение (9) принимает вид

$$mg = \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma} F,$$

Из которого следует:

$$F = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} mg. \quad (11)$$



Кроме того, отметим, что параметр $\gamma = \frac{\sin \alpha}{\beta}$ может быть определен с помощью выражения

(8). Для этого следует построить и проанализировать зависимость разности сил от их суммы. В этой зависимости коэффициент наклона равен искомому параметру.

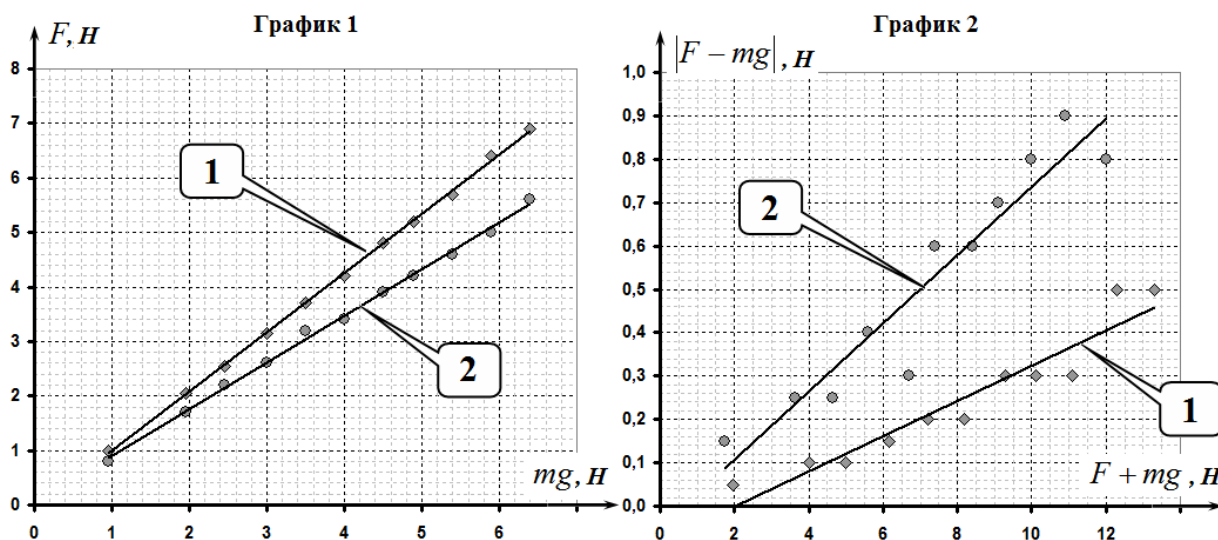
Часть 2. Экспериментальная

В таблице 1 приведены результаты измерений и необходимых расчетов.

Таблица 1.

	подъем	опускание	подъем		опускание	
mg , Н	F_1 , Н	F_2 , Н	$(F_1 + mg)$, Н	$(F_2 - mg)$, Н	$(F_2 + mg)$, Н	$(mg - F_2)$, Н
0,95	1,00	0,80	1,95	0,05	1,75	0,15
1,95	2,05	1,70	4,00	0,10	3,65	0,25
2,45	2,55	2,20	5,00	0,10	4,65	0,25
3,00	3,15	2,60	6,15	0,15	5,60	0,40
3,50	3,70	3,20	7,20	0,20	6,70	0,30
4,00	4,20	3,40	8,20	0,20	7,40	0,60
4,50	4,80	3,90	9,30	0,30	8,40	0,60
4,90	5,20	4,20	10,10	0,30	9,10	0,70
5,40	5,70	4,60	11,10	0,30	10,00	0,80
5,90	6,40	5,00	12,30	0,50	10,90	0,90
6,40	6,90	5,60	13,30	0,50	12,00	0,80

Ниже приведены графики, иллюстрирующие полученные экспериментальные данные.



На графике 1 приведены зависимости силы, прикладываемой к нити, от массы подвешенного груза: 1 – при подъеме груза, 2 – при его опускании. По коэффициентам наклона этих графиков можно рассчитать значение параметра γ , а затем на основании его определения $\gamma = \frac{\sin \alpha}{\beta}$, $\beta = \frac{R}{r}$, найти коэффициент трения $\mu = \operatorname{tg} \alpha$. Для этого следует воспользоваться формулой

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\beta \gamma}{\sqrt{1 - (\beta \gamma)^2}}. \quad (12)$$

Очевидно, что основная погрешность расчета коэффициента трения определяется погрешностью параметра γ , поэтому может быть рассчитана по формуле

$$\Delta\mu = \left| \frac{d\mu}{d\gamma} \right| \Delta\gamma = \frac{\beta}{(1 - (\beta\gamma)^2)^{\frac{3}{2}}} \Delta\gamma. \quad (13)$$

Замечание. Все погрешности косвенных измерений также могут быть рассчитаны методом границ!

Прямые измерения диаметров колеса блока и его оси приводят к значениям $D = 41,7 \text{ мм}$ и $d = 5,0 \text{ мм}$, следовательно, их отношение равно

$$\beta = \frac{D}{d} = 8,34. \quad (14)$$

Дальнейшие расчеты для обеих зависимостей аналогичны, поэтому проведем их параллельно в Таблице 2.

Таблица 2. Расчет коэффициента трения

Номер шага	Действие	Подъем	Опускание
1	Формула для коэффициента наклона	$k_1 = \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$	$k_2 = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$
2	Формулы для расчета параметра γ	$\gamma = \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1}$	$\gamma = \frac{1 - k_2}{k_2 + 1}$
3	Формула для расчета погрешности параметра γ	$\Delta\gamma = \left \frac{d\gamma}{dk_1} \right \Delta k_1 = \frac{(k_1 + 1) - (k_1 - 1)}{(k_1 + 1)^2} \Delta k_1 = \frac{2}{(k_1 + 1)^2} \Delta k_1$	$\Delta\gamma = \left \frac{d\gamma}{dk_2} \right \Delta k_2 = \frac{2}{(k_2 + 1)^2} \Delta k_2$
4	Значение коэффициента наклона, рассчитанное по МНК	$k_1 = 1,084 \pm 0,018$	$k_2 = 0,85 \pm 0,03$
5	Относительная погрешность коэффициента наклона	$\varepsilon_{k_1} \approx 1,7\%$	$\varepsilon_{k_2} \approx 3,5\%$
6	Значение параметра γ	$\gamma = 0,040 \pm 0,008$	$\gamma = 0,079 \pm 0,017$
7	Относительная погрешность параметра γ	$\varepsilon_{\gamma_1} \approx 20\%$	$\varepsilon_{\gamma_2} \approx 22\%$
8	Значение коэффициента трения μ	$\mu_1 = 0,36 \pm 0,08$	$\mu_2 = 0,88 \pm 0,34$
9	Относительная погрешность μ	$\varepsilon_{\mu_1} \approx 22\%$	$\varepsilon_{\mu_2} \approx 39\%$

Первое, что следует отметить – существенное значимое различие в рассчитанных значениях коэффициентов трения, которое не может быть объяснено погрешностями измерений! Выяснение причин этого парадоксального вывода является серьезным поводом для дальнейших исследований (возможно, на одной из последующих олимпиад!).

Второе – неожиданное, на первый взгляд, возрастание относительной погрешности в цепочке расчетов $k \rightarrow \gamma \rightarrow \mu$. Этот результат имеет разумное объяснение. Фактически в основе расчета лежит отклонение коэффициента наклона от единицы $|k - 1|$, а эта величина сравнима с погрешностью измерения коэффициента наклона k , поэтому относительная погрешность величины $|k - 1|$ значительно больше, чем относительная погрешность самого коэффициента наклона.

Альтернативным способом обработки результатов измерения является использование формулы (8). Эти зависимости показаны на графике 2. Как видно, разброс экспериментальных точек здесь намного значительнее, поэтому погрешности расчетов коэффициентов наклона должны быть больше. Правда, в этом методе коэффициенты наклона непосредственно равны параметру γ и не последующий пересчет не требуется. Действительно, расчеты по МНК дают следующие результаты:

- При подъеме грузов: $\gamma_1 = 0,041 \pm 0,008$;
- При опускании: $\gamma_2 = 0,079 \pm 0,017$.

Как и следовало ожидать, полученные значения (и их погрешности) совпадают с результатами предыдущих длительных расчетов (см. строку 6 в таблице 2). Таким образом, для уменьшения погрешности следует точнее измерять, а не искать иные методы расчета, хотя следует отметить, что второй способ гораздо короче!

Задача 10-1 «Мостовая схема»

1.1 Методика выполнения первой части этой задачи очевидна и не требует пояснений. Результаты измерений, естественно, зависят от выданного оборудования.

1.2 Отметим, что в этой части задачи сила тока изменяется в достаточно узком диапазоне, минимальное значение силы тока достигается при среднем положении вывода второго реостата, максимальной в крайних положениях.

1.3 Основная схема.

Результаты требуемых измерений, а также результаты теоретических расчетов приведены в таблице. 1.

Измерения			Теоретические расчеты					
			Схема с вольтметром		Схема с амперметром			
$R_x, \text{Ом}$	U, mB	I, mA		$U_{\text{теор.}}$		I_1, mA	I_2, mA	$I_{\text{теор}}$
0,1	-221,0	-28,5		-194,8		0,64	33,66	-33,02
0,6	-206,0	-27,6		-182,2		3,61	33,29	-29,68
1,3	-188,0	-24,3		-164,5		7,23	32,74	-25,51
2,0	-165,0	-18,7		-146,7		10,33	32,16	-21,83
2,6	-147,0	-16,6		-131,6		12,65	31,63	-18,98
3,3	-128,0	-15,4		-113,9		15,04	30,97	-15,92
4,0	-111,0	-12,8		-96,1		17,15	30,26	-13,10
4,7	-87,0	-9,5		-78,4		19,03	29,50	-10,47
5,0	-79,0	-8,0		-70,8		19,77	29,15	-9,38
5,8	-56,0	-5,4		-50,6		21,58	28,18	-6,60
6,5	-37,0	-3,5		-32,9		23,00	27,25	-4,25
7,4	-16,0	-1,7		-10,1		24,64	25,93	-1,30
7,8	0,0	0,0		0,0		25,30	25,30	0,00
8,4	14,0	1,5		15,2		26,24	24,29	1,95
8,7	25,0	2,6		22,8		26,68	23,75	2,93
9,5	47,0	4,0		43,0		27,79	22,21	5,58
9,9	59,0	5,2		53,1		28,30	21,37	6,94
10,8	84,0	9,1		75,9		29,38	19,28	10,10
11,3	94,0	10,4		88,6		29,94	17,98	11,95
12,0	116,0	13,4		106,3		30,67	15,98	14,69
12,7	136,0	16,1		124,0		31,35	13,71	17,63
13,5	157,0	17,5		144,2		32,07	10,73	21,34
14,0	173,0	20,1		156,9		32,50	8,61	23,88
14,8	200,0	25,1		177,1		33,14	4,71	28,43
15,4	215,0	28,1		192,3		33,59	1,27	32,32

Все измерения проведены при следующих значениях параметров электрической цепи:

Сопротивление первого («верхнего») резистора $R = 16,1 \text{ Ом}$;

Сопротивление второго резистора $R = 15,6 \text{ Ом}$;

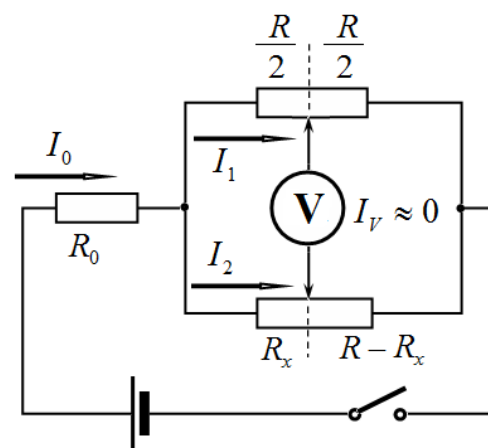
Добавочное сопротивление $R_0 = 75 \text{ Ом}$;

Напряжение источника $U_0 = 4,2 \text{ В}$

Обсуждение результатов измерений и их теоретическое обоснование проведем параллельно.

Схема с вольтметром (измерение напряжения)

В этом случае можно пренебречь силой тока, протекающего через вольтметр, ввиду того, что его сопротивление (порядка 1 Мом) значительно больше сопротивлений остальных элементов цепи. В этом приближении теоретический расчет измеренного напряжения не представляет труда. Для упрощения расчетов пренебрежем незначительной разностью сопротивлений резисторов, также будем считать, что средняя точка «верхнего» резистора выставлена точно. В рамках этих допущений сила тока в основной цепи описывается формулой



$$I_0 = \frac{U_0}{R_0 + \frac{R}{2}}. \quad (1)$$

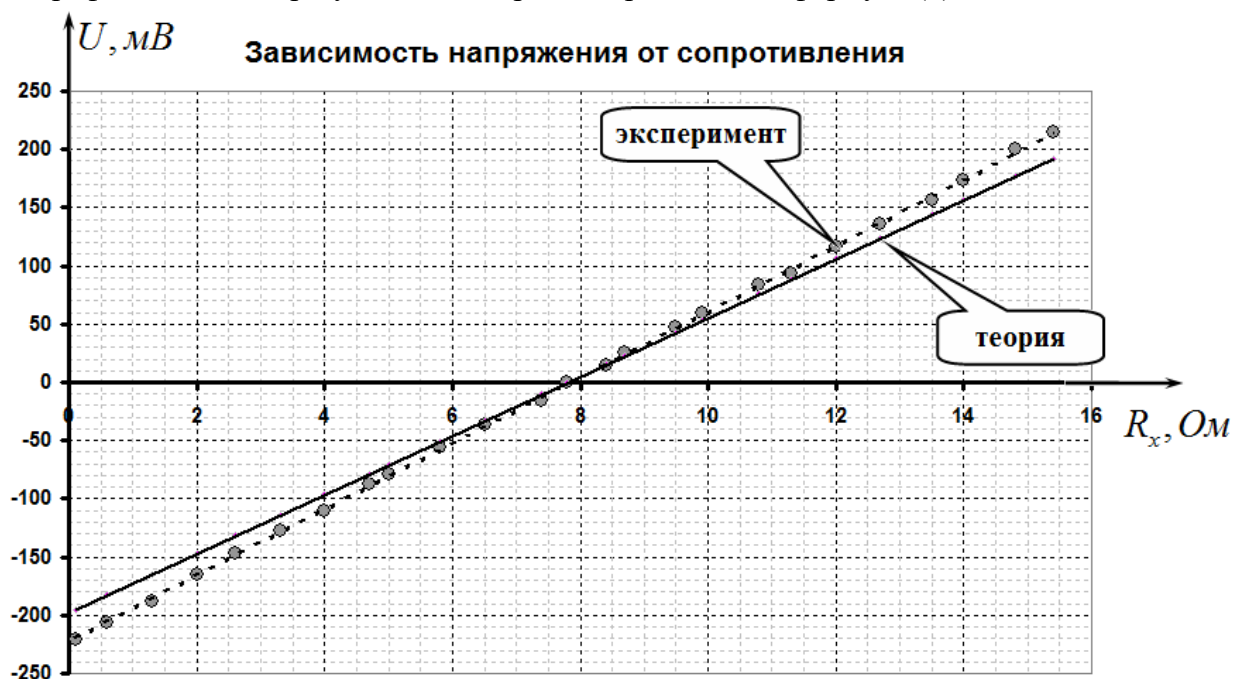
Этот ток делится на две равные части, проходящие по реостатам

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2} = \frac{U_0}{2R_0 + R}. \quad (2)$$

Тогда измеряемое напряжения может быть рассчитано по формуле

$$U_V = I_2 R_x - I_1 \frac{R}{2} = \frac{U_0}{2R_0 + R} \left(R_x - \frac{R}{2} \right). \quad (3)$$

На графике показаны результаты измерений и расчетов по формуле (3) данной зависимости.



Получено хорошее соответствие между результатами измерений и теоретической прямой. Незначительное расхождение может быть объяснено сделанными допущениями при выводе теоретической формулы.

Схема с амперметром (измерение силы тока)

В этой схеме следует пренебречь сопротивлением амперметра. Тогда мостовая часть схемы преобразуется в две пары параллельно соединенных резисторов.

При параллельном соединении силы токов разделяются обратно пропорционально сопротивлениям резисторов, поэтому силы токов через обе части «верхнего» резистора определяются по формулам (обратите внимание, здесь обозначения сил токов отличаются от предыдущей схемы):

$$I_1 = I_0 \frac{R_x}{\frac{1}{2}R + R_x}, \quad I_2 = I_0 \frac{R - R_x}{\frac{3}{2}R - R_x}.$$

(4)

А сила тока через амперметр оказывается равной

$$I_A = I_1 - I_2.$$

(5)

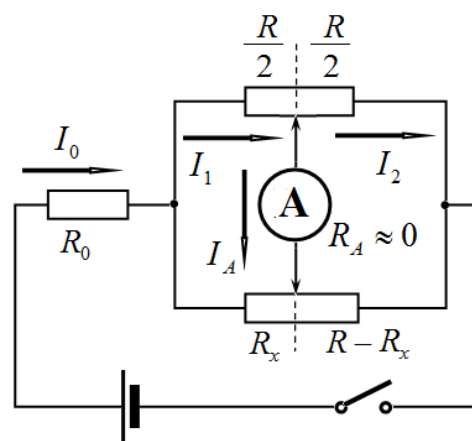
В этих формулах I_0 - сила тока в основной цепи. При ее расчете можно принять во внимание, что сопротивление R_0 заметно больше сопротивления мостовой части, поэтому можно положить

$$I_0 \approx \frac{U_0}{R_0}.$$

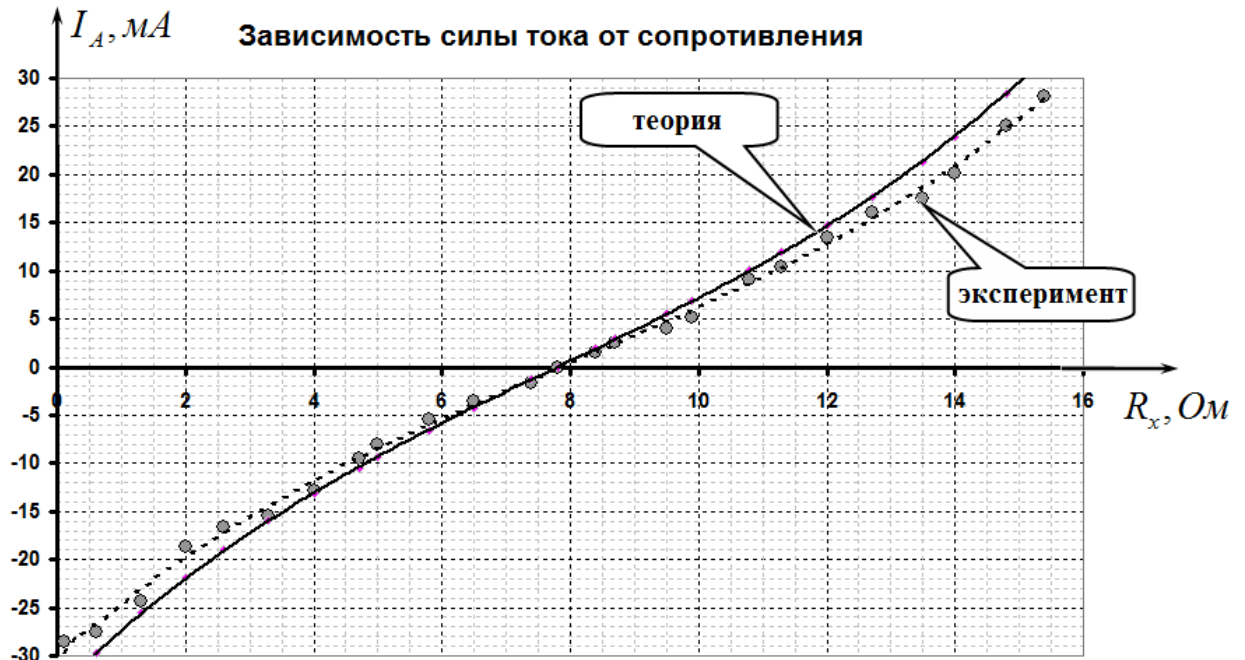
(6)

Это приближение также оправдано результатами измерений в п. 1.2. Формулы (4)-(6) позволяют провести расчет силы тока через амперметр.

Примечание. Не составляет особого труда привести и точное выражение для силы тока, однако, расчет по этой формуле только увеличивает время, не давая существенного выигрыша в точности.

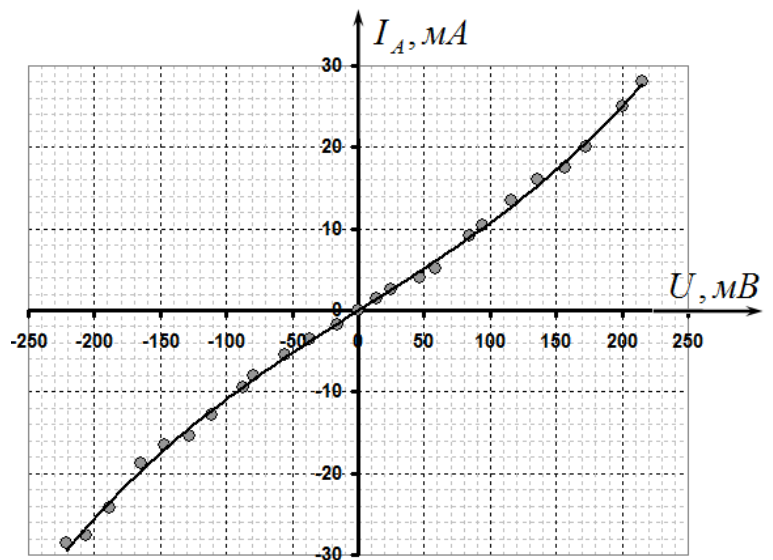


$$I_0 = \frac{U_0}{R_0 + \frac{\frac{R}{2}R_x}{\frac{R}{2} + R_x} + \frac{\frac{R}{2}(R - R_x)}{\frac{3}{2}R - R_x}}$$



На следующем рисунке приведены результаты измерений и расчета зависимости силы тока через амперметр от сопротивления R_x . В этом случае также видно хорошее соответствие между результатами измерений и расчетов.

Отдельно выделим пункт 1.3.3. Не представляет труда построить требуемый график (оси подписаны и оцифрованы, нанесены все экспериментальные точки, проведена сглаживающая линия) зависимости силы тока I_A от напряжения U_V . Можно даже сказать, что при небольших напряжениях примерно выполняется прямо пропорциональная зависимость. Однако, делать какие-либо выводы на основании полученной зависимости не следует! Рассматриваются принципиально разные электрические цепи, с различными распределениями токов – искать связь между ними, приблизительно то же, что искать связь между напряжением в Москве и силой тока в Минске! Поэтому данный пункт следует рассматривать как шутку авторов данной задачи (может не слишком удачную).



Задача 11-1. «Сползание капль»

Часть 1. Теоретическая

1.1 На рисунке изображены силы, действующие на каплю в процессе ее движения. Так как сила сопротивления зависит от скорости по закону

$$F_c = kv^\alpha \quad (1)$$

И направлена в сторону противоположную вектору скорости \vec{v} , то после небольшого этапа разгона капля будет двигаться с постоянной скоростью. В этом случае проекция силы тяжести на наклонную поверхность $mg \sin \gamma$ будет уравновешена силой сопротивления. Поэтому в этом случае будет выполняться соотношение

$$mg \sin \gamma = kv^\alpha. \quad (2)$$

Учитывая, что $\sin \gamma = \frac{H}{L}$, из выражения (2) получим связь между скоростью капли и высотой подъема плоскости

$$v = \left(\frac{mg}{kL} H \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (2)$$

1.2 – 1.3 Сравнивая с формулой, приведенной в условии $v = cH^\beta$, получаем, что параметры этого выражения равны

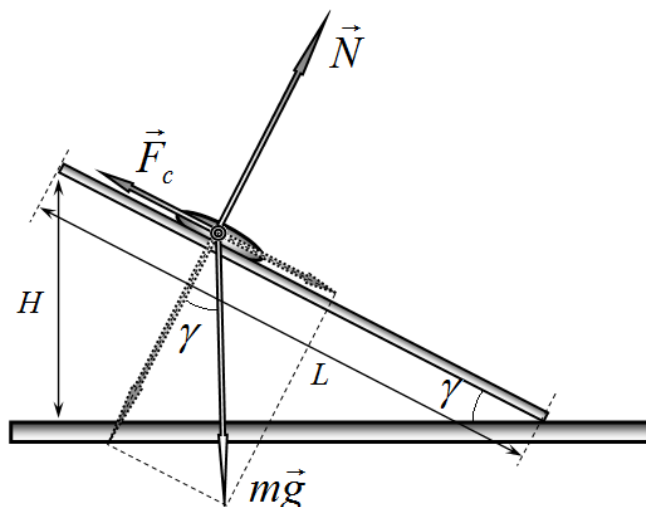
$$\beta = \frac{1}{\alpha}, \quad c = \left(\frac{mg}{kL} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (3)$$

Часть 2. Экспериментальная

2.1 Результаты измерений зависимости времен t сползания капли на расстояние X приведены в таблице 1. Измерения проведены 5 раз, затем рассчитано среднее значение соответствующий времен $\langle t \rangle$. В последнем столбце приведены значения случайных ошибок измерения времен (по условию задачи их расчет не требуется).

Таблица 1.

X , м	t_1 , с	t_2 , с	t_3 , с	t_4 , с	t_5 , с	$\langle t \rangle$, с	Δt , с
0,05	2,59	2,76	2,54	2,81	2,62	2,66	0,14
0,10	4,97	5,34	5,02	5,54	5,28	5,23	0,29
0,15	7,32	8,03	7,66	8,24	7,81	7,81	0,44
0,20	10,4	10,6	10,3	9,9	10,5	10,34	0,33
0,25	11,2	13,5	12,6	14,2	13,1	12,92	1,40
0,30	13,9	15,8	15,3	16,7	15,6	15,46	1,26
0,35	16,3	18,0	17,8	19,4	18,2	17,94	1,38
0,40	18,9	21,0	20,1	22,5	20,9	20,68	1,64
0,45	22,3	23,3	22,8	24,9	23,6	23,38	1,22
0,50	25,4	26,4	25,6	27,8	26,7	26,38	1,19



Усредненный график закона движения (зависимости координаты капли от времени) приведен на рисунке.

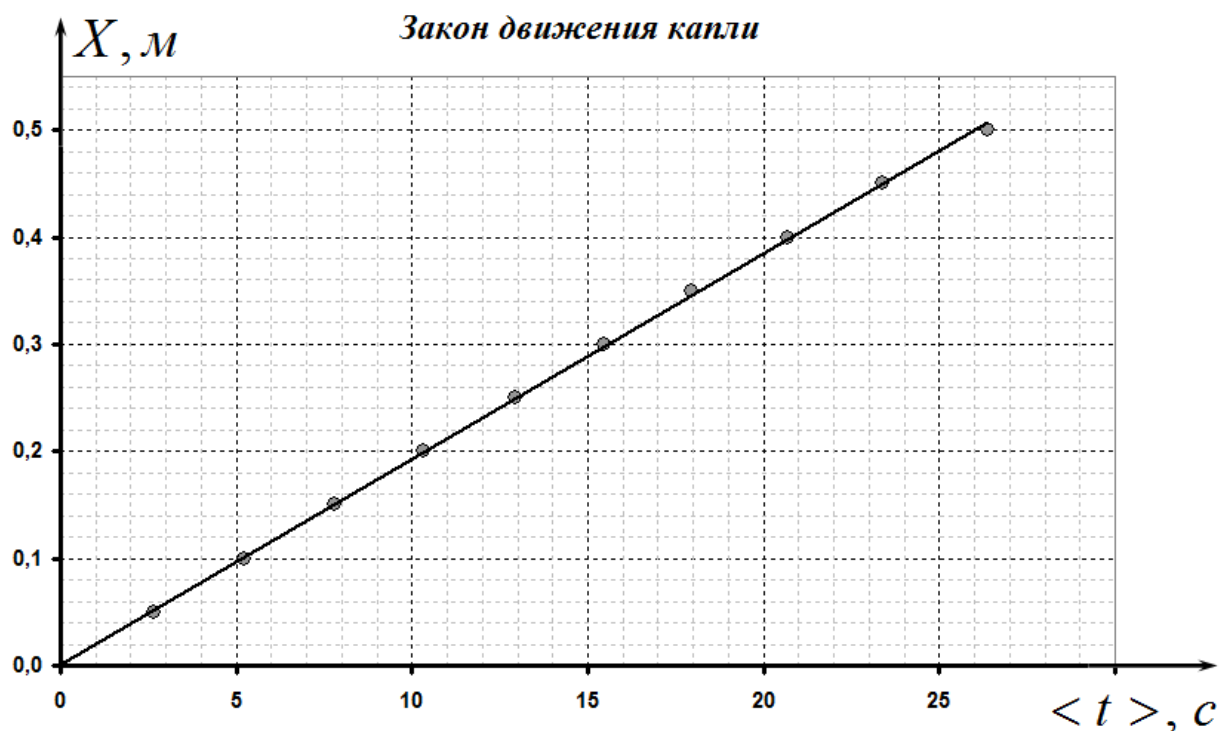


График представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, следовательно, движение капли является равномерным. Следовательно, закон движение описывается функцией

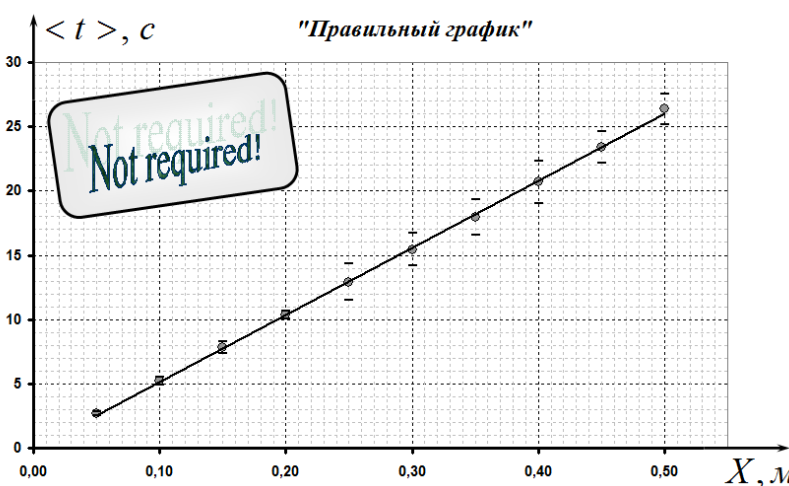
$$X = vt. \quad (4)$$

По графику (с помощью МНК, или графически) легко найти скорость движения, которая равна коэффициенту наклона графика:

$$v = 0,019 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5)$$

Необязательное дополнение.

Наличие повторных измерений позволяет построить более информативный график, с нанесенными диапазонами погрешностей измерений. Он показывает, что полученная зависимость действительно отлично описывается линейной функцией.



2.2 Для исследования зависимости скорости движения капли, от высоты края наклонной плоскости $v(H)$ следует провести измерения времени смещения капли t (конечно, измерения следует проводить несколько раз, а затем рассчитать среднее значение $\langle t \rangle$) на заданной измеренной расстоянии L . Тогда скорость капли рассчитывается по формуле

$$v = \frac{L}{\langle t \rangle}. \quad (6)$$

Результаты измерения времен сползания капль при разных высотах наклонной плоскости приведены в таблице 2. Для каждой высоты H поведено 5 измерений t_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) и рассчитано среднее значение этого времени $\langle t \rangle$. Также обратите внимание, что измерения проведены для разных значений пройденного пути L

Таблица 2

		Время движения								
$H, м$	$L, м$	$t_1, с$	$t_2, с$	$t_3, с$	$t_4, с$	$t_5, с$	$\langle t \rangle, с$	$v, \frac{см}{с}$	$\ln H$	$\ln V$
0,111	0,10	26,80	28,00	28,60	27,40	27,10	27,58	0,36	-2,198	-1,015
0,135	0,10	16,60	15,90	16,80	16,90	15,70	16,38	0,61	-2,002	-0,493
0,163	0,20	21,20	20,70	20,80	22,10	21,50	21,26	0,94	-1,814	-0,061
0,198	0,20	10,40	10,60	10,30	9,92	10,50	10,34	1,93	-1,619	0,659
0,238	0,30	8,36	8,19	7,81	8,01	8,26	8,13	3,69	-1,435	1,306
0,267	0,30	6,80	6,94	7,16	6,78	7,06	6,95	4,32	-1,321	1,463
0,298	0,60	8,10	8,16	7,90	7,82	8,24	8,04	7,46	-1,211	2,009
0,330	0,60	7,12	7,40	7,25	7,55	7,46	7,36	8,16	-1,109	2,099
0,379	0,60	4,36	4,41	4,29	4,52	4,38	4,39	13,66	-0,970	2,615

График зависимости скорости капли от высоты H показан на рисунке. На этом графике также указаны погрешности измерения скоростей движения. Видно, что полученная зависимость является не линейной. Однако визуально определить вид функциональной зависимости затруднительно. Поэтому данный график не является обязательным.

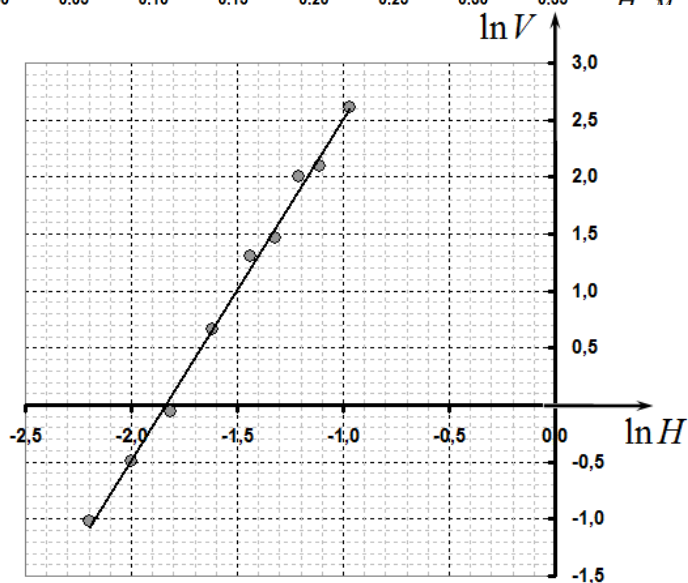
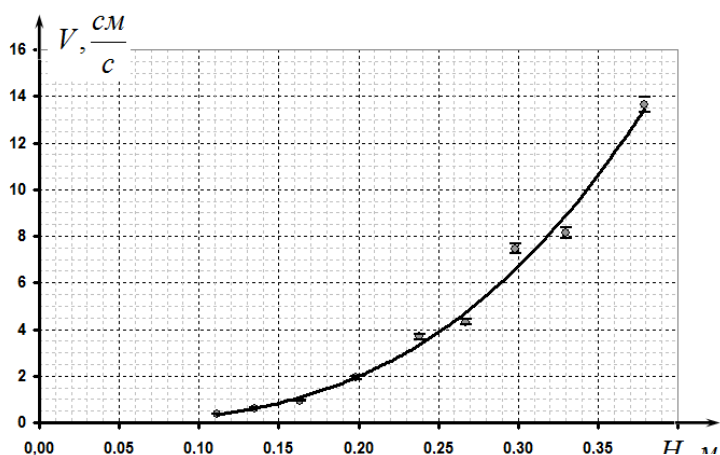
Для проверки применимости функции (2) для описания полученных результатов необходимо данный график построить в двойном логарифмическом масштабе.

Линейность этой зависимости подтверждает формулу (2), из которой следует, что

$$\ln v = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{mg}{kL} + \frac{1}{\alpha} \ln H \quad (7)$$

Параметры линейной зависимости $\ln v = a \ln H + b$, рассчитанные по МНК имеют следующие значения (расчет погрешностей по условию задачи, к сожалению не требуется):

$$\begin{aligned} a &= 2,99 \pm 0,16 \\ b &= 5,5 \pm 0,3 \end{aligned} \quad (8)$$



С высокой степенью точности можно считать, что показатель степени $\beta = \frac{1}{\alpha} = 3$, соответственно, $\alpha = \frac{1}{3}$. Найденные значения параметров зависимости в двойной логарифмической шкале позволяют записать явный вид функции (2)

$$v = \exp(a \ln H + b) = \exp(b) \cdot H^a = 2,46 \cdot H^3 \quad (9)$$

Здесь H измеряется в мерах, скорость v в м/с.

Обратим также внимание на удивительный факт: зависимость силы сопротивления от скорости имеет неожиданный вид

$$F_c = k\sqrt[3]{v} \quad (10)$$

Теоретическое обоснование полученного результата требует отдельных исследований, что не входит в задачу экспериментального тура.

Задание 11-2. «Сухое трение»

1.1 Результаты измерений зависимости времен «четных» остановок t_{2k} от индекса k приведены в Таблице 1. Для каждого значения k проведено 3 измерения и проведено их усреднение. В последнем столбце приведены значения случайной погрешности проведенных измерений (по условию не требуется). Жирным шрифтом выделены данные, по которым построен график полученной зависимости¹, показанный на рис. 1.

Таблица 1

k	t_1, c	t_2, c	t_3, c	\bar{t}, c	$\Delta t, c$
0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1	0,90	1,01	0,79	0,90	0,16
2	1,91	2,03	1,80	1,91	0,17
3	2,87	3,03	2,76	2,89	0,20
4	3,83	3,99	3,73	3,85	0,19
5	4,71	4,91	4,66	4,76	0,19
6	5,62	5,81	5,53	5,65	0,21
7	6,49	6,71	6,39	6,53	0,24
8	7,32	7,62	7,28	7,41	0,27
9	8,25	8,53	8,22	8,33	0,25
10	9,15	9,51	9,12	9,26	0,31

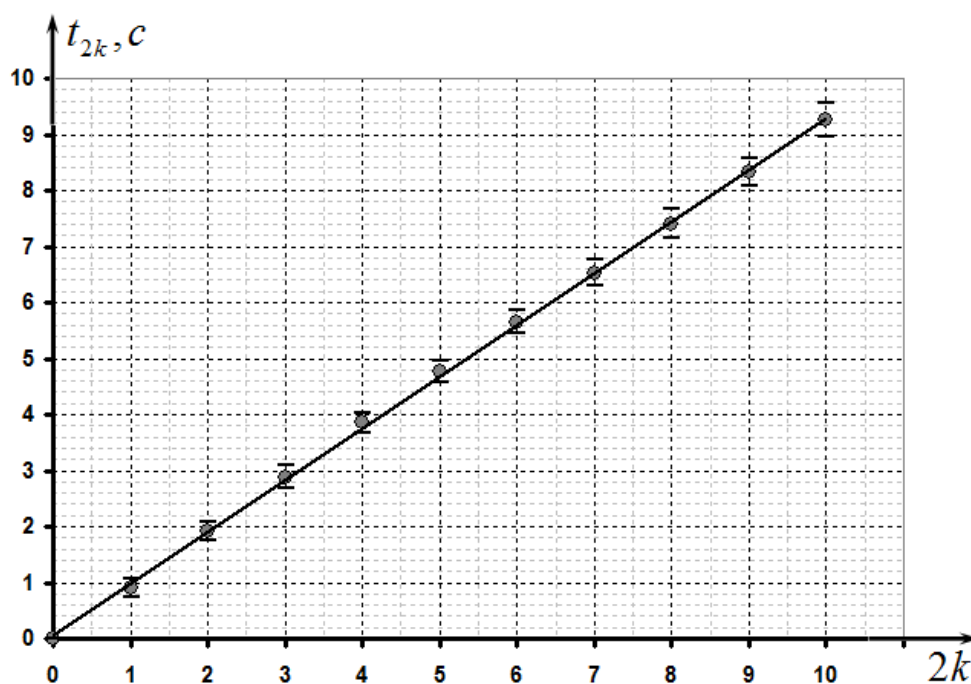


Рис. 1

1.2 Практически строгая прямая пропорциональная зависимость говорит, что изменением периода колебаний от амплитуды можно пренебречь.

1.3 Очевидно, что коэффициент наклона полученной зависимости и равен периоду колебаний. Рассчитанное по МНК значение этого периода (и его погрешности) равно

$$T = (0,92 \pm 0,01)c. \quad (1)$$

¹ Строго говоря, в данном случае проведение сглаживающей прямой в данном случае не имеет смысла, так аргумент этой функции изменяется дискретно. Но мы провели ее, для наглядности, как иллюстрацию линейной зависимости.

1.4 Результаты измерений зависимости углов «четных» остановок α_{2k} от индекса k приведены в Таблице 2.

Таблица 2

Измерения			Расчеты						
	t_k, c	$\alpha_k, ^\circ$	k	t_k, c	$\alpha_k, ^\circ$	$\alpha_k, рад$	$\bar{\omega}_k$	$\Delta E'_k$	Z_k
0	0,000	90,0	0	0,000	90,00		1,57		
			1	0,450	-78,67		-1,37	6,54	0,197
2	0,900	67,3	2	0,900	67,33		1,18	5,66	0,189
			3	1,407	-62,00		-1,08	4,46	0,084
4	1,913	56,7	4	1,913	56,67		0,99	4,09	0,080
			5	2,400	-53,17		-0,93	3,94	0,050
6	2,887	49,7	6	2,887	49,67		0,87	3,69	0,048
			7	3,368	-47,17		-0,82	3,51	0,033
8	3,850	44,7	8	3,850	44,67		0,78	3,33	0,031
			9	4,305	-42,33		-0,74	3,34	0,028
10	4,760	40,0	10	4,760	40,00		0,70	3,16	0,027
			11	5,207	-37,83		-0,66	3,04	0,024
12	5,653	35,7	12	5,653	35,67		0,62	2,87	0,023
			13	6,092	-33,67		-0,59	2,76	0,020
14	6,530	31,7	14	6,530	31,67		0,55	2,60	0,019
			15	6,968	-29,67		-0,52	2,44	0,018
16	7,407	27,7	16	7,407	27,67		0,48	2,28	0,017
			17	7,870	-25,42		-0,44	2,00	0,018
18	8,333	23,2	18	8,333	23,17		0,40	1,83	0,016
			19	8,797	-20,92		-0,37	1,66	0,015
20	9,260	18,7	20	9,260	18,67		0,33	1,49	0,013

2.1 Расчет приблизительных значений «нечетных» углов отклонения α_{2k-1} и соответствующих времен остановок t_{2k-1} может быть проведен с помощью линейной аппроксимации по очевидным формулам

$$t_{2k-1} = \frac{t_{2k-2} + t_{2k}}{2}, \quad (2)$$

$$\alpha_{2k-1} = -\frac{\alpha_{2k-2} + \alpha_{2k}}{2}. \quad (3)$$

Результаты всех расчетов также приведены в Таблице 2.

2.2 Схематический график зависимости угла отклонения маятника от времени показан на рис.2.

2.3 Модуль средней угловой скорости на каждом интервале рассчитывается по формуле

$$\bar{\omega}_k = \frac{|\alpha_k - \alpha_{k-1}|}{t_k - t_{k-1}}. \quad (4)$$

Очевидно, что здесь и далее значения углов должны быть в радианах.

2.4 Потери энергии на каждом шаге равны изменению потенциальной энергии маятника в крайних положениях (где его кинетическая энергия равна нулю) по формуле

$$\Delta E_k = mg \frac{l}{2} (\cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k). \quad (5)$$

Имеет смысл рассчитать изменение энергии в относительных единицах, разделив ее на величину $E_0 = \frac{1}{2}mgl$:

$$\Delta E'_k = \frac{\Delta E_k}{E_0} = \cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k. \quad (6)$$

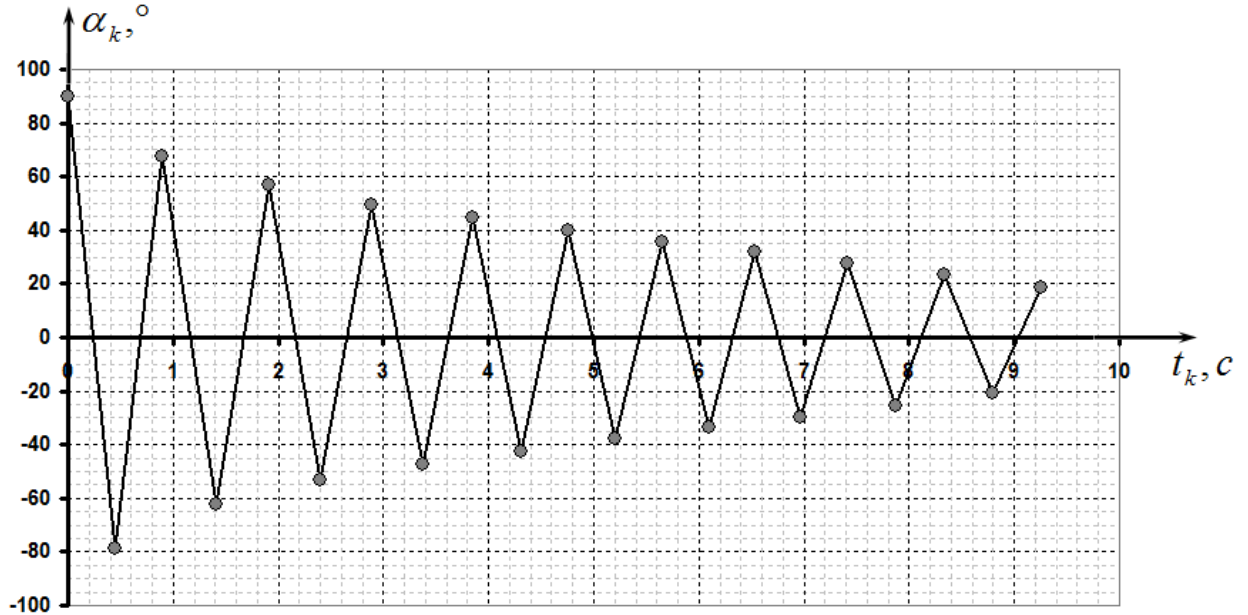


Рис.2

2.5 Рассчитанные потери энергии равны работе силы трения маятника о стержень. Для расчета этой работы рассмотрим динамику движения стержня. На рис. 3 показаны силы, действующие на стержень в процессе его движения.

Уравнение 2 закона Ньютона в проекции на стержень имеет вид

$$m\omega^2 \frac{l}{2} = N - mg \cos \varphi, \quad (6)$$

из которого следует выражение для силы реакции

$$N = \frac{1}{2}m\omega^2 l + mg \cos \varphi. \quad (7)$$

Так как нам требуется провести только оценку коэффициента трения, можно достаточно грубо провести усреднение² этого выражения по каждому полупериоду колебаний

$$\bar{N}_k \approx \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 l + mg = mg \left(\frac{\bar{\omega}_k^2 l}{2g} + 1 \right). \quad (8)$$

В данном выражении мы также полагаем, что $\langle \cos \varphi \rangle \approx 1$.

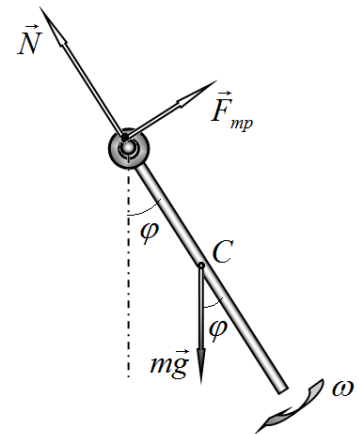


Рис. 3

В этом приближении работа силы трения описывается формулой

$$\Delta E_k = A_{mp} = |\mu \bar{N} r (\alpha_k - \alpha_{k-1})| = \mu mgr \left(\frac{\bar{\omega}_k^2 l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (9)$$

² Более точные, но громоздкие расчеты, во-первых, излишни из-за достаточно больших погрешностей измерения углов, во-вторых, приводят практически к тем же результатам.

Приравнявая работу силы трения к изменению энергии маятника (5), получим

$$mg \frac{l}{2} (\cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k) = \mu mgr \left(\frac{\bar{\omega}_k^2 l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (10)$$

Откуда следует выражение, допускающее проверку на основании экспериментальных данных:

$$\Delta E'_k = (\cos \alpha_{k-1} - \cos \alpha_k) = 2 \frac{r}{l} \mu \left(\frac{\bar{\omega}_k^2 l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (11)$$

Обозначим параметр

$$Z_k = \left(\frac{\bar{\omega}_k^2 l}{2g} + 1 \right) \cdot |\alpha_k - \alpha_{k-1}|. \quad (12)$$

Тогда относительное измерение энергии оказывается прямо пропорциональным этому параметру

$$\Delta E'_k = 2 \frac{r}{l} \mu Z_k. \quad (13)$$

График этой функции показан на рис. 4.

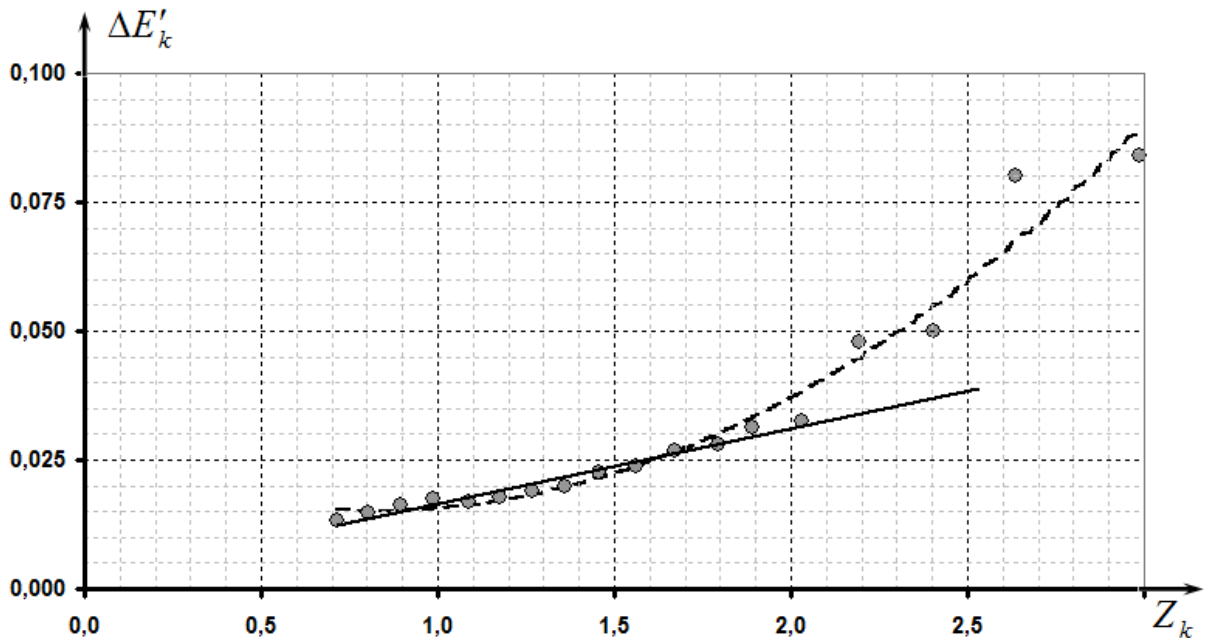


Рис. 4

Полученная зависимость, конечно, не является линейной – ожидать иного и не следовало, так как было сделано достаточно много упрощающих приближений. Однако, при малых отклонениях полученную зависимость можно аппроксимировать линейной функцией (отрезок прямой показан на рисунке). Действительно, при малых углах отклонения сделанные выше приближения обоснованны. Не сложно (графически, или по МНК) найти коэффициент наклона, который приблизительно равен $K = 0,014$. Из выражения (13) следует, что коэффициент наклона определяется формулой $K = 2 \frac{r}{l} \mu$, из которой можно рассчитать коэффициент трения

$$\mu = \frac{K l}{2 r} \approx 0,45. \quad (14)$$