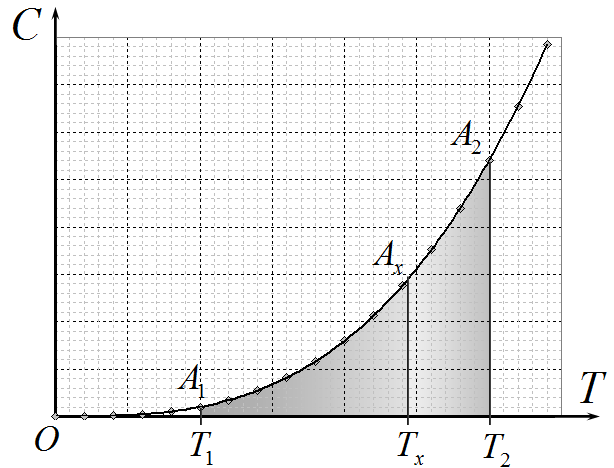


9 класс

**Задание 1. Разминка.**

**Задача 1.1 «Низкотемпературный тепловой контакт»**

**1.1** Для решения задачи следует сообразить, что площадь под графиком зависимости теплоемкости от температуры  $C(T)$  численно равна количеству переданной теплоты. Изобразим схематически график зависимости теплоемкости брусков от температуры. Отметим на нем начальные температуры  $T_1, T_2$ , а также искомую температуру теплового равновесия  $T_x$ . Так как тепловые потери отсутствуют, то количество теплоты, отданное вторым (более «горячим») бруском, равно количеству теплоты, полученным первым бруском. Графически это означает, что площади криволинейных трапеций под графиком зависимости  $C(T)$  в интервалах  $[T_x, T_2]$  и  $[T_1, T_x]$  должны быть равны:



$$S_{1x} = S_{x2}. \quad (1)$$

Эти площади могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} S_{1x} &= S_{0x} - S_{01} = \frac{1}{4} \alpha T_x^4 - \frac{1}{4} \alpha T_1^4, \\ S_{2x} &= S_{02} - S_{0x} = \frac{1}{4} \alpha T_2^4 - \frac{1}{4} \alpha T_x^4, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $S_{01}$  площадь под графиком в интервале от нуля до  $T_1$ , которая согласно приведенной в условии подсказке равна  $S_{01} = \frac{1}{4} \alpha T_1^4$ . Остальные площади, входящие в формулы (2) определяются аналогично.

Из приведенных формул следует, что

$$\frac{1}{4} \alpha T_x^4 - \frac{1}{4} \alpha T_1^4 = \frac{1}{4} \alpha T_2^4 - \frac{1}{4} \alpha T_x^4 \Rightarrow T_x = \sqrt[4]{\frac{T_1^4 + T_2^4}{2}} = 2,5^\circ K. \quad (3)$$

### Задача 1.2. «Локатор»

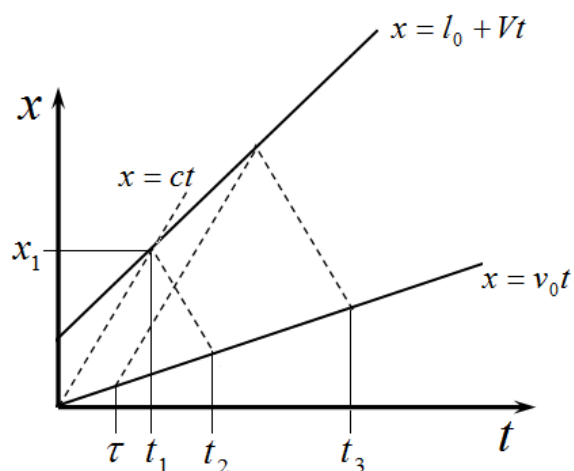
Проще и нагляднее решить данную задачу, построив схематический график законов движения машин и сигналов. Эти законы движения имеют вид:

- машины инспектора (считаем, что первый сигнал послан в момент времени  $t = 0$ ):

$$x = v_0 t; \quad (1)$$

- машины нарушителя (считаем, что начальное расстояние между машинами равно  $l_0$ ):

$$x = l_0 + Vt;$$



- первого сигнала

$$x = ct. \quad (2)$$

Сигнал догонит машину нарушителя в момент времени  $t_1$ , удовлетворяющий уравнению

$$l_0 + Vt_1 = ct_1 \Rightarrow t_1 = \frac{l_0}{c - V}. \quad (3)$$

в точке с координатой

$$x_1 = ct_1 = \frac{c}{c - V} l_0 \quad (4)$$

Закон движения отраженного сигнала записывается в виде

$$x = x_1 - c(t - t_1) = 2x_1 - ct = 2 \frac{c}{c - V} l_0 - ct. \quad (5)$$

Этот отраженный сигнал встретится с машиной ГАИ в момент времени  $t_2$ , удовлетворяющей условию

$$2 \frac{c}{c - V} l_0 - ct_2 = v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = 2 \frac{c}{(c - V)(c + v_0)} l_0. \quad (6)$$

Второй сигнал послан в момент времени  $\tau$ , когда расстояние между автомобилями стало равным  $(l_0 + (V - v_0)\tau)$ , поэтому он вернется к машине ГАИ в момент времени  $t_3$ , который может быть найден с помощью формулы (7):

$$t_3 = \tau + 2 \frac{c}{(c - V)(c + v_0)} (l_0 + (V - v_0)\tau) = \tau + t_2 + 2 \frac{c(V - v_0)}{(c - V)(c + v_0)} \tau. \quad (7)$$

Таким образом, время между возвращением двух последовательных импульсов равно

$$\tau' = t_3 - t_2 = \tau + 2 \frac{c(V - v_0)}{(c - V)(c + v_0)} \tau. \quad (8)$$

Учитывая, что скорость сигнала значительно больше скорости автомобилей, формула (9) упрощается до

$$\tau' \approx \tau + 2 \frac{(V - v_0)}{c} \tau. \quad (9)$$

### Задача 1.3. «Ф – сопротивление»

1. Рассмотрим цепь Фёдора при подключении источника напряжения в точках  $A$  и  $B$  цепи (рис. 2). Полное сопротивление цепи при этом найдем из равенства

$$R_{AB} = R + R_{GH} + R. \quad (1)$$

Сопротивление участка цепи  $R_{GH}$  между точками  $G$  и  $H$  найдем из условия параллельного соединения проводников

$$\frac{1}{R_{GH}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{3R} + \frac{1}{3R} = \frac{5}{3R} \Rightarrow R_{GH} = \frac{3}{5}R. \quad (2)$$

Используя (1) и (2), находим полное сопротивление  $R_{AB}$  цепи в этом случае и мощность  $P_{AB}$ , выделяемую схемой в данном случае

$$R_{AB} = 2R + \frac{3}{5}R = \frac{13}{5}R, \quad (3)$$

$$P_{AB} = \frac{U^2}{R_{AB}} = \frac{5U^2}{13R}. \quad (4)$$

Из (4) находим номинал сопротивления, которое использовал Федя

$$R = \frac{5U^2}{13P_{AB}} = 10\text{Ом}. \quad (5)$$

2. При подключении цепи в точках  $C$  и  $D$  сопротивления  $AG$  и  $BH$  (см. рис. 2) оказываются «бесполезными», поскольку ток по ним не идёт. После их

удаления схема для расчёта сопротивления упрощается и принимает вид, как на рисунке 3. Кроме того, сопротивление  $GH$  в этом случае также можно

отбросить, поскольку оно подключено в точках равных потенциалов и ток по нему не идет. Окончательный вид схемы для расчёта сопротивления приведен на рисунке 3.

В этом случае имеем

$$R_{CD} = \frac{2R \cdot 4R}{2R + 4R} = \frac{4}{3}R. \quad (6)$$

И для мощности, соответственно,

$$P_{CD} = \frac{U^2}{R_{CD}} = \frac{3U^2}{4R} = 13\text{Вт}. \quad (7)$$

3. При одновременном подключении двух источников напряжения к клеммам  $A - B$  и  $C - D$  схемы Федя сила тока в каждой из ветвей схемы будет равна сумме сил токов, даваемых в данную ветвь каждым источником по отдельности

$$I_{AB+CD} = I_{AB} + I_{CD}. \quad (8)$$

Это следует из того, что закон Ома носит линейный характер и «закреплено» соответствующим принципом суперпозиции для нескольких источников напряжения в одной цепи. Однако тепловая мощность в данной ветви пропорциональна квадрату силы тока в ней  $P_{AB+CD} \sim I_{AB+CD}^2$ , который не будет равен сумме квадратов токов ( $I_{AB+CD}^2 = I_{AB}^2 + I_{CD}^2 + 2I_{AB}I_{CD}$ ) от каждого источника напряжения по отдельности. Следовательно, утверждать, что в этом случае тепловая мощность

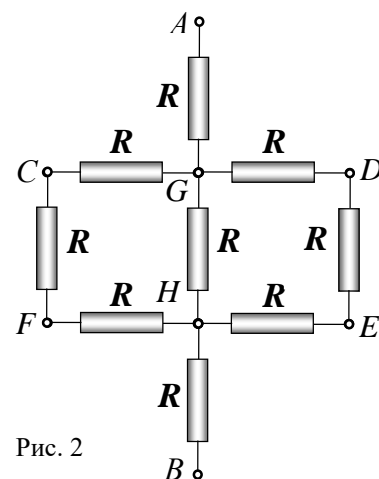


Рис. 2

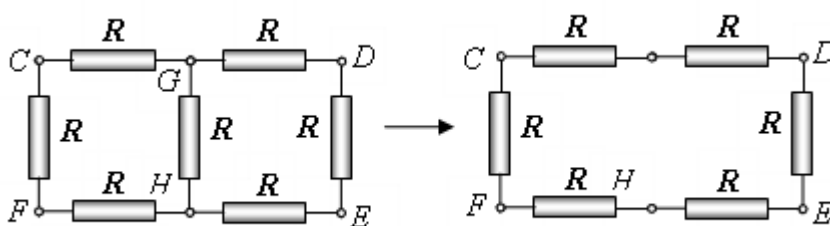
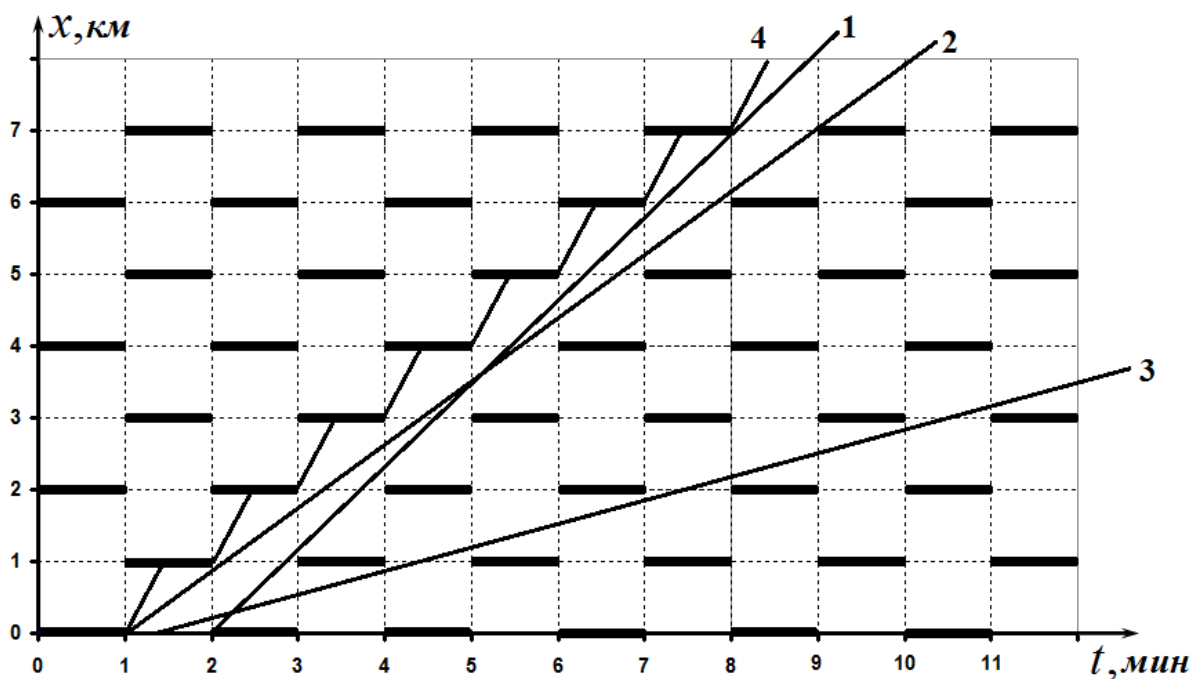


Рис. 3

$P_{AB+CD}$ , выделяемая в схеме, будет равна сумме мощностей  $P_{AB}$  и  $P_{CD}$  нельзя. Для этого требуется отдельный пересчёт.

## Задание 2. Автомобили и светофоры

2.1 На рисунке показана диаграмма, показывающая времена закрытых светофоров.



На этой же диаграмме можно строить законы движения автомобилей и велосипедистов, которые представляют отрезки прямых линий. Понятно, что эти прямые не должны пересекать отрезки запрещающих сигналов светофоров.

2.2 Прямые 1 и 2 на диаграмме показывают возможные варианты движения автомобилей без остановок на светофорах. Прямая 1 соответствует максимальной скорости (автомобиль пересекает линию светофора на въезде в последний момент открытого интервала, а линию последнего – в момент зажигания зеленого). В этом случае он потратит на проезд время  $t_1 = 6,0 \text{ мин}$ , поэтому его скорость оказывается равной

$$v_1 = \frac{7,0 \text{ км}}{6,0 \text{ мин}} = 70 \frac{\text{км}}{\text{час}}. \quad (1)$$

Прямая 2 соответствует минимальной скорости, удовлетворяющей условию проезда без остановок. Ей соответствует скорость

$$v_2 = \frac{7,0 \text{ км}}{8,0 \text{ мин}} = 53 \frac{\text{км}}{\text{час}}. \quad (1)$$

2.3 Закон движения «нарушителя» показан ломанной линией 4. Очевидно, что при любой скорости превышающей  $v_1 = 70 \frac{\text{км}}{\text{час}}$  время движения будет лежать в интервале от 6 до 7 мин (в зависимости от момента времени подъезда к светофору на въезде в город).

2.4 Закон движения велосипедиста отражается прямой 3 на диаграмме. Ей соответствует скорость

$$v_3 = \frac{1,0 \text{ км}}{3,0 \text{ мин}} = 20 \frac{\text{км}}{\text{час}}. \quad (3)$$

### Задание 3. Бареттер.

0.1. Сопротивление проволоки бареттера  $R_0$  при температуре  $0^\circ\text{C}$  равно

$$R_0 = \rho_0 \frac{l}{S} = \frac{\rho_0 l}{\pi r^2} = 2,18 \text{ Ом}.$$

Формула зависимости сопротивления проволоки от температуры имеет вид

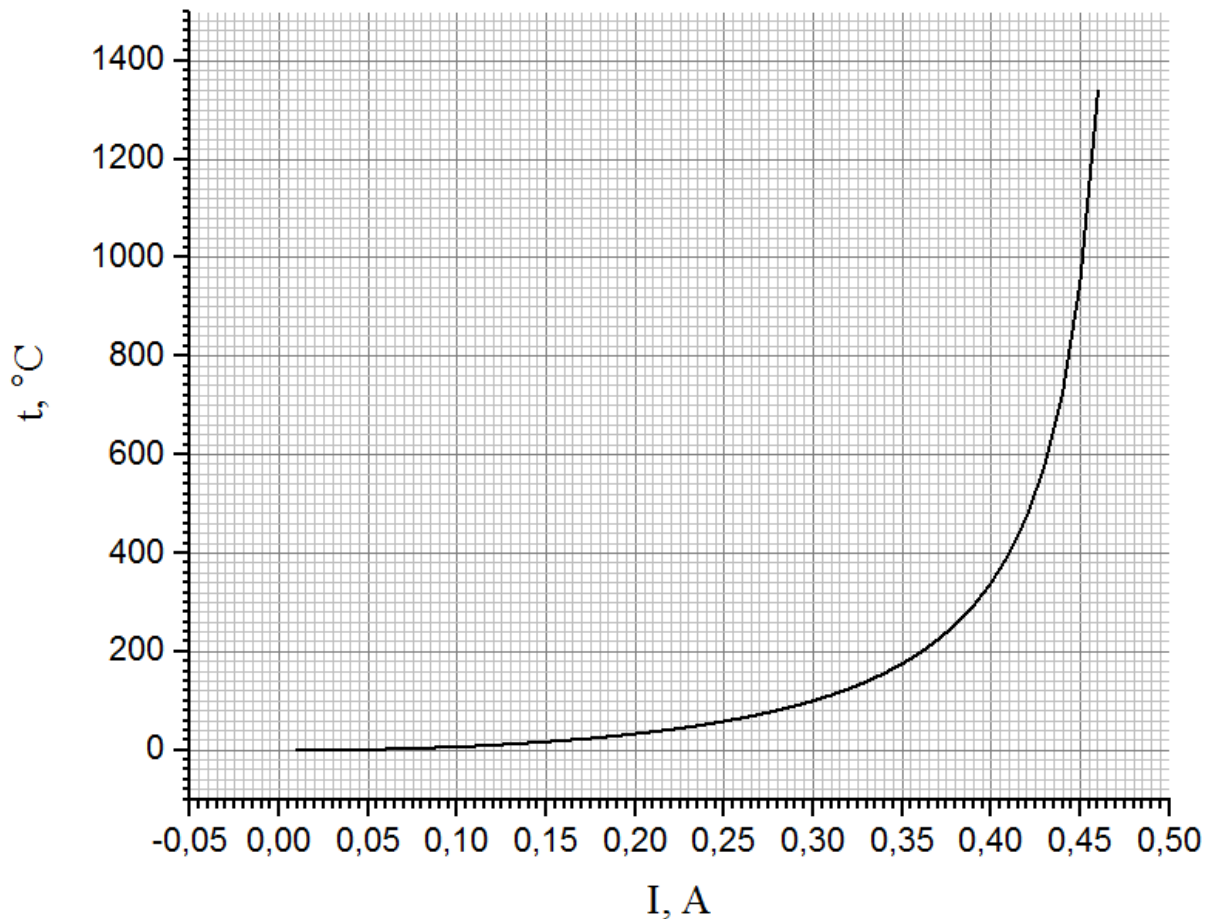
$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{\rho_0 l}{\pi r^2} (1 + \gamma t) = R_0 (1 + \gamma t).$$

0.2. Мощность теплоотдачи бареттера определяется формулой  $P_{\text{отд}} = \alpha S_{\text{пов}}(t - t_0)$ , где  $S_{\text{пов}} = 2\pi r l$  — площадь поверхности нити. Учитывая, что  $t_0 = 0$ , получаем, что  $P_{\text{отд}} = At$ , где  $A = 2\pi r l \alpha = 3,14 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$ .

1.1. При протекании тока  $I$  по проволоке бареттера в ней выделяется теплота с мощностью, определяемой законом Джоуля-Ленца. В тепловом равновесии выполняется условие  $P_{\text{эл}} = P_{\text{отд}}$  или  $I^2 R_0 (1 + \gamma t) = At$ . Отсюда для зависимости  $t(I)$

$$t = \frac{I^2 R_0}{A - I^2 R_0 \gamma}.$$

получаем следующее выражение



- 1.2. Согласно закону Ома напряжение на проволоке
- $$U = IR = IR_0(1 + \gamma t) = IR_0 \left( 1 + \frac{I^2 R_0 \gamma}{A - I^2 R_0 \gamma} \right) = \frac{IR_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2}$$
- . Чтобы получить отсюда зависимость  $I(U)$  можно разрешить полученное здесь квадратное уравнение, однако этого не требуется: чтобы построить вольтамперную характеристику, можно сначала построить зависимость  $U(I)$ , а затем обратить полученный график.

- 1.3.  $U \rightarrow \infty$ , когда  $1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2 \rightarrow 0$ , то есть когда  $I \rightarrow \sqrt{\frac{A}{R_0 \gamma}} = 0,487 \text{ A}$ . Однако такой ток через бареттер недостижим, так как из (5) следует, что при  $I \rightarrow \sqrt{\frac{A}{R_0 \gamma}} \quad t \rightarrow \infty$ .

- 1.4. Максимально возможным током через бареттер является ток, при котором начинает плавиться проволока бареттера. Отсюда получаем для  $I_{max}$  уравнение  $\frac{I^2 R_0}{A - I^2 R_0 \gamma} = t_{пл}$ .  
 Разрешая его, получаем, что  $I_{max} = \sqrt{\frac{A t_{пл}}{R_0 (1 + \gamma t_{пл})}} = 0,463 \text{ A}$ . Тогда  $U_{max} = I_{max} R_0 (1 + \gamma t) = \sqrt{A R_0 t_{пл} (1 + \gamma t_{пл})} = 10,4 \text{ В}$ .

- 1.5. При  $U \rightarrow 0$  также и  $I \rightarrow 0$ , а значит  $I^2 \approx 0$ . Следовательно, как и следовало ожидать,  $U = IR_0$  при малых напряжениях.

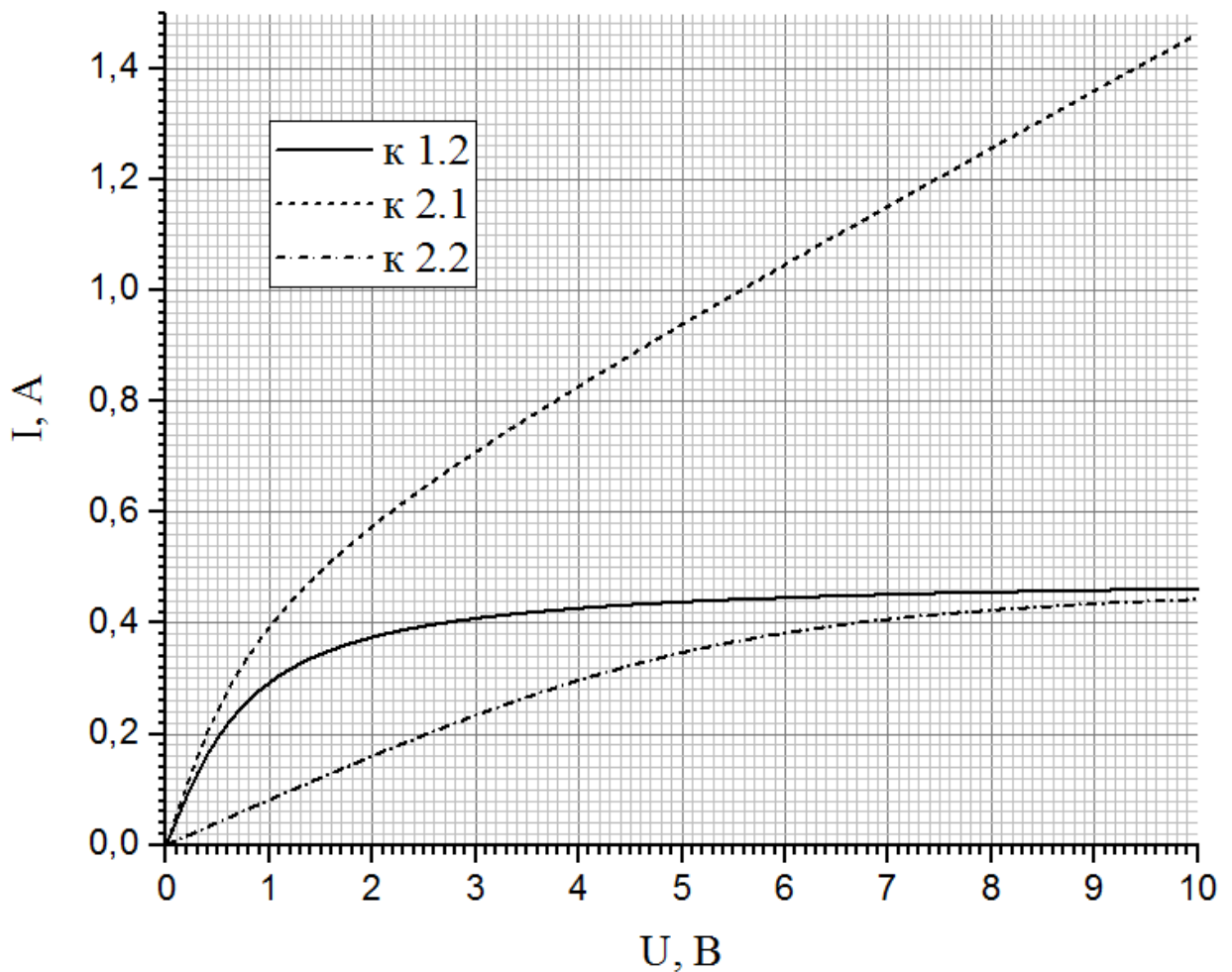
- 2.1. При параллельном подключении бареттера и резистора напряжение в цепи равно напряжению на бареттере, а полный ток в цепи определяется как сумма тока через

бареттер и тока через резистор, равного  $\frac{U}{R_1}$ . Соответственно вольтамперная характеристика цепи может быть получена прибавлением к вольтамперной характеристике бареттера линейной функции  $I = \frac{U}{R_1}$ .

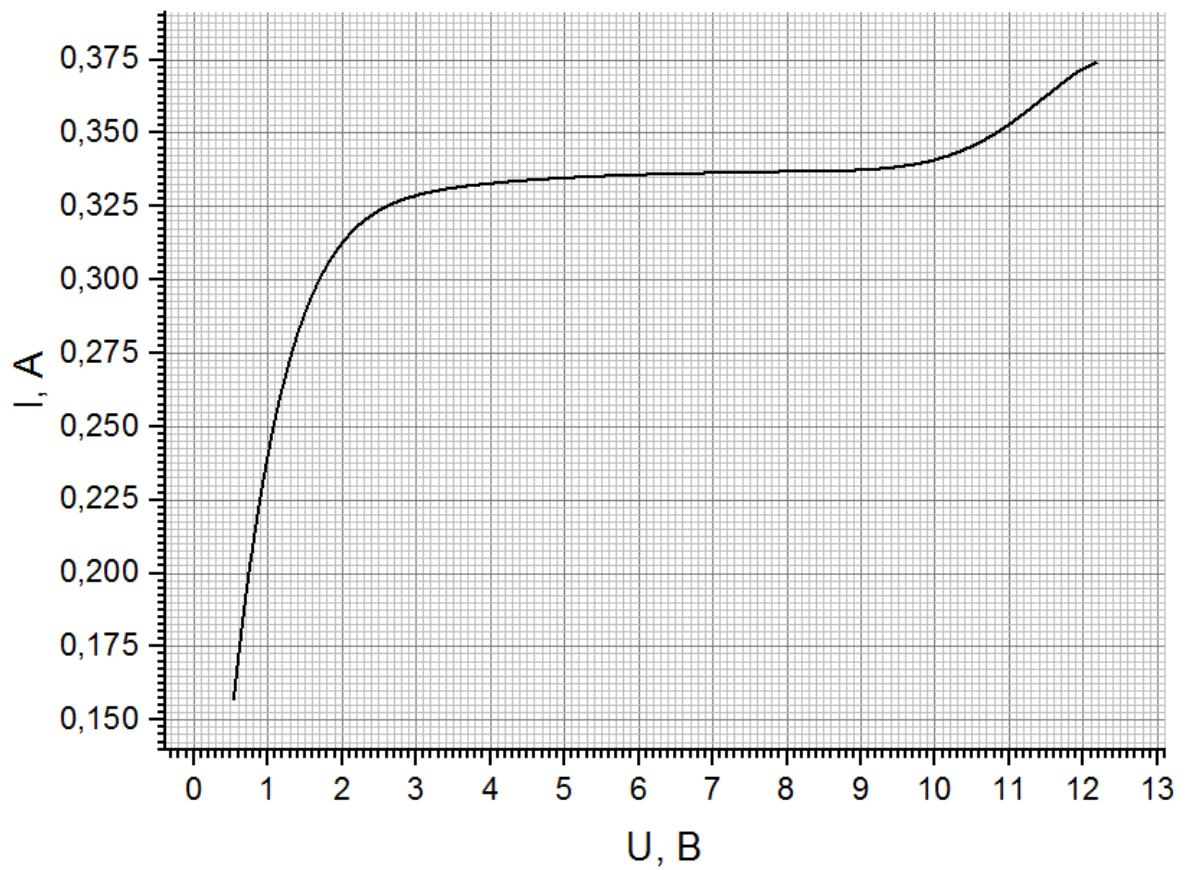
2.2. При последовательном подключении бареттера и резистора ток в цепи равно току

$$U = \frac{IR_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2} + IR_1$$

на бареттере, а напряжение в цепи определяется как  $U = \frac{IR_0}{1 - \frac{\gamma R_0}{A} I^2} + IR_1$ . Чтобы получить зависимость  $I(U)$ , необходимо соответственно решить кубическое уравнение, однако этого не требуется: чтобы построить вольтамперную характеристику, можно сперва построить зависимость  $U(I)$ , а затем обратить полученный график.



3.1. Для произвольной зависимости  $\rho(t)$   $I^2 \frac{\rho(t)}{\rho_0} R_0 = At$ . Отсюда  $I(t) = \sqrt{\frac{\rho_0 At}{\rho(t) R_0}}$ . Кроме того, из закона Ома следует, что  $U(t) = \sqrt{\frac{\rho(t) R_0 At}{\rho_0}}$ . Таким образом, получена параметрическая зависимость  $I(U)$  с температурой в качестве параметра.



- 3.2. Напряжение стабилизации составляет около  $U_{ст} = 7,5$  В.
- 3.3. В точке стабилизации ток равен  $I_{ст} = 0,337$  А. Соответственно области стабилизации соответствуют токи от 0,329 А до 0,345 А и напряжения от 3,0 до 10,5 В.



10 класс

## Задание 1. Разминка.

### Задача 1.1 «Дутые аттракционы»

**1.1.1 «Время накачки»** За одно качание насос захватывает из атмосферы массу  $m_1$  воздуха, попавшую в его открытую засасывающую камеру объёмом  $V_2$  при атмосферном давлении  $p_0$ . Из уравнения состояния идеального газа Клапейрона–Менделеева получим

$$p_0 V_2 = \frac{m_1}{M_B} RT \Rightarrow m_1 = \frac{p_0 V_2 M_B}{RT}. \quad (1)$$

Для нормальной работы аттракциона необходима масса воздуха  $m_B$

$$p_1 V_1 = \frac{m_B}{M_B} RT \Rightarrow m_B = \frac{p_1 V_1 M_B}{RT} = 291 \text{ кг}. \quad (2)$$

Как видим из (2), масса воздуха в аттракционе представляет собой достаточно значительную величину, для закачки которой скорее всего потребуются значительное время.

Поскольку насос равномерно (по массе) закачивает воздух, то механику Феде потребуется время для полной накачки

$$m_2 = m_1 N t \Rightarrow t = \frac{m_2}{N m_1} = \frac{p_1 V_1}{N p_0 V_2} = 2,5 \cdot 10^4 \text{ с} = 417 \text{ мин} = 6,9 \text{ ч}. \quad (3)$$

Как следует из (3) механик Федя никак не успеет к открытию аттракциона – нужно всё делать загодя (или поменять насос!). Действительно, таким насосом необходимо накачивать практически целый рабочий день, поскольку он рассчитан на обслуживание небольшого объема камеры автомобиля ( $V_3 \approx 60 \text{ л}$ ). Справедливости ради заметим, что все надувные аттракционы непрерывно подкачиваются в течение рабочего дня для компенсации утечки воздуха.

**1.1.2 «Скорость накачки»** Будем считать, что в процессе накачки поршень поднимается равномерно (т.е. находится в состоянии равновесия). Тогда давление под ним остаётся постоянным и равным

$$p(h) = p_0 + \frac{Mg}{S} = \text{const}, \quad (4)$$

что соответствует изобарному процессу.

Согласно уравнению Клапейрона - Менделеева можем записать

$$pV = (p_0 + \frac{Mg}{S})Sh = \frac{m}{M_B} RT. \quad (5)$$

Для высоты  $h$  поршня от массы закачанного газа  $m$  получаем выражение

$$h = \frac{m}{M_B} \frac{RT}{p_0 S + Mg} \Rightarrow h \sim m. \quad (6)$$

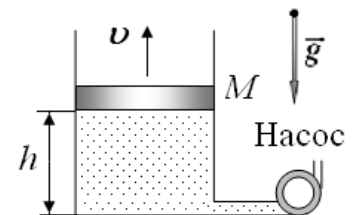
Согласно (6) высота поднятия поршня прямо пропорциональна массе закачанного в цилиндр газа. Согласно (3) через насос за время  $t$  пройдет масса воздуха

$$m(t) = m_1 N t = \frac{p_0 V_2 M_B}{RT} N \cdot t \Rightarrow m \sim t. \quad (7)$$

Следовательно, зависимость высоты  $h$  поднятия поршня от времени  $t$  при накачке имеет вид

$$h(t) = \frac{1}{M_B} \frac{RT}{p_0 S + Mg} \frac{p_0 V_2 M_B}{RT} N \cdot t = \frac{p_0 V_2 N}{p_0 S + Mg} \cdot t. \quad (8)$$

График полученной зависимости – прямая пропорциональность, поскольку



$$h(t) \sim t . \quad (9)$$

Из выражения (8) следует, что скорость движения поршня вверх равна коэффициенту пропорциональности в данной формуле

$$v = \frac{p_0 V_2 N}{p_0 S + Mg} = 2,0 \frac{\text{см}}{\text{с}} . \quad (10)$$

### Задача 1.2 «Газировка»

Количество газа, растворенного в воде, находится по формуле

$$v_0 = g V_L P_0 , \quad (1)$$

где обозначено  $g$  - растворимость углекислого газа в воде при данной температуре.

Если бы весь этот углекислый газ находился в газообразном состоянии, то он бы занимал объем, равный

$$P_0 V_0 = v_0 RT = g V_L P_0 RT \Rightarrow V_0 = v_0 RT = g V_L RT \quad (2)$$

Пусть объем газа под поршнем стал равным  $V$ , а его давление -  $P$ . При этом давлении количество растворенного газа равно

$$v_1 = g V_L P . \quad (3)$$

Следовательно, в газообразном состоянии находится

$$v = v_0 - v_1 = g V_L (P_0 - P) \quad (4)$$

молей углекислого газа. Для определения давления этого газа следует решить уравнение Менделеева-Клапейрона

$$PV = vRT = g V_L (P_0 - P)RT . \quad (5)$$

Из которого следует

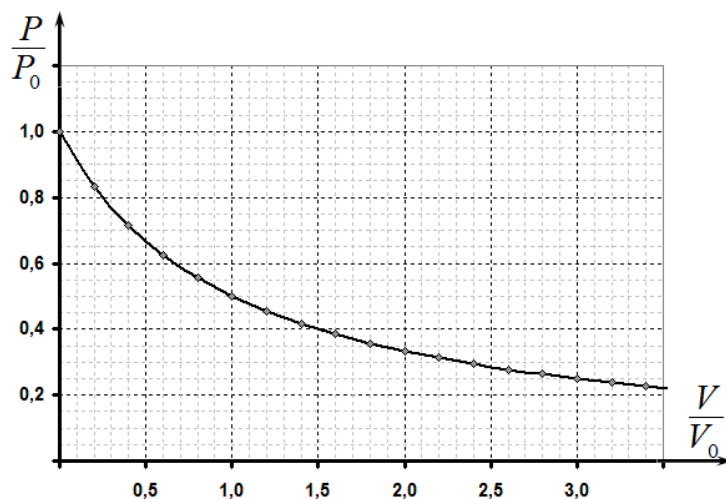
$$P = \frac{g V_L RT}{V + g V_L RT} P_0 . \quad (6)$$

Учитывая формулу (2), это выражение можно представить в виде

$$P = \frac{P_0}{\frac{V}{V_0} + 1} . \quad (7)$$

Точный график можно построить в

координатах  $\left( \frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0} \right)$  см. рисунок.



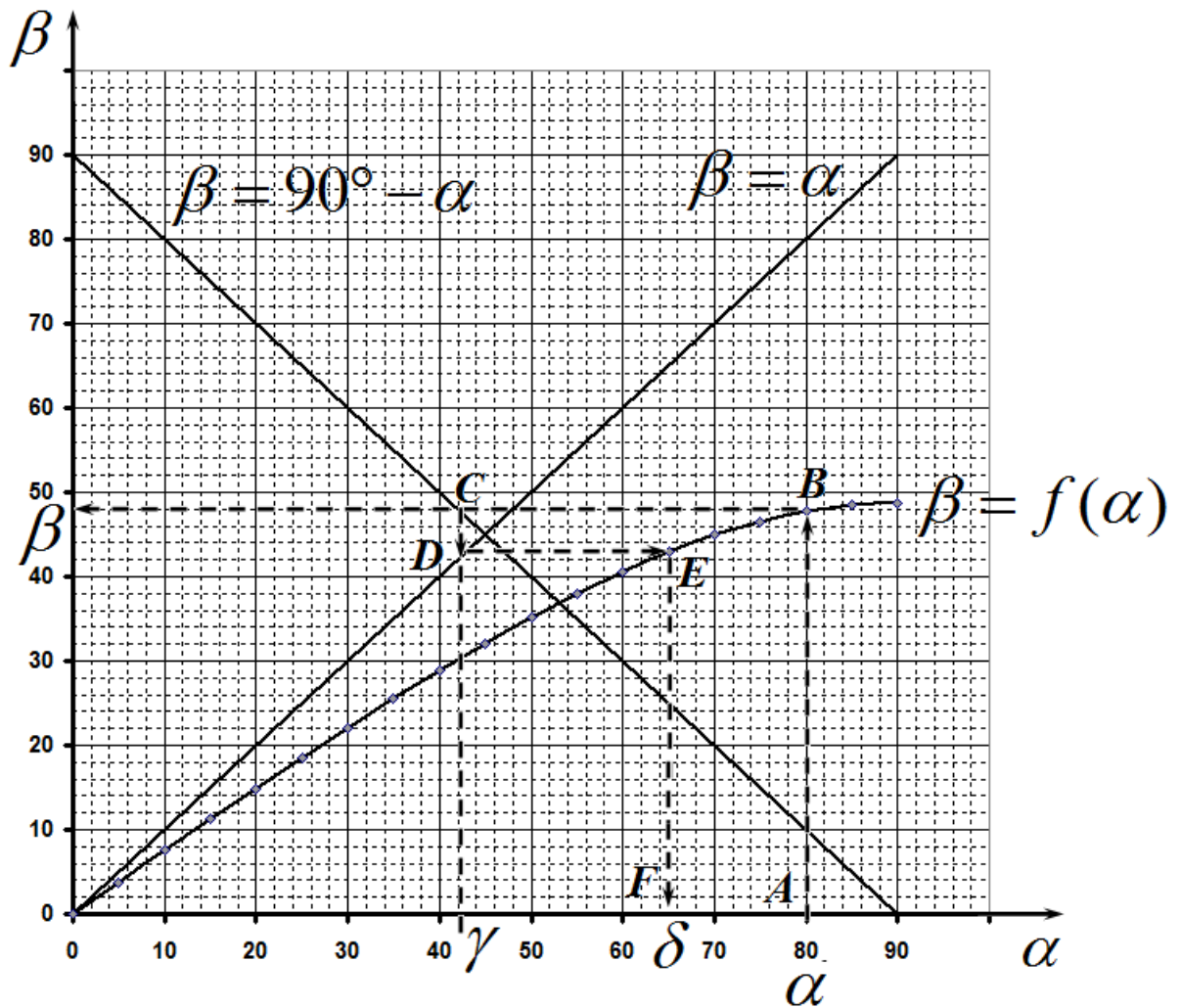
### Задача 1.3 «Водяной куб»

Непосредственно из рисунка, отражающего ход лучей, следует что

$$\gamma = 90^\circ - \beta \quad (1)$$

Поэтому на графике построим прямую, описываемую функцией  $\beta = 90^\circ - \alpha$ . Также построим прямую, описываемую выражением  $\beta = \alpha$ .

1.3.1



Последовательность графического решения задачи следующая:

- от точки  $A$  ( $\alpha = 80^\circ$ ) проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции  $\beta = f(\alpha)$  (точка  $B$ ), ее ордината равна углу  $\beta$  (по графику находим  $\beta \approx 48^\circ$ );

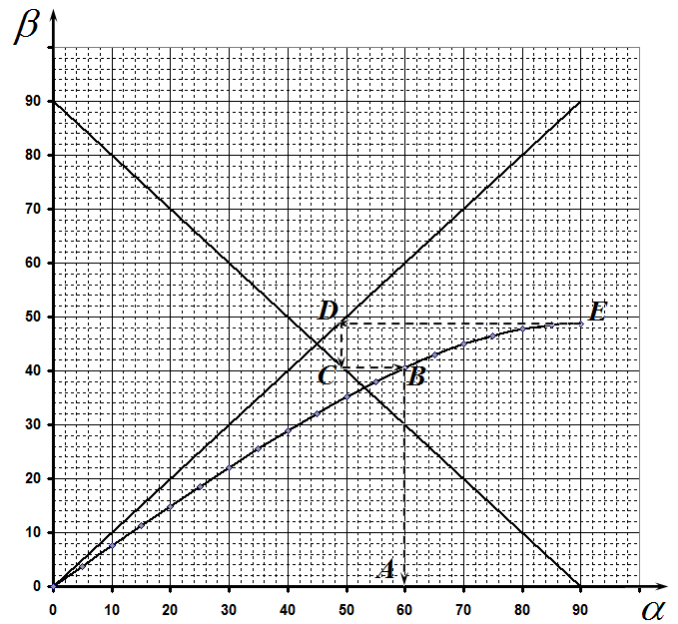
- от точки  $B$  проводим горизонтальную прямую до пересечения с прямой  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , (точка  $C$ ), ее абсцисса равна углу  $\gamma$  (по графику находим  $\gamma \approx 42^\circ$ );

- от точки  $C$  проводим вертикальную прямую до пересечения с прямой  $\beta = \alpha$  (точка  $D$ ), ее ордината также равна  $\gamma$ ;

- наконец, от точки  $D$  проводим горизонтальную прямую до пересечения с заданной функцией  $\beta = f(\alpha)$  (точка  $E$ ), ее абсцисса и есть искомый угол  $\delta = f^{-1}(\gamma)$ ;

здесь  $f^{-1}$  - обозначена обратная функция.

По графику находим  $\delta \approx 65^\circ$ .



1.3.2 Аналогичная процедура для начального значения  $\alpha = 62^\circ$  приводит к значению  $\delta \approx 80^\circ$ .

1.3.3 Из графика зависимости  $\beta = f(\alpha)$  видно, что максимальное значение угла преломления равно  $\beta_{\max} = 49^\circ$ . Для нахождения соответствующего значения угла падения  $\alpha$  необходимо от «конечной точки  $E$  (координатами  $(90^\circ, 49^\circ)$ ) проделать обратный путь  $EDCBA$ , который приводит к значению  $\alpha_{\min} \approx 60^\circ$ . При меньших углах падения решения задачи не существует, это означает, что на второй грани луч полностью отразится. Таким образом, диапазон углов, при которых луч выйдет через вторую грань  $60^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

## Задание 2. Средние скорости.

2.1.1. Модуль средней скорости:  $\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t}$ . Когда точка проходит через первоначальное

положение,  $\Delta r = 0 \Rightarrow \langle v \rangle = 0$ . Период вращения – это промежуток времени между двумя последовательными обращениями в ноль средней скорости. На рисунке это  $T = 0,5\text{с}$ .

**2.1.2.** Рассмотрим поворот колеса на угол  $\varphi = \frac{2\pi}{T}t$ .

Модуль перемещения за это время (см. рисунок 4):

$$\Delta r = 2R \sin \frac{\varphi}{2} \Rightarrow \Delta r = 2R \sin \frac{\pi t}{T} \Rightarrow$$

$$\langle v \rangle = 2 \frac{R}{t} \sin \frac{\pi t}{T}. \quad (1)$$

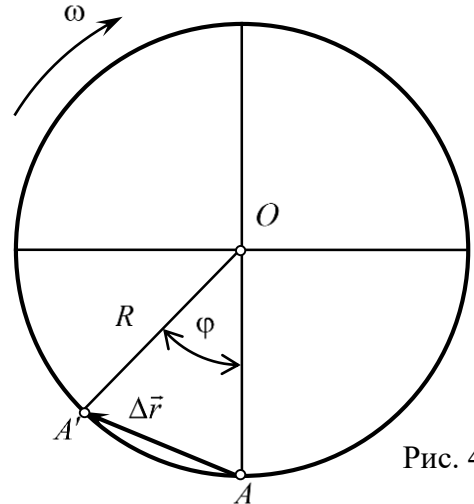


Рис. 4

**2.1.3.** Умножим числитель и знаменатель

выражения для  $\langle v \rangle$  на  $\frac{\pi}{T}$ :  $\langle v \rangle = \frac{\frac{\pi}{T} 2R \sin \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$ . При

$$t \rightarrow 0 \text{ получим: } \langle v \rangle = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow R = \frac{\langle v \rangle T}{2\pi}$$

$$\text{графика при } t = 0 \quad \langle v \rangle = 1,25 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow R = \frac{1,25 \cdot 0,5}{2\pi} = 0,1 \text{ м.}$$

**2.2.1.** Минимумы на графике соответствуют моментам касания точки поверхности земли. Промежуток времени между двумя последовательными касаниями равен периоду вращения колеса. Из графика:  $T = 0,4 \text{ с}$ .

**2.2.2.** Если колесо не проскальзывает на дороге, модуль линейной скорости вращения колеса равен модулю поступательного движения колеса, поэтому  $u = \frac{2\pi R}{T} = 1,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

**2.2.3.** Положение точки на ободе колеса может быть определено относительно неподвижной системы отсчета, связанной с поверхностью, и относительно колеса, которое является движущейся системой отсчета. Перемещения относительно этих систем отсчета связаны законом сложения перемещений:

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_0 + \Delta \vec{r}'.$$

Здесь  $\Delta \vec{r}$  – перемещение точки относительно

неподвижной поверхности;  $\Delta \vec{r}'$  – перемещение точки относительно колеса;  $\Delta \vec{r}_0$  – перемещение колеса относительно поверхности (см. рис. 5).

В проекциях на оси координат (см. рис. 5):

$$x = x_0 - x', \quad x_0 = ut, \quad x' = R \sin \varphi; \quad y = y', \quad y' = R - R \cos \varphi.$$

Угол  $\varphi = \omega t$ , где  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{u}{R}$  – угловая скорость вращения колеса. Окончательно:

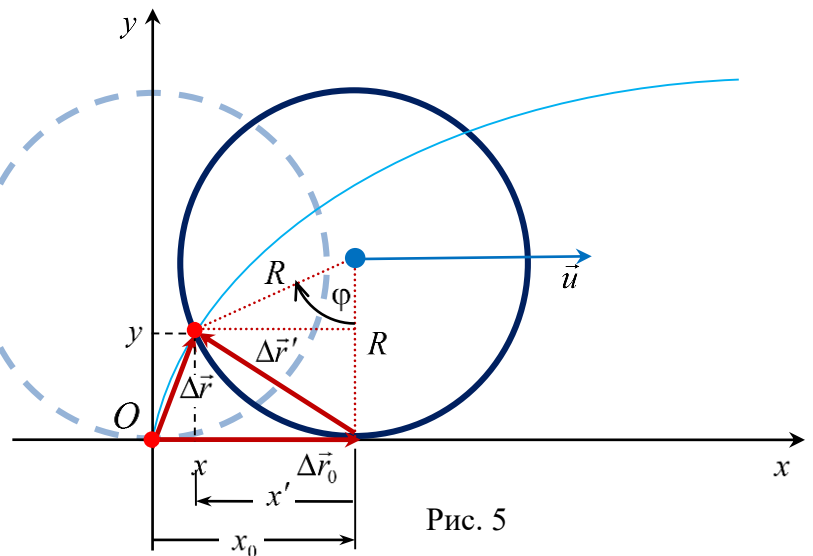


Рис. 5

$$\begin{cases} x = ut - R \sin \frac{ut}{R} \\ y = R \left( 1 - \cos \frac{ut}{R} \right) \end{cases}, \quad \Delta r = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \Delta r = \sqrt{\left( ut - R \sin \frac{ut}{R} \right)^2 + \left( R \left( 1 - \cos \frac{ut}{R} \right) \right)^2} \Rightarrow$$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t} = \frac{R}{t} \sqrt{\frac{ut}{R} \left( \frac{ut}{R} - 2 \sin \frac{ut}{R} \right) + 2 \left( 1 - \cos \frac{ut}{R} \right)}. \quad (2)$$

График этой функции приведен на рисунке 2 в условии.

**2.3.1.** Отсчитаем на рисунке второй минимум на графике, так как время этого минимума  $t_2 = 1,5$ с можно прочесть с достаточно высокой точностью. За время  $t_2$  колесо

совершило 2 полных оборота и прошло путь  $s = 2 \cdot 2\pi R = 4\pi R$ . Это расстояние равно  $\frac{at_2^2}{2}$ .

$$\text{В результате: } 4\pi R = \frac{at_2^2}{2} \Rightarrow a = \frac{8\pi R}{t_2^2} = \frac{8\pi \cdot 0,1}{1,5^2} = 1,12 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

**2.3.2.** В формуле (2) для равномерного движения колеса произведение  $ut$  – это путь, пройденный колесом при равномерном движении. В данном случае его необходимо

заменить на  $\frac{at^2}{2}$  – путь при равноускоренном движении из состояния покоя. В результате:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t} = \frac{R}{t} \sqrt{\frac{at^2}{2R} \left( \frac{at^2}{2R} - 2 \sin \frac{at^2}{2R} \right) + 2 \left( 1 - \cos \frac{at^2}{2R} \right)}. \quad (3)$$

График этой функции приведен на рисунке 3 в условии.

### Задание 3. Теплоемкость процесса.

#### Часть 1. Политропические процессы.

3.1.1 Теплоемкость системы определяется как отношение количества теплоты, полученной системой к изменению ее температуры

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T}. \quad (1)$$

Используя уравнение первого закона термодинамики для идеального газа

$$\delta Q = \Delta U + \delta A = C_V \Delta T + P \Delta V, \quad (2)$$

получим требуемое в условии соотношение

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = C_V + P \frac{\Delta V}{\Delta T}. \quad (3)$$

3.1.2 Запишем уравнение процесса в виде

$$PV^n = B, \quad (4)$$

где  $B$  - некоторая постоянная. С помощью уравнения состояния идеального газа

$$PV = RT \quad (5)$$

Выразим явную зависимость температуры газа от его объема

$$T = \frac{B}{R} V^{1-n}. \quad (6)$$

Из вида этой зависимости с помощью математической подсказки находим

$$\Delta T = \frac{B}{R} V^{-n} (1-n) \Delta V \Rightarrow \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{RV^n}{B(1-n)}. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение (3) выражения (7) и выражения для давления в данном процессе, следующее из (7), получим

$$C = C_v + P \frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n}. \quad (8)$$

3.1.3 Уравнение изобарного процесса  $P = const$  следует из общего уравнения политропического процесса  $PV^n = const$  при  $n = 0$ . Из общей формулы (8) следует, что в этом процессе  $C = \frac{5}{2}R$ .

Уравнение изотермического процесса имеет вид  $PV = const$ . Для этого процесса  $n = 1$ . Следовательно, в этом процессе  $C \rightarrow \infty$

Для определения параметров изохорного процесса, запишем общее уравнение политропического процесса в виде

$$PV^n = const \Rightarrow P^{\frac{1}{n}}V = const, \quad (9)$$

из которого следует, что в этом процессе  $n \rightarrow \infty$ , поэтому  $C = C_v = \frac{3}{2}R$ .

Из определения адиабатного процесса, как процесса без теплообмена, следует, что в этом процессе  $C = 0$ . Тогда из формулы (8) следует

$$C = \frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n} = 0 \Rightarrow n = \frac{5}{3}. \quad (10)$$

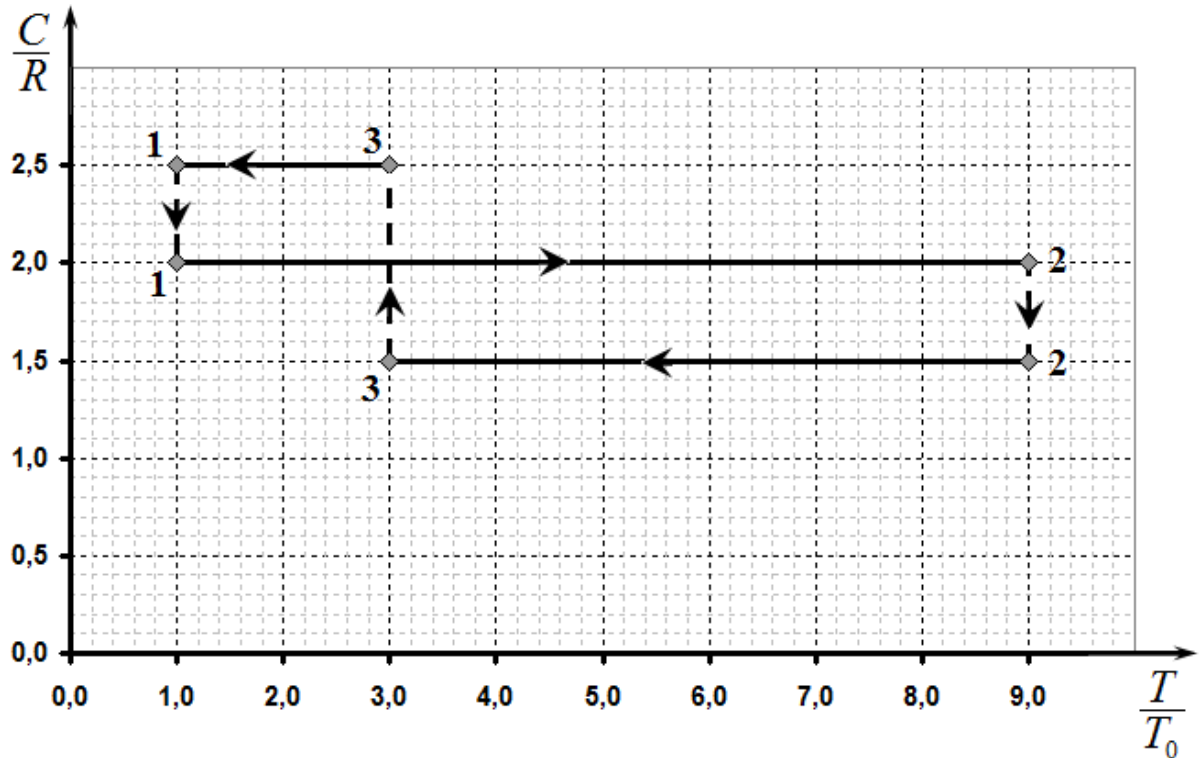
Полученные значения сведены в таблице.

**Таблица.**

№	Процесс	Показатель $n$	Молярная теплоемкость $C$
1	Изобарный	$n = 0$	$C = \frac{5}{2}R$
2	Изотермический	$n = 1$	$C \rightarrow \infty$
3	Изохорный	$n \rightarrow \infty$	$C = \frac{3}{2}R$
4	Адиабатный	$n = \frac{5}{3}$	$C = 0$

**Часть 2. «Разорванный» цикл.**

3.2.1 Из приведенного графика следует, что все участки приведенного цикла являются



политропическими процессами. В процессах 2-3 и 3-1 легко узнать изохорный и изобарный процессы, соответственно.

В процессе 1-2 теплоемкость постоянна и равна  $C = 2R$ , поэтому показатель политропы в этом процессе равен

$$\frac{3}{2}R + \frac{R}{1-n} = 2R \Rightarrow n = -1. \quad (11)$$

Следовательно, уравнение этого процесса имеет вид  $PV^{-1} = const = B$ , или

$$P = BV, \quad (12)$$

Т.е. в этом процессе давление прямо пропорционально объему!

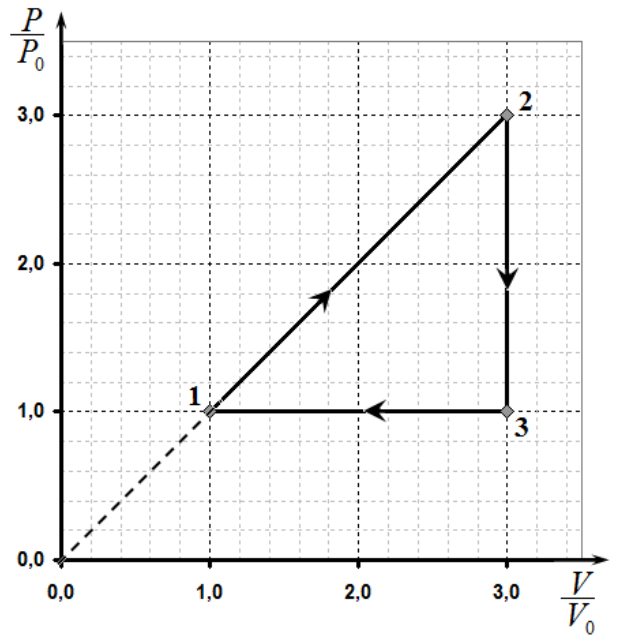
Из графика следует, что температура в этом процессе возросла в 9 раз. Подставляя уравнение процесса (12) в уравнения состояния, получим

$$BV^2 = RT. \quad (13)$$

Отсюда следует, что в данном процессе объем и давление возрастают в три раза.



Это позволяет построить график процесса в требуемых координатах  $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0}\right)$  (см. рисунок).



3.2.2 Работа, совершенная за цикл численно равна площади цикла в координатах  $(P, V)$ . Поэтому в данном случае

$$A_{\Sigma} = \frac{1}{2}(P_2 - P_3)(V_3 - V_1) = 2P_0V_0 \quad (14)$$

Используя уравнения состояния, последнее выражение можно записать в виде, который дает возможность найти численное значение работы

$$A = 2P_0V_0 = 2RT_0 = 5,0 \text{ кДж} \quad (15)$$

3.2.3 Очевидно, что в данном циклическом процессе газ получает теплоту только на участке 1-2. Согласно первому закону термодинамики это количество теплоты рассчитывается по формуле

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \quad (16)$$

Здесь изменение внутренней энергии

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1) = 12RT_0 = 12P_0V_0; \quad (17)$$

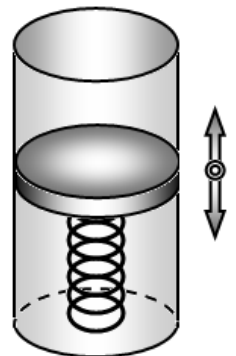
А работа на этом участке равна площади трапеции под отрезком прямой 1-2:

$$A_{12} = \frac{P_1 + P_3}{2}(V_3 - V_1) = 4P_0V_0. \quad (18)$$

Таким образом, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A_{\Sigma}}{Q_{12}} = \frac{2P_0V_0}{12P_0V_0 + 4P_0V_0} = \frac{1}{8} = 12,5\%. \quad (19)$$

3.2.4 Процесс, в котором давление возрастает пропорционально объему можно реализовать в сосуде с подвижным поршнем, если поршень прикреплен ко дну сосуда пружиной. Если пренебречь длиной пружины в недеформированном состоянии и внешним давлением, то процесс расширения газа будет описываться уравнением (12).



## 11 класс

### Задание 1. Разминка. Как будет лучше?

1.1. По какой бы траектории фермер не двигался, часть пути ему будет необходимо преодолеть по полю. Достичь какой-либо точки  $D$  на поле из точки  $A$  быстрее всего будет, конечно же, по прямой, так как в этом случае длина пути минимальна. Далее, если в какой-то момент времени фермер оказался на проселочной дороге, то дальше ему, очевидно, выгоднее идти домой в точку  $C$  именно по ней, так как скорость движения фермера по

дороге выше, чем по полю. Таким образом, оптимальная траектория фермера может быть только отрезком  $AC$  по полю или состоять из отрезка  $AE$  до некоторой точки  $E$  на дороге и отрезка  $EC$  по дороге (рисунок 1). Обе описанных траектории можно свести к движению по ломаной  $AEC$ , точка  $E$  которой находится на дороге на некотором расстоянии  $x$  от точки  $B$ . В предельном случае движения только по полю  $x_{\max} = BC = 2,0$  км.

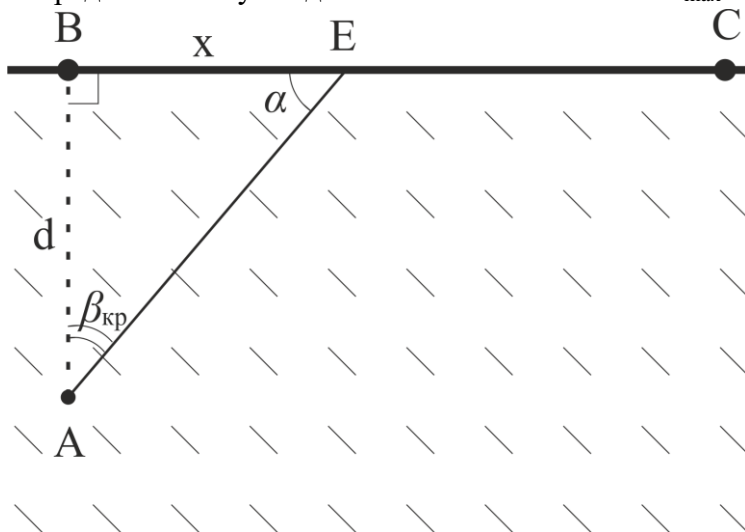


Рисунок 1

Определим, при каком расстоянии  $x$  время движения будет минимально. Для этого напишем выражение для этого времени:

$$t = \frac{AE}{v_1} + \frac{EC}{v_2} = \frac{\sqrt{d^2 + x^2}}{v_1} + \frac{l-x}{v_2} \quad (1)$$

Здесь мы ввели обозначения  $d = AB = 600$  м,  $l = BC = 2,0$  км. Для определения минимального времени посчитаем производную  $t'(x)$  и приравняем ее к нулю:

$$t'(x) = \frac{x_0}{v_1 \sqrt{d^2 + x_0^2}} - \frac{1}{v_2} = 0$$

Отсюда:

$$x_0 = \frac{v_1 d}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} = 612 \text{ м} \quad (2)$$

Математически равенство нулю не гарантирует то, что полученный результат является точкой минимума функции, а лишь указывает на наличие экстремума. Впрочем, минимум функции  $t(x)$  должен явно существовать на участке  $x > 0$  из физических соображений, а формула (2) дает единственную возможную ситуацию расположения такого минимума.

Отметим, что этот же результат можно было получить, не используя аппарат вычисления производной. Для этого выражение (1) можно преобразовать к виду квадратного уравнения относительно переменной  $x$ . Такое уравнение не должно иметь корней для случая  $t < t_{\min}$ , так как «быстрее минимального времени» до дома добраться нельзя. Пограничный случай  $t = t_{\min}$  тогда будет соответствовать ситуации, когда дискриминант описанного квадратного уравнения равен нулю. Выполнение этого требования путем математических преобразований приводит к тому же результату (2).

Таким образом, получаем ответ. Для наиболее быстрого пути домой фермеру необходимо двигаться вначале по полю по прямой к точке  $E$ , расположенной на дороге на расстоянии  $x_0 = 612$  м от точки  $B$ , а затем по проселочной дороге до дома в точке  $C$ . Другими словами, фермер должен двигаться по полю под углом  $\alpha = \text{arctg} \frac{d}{x_0} = 44,4^\circ$  к дороге, а дальше продолжить движение к дому по ней.

Альтернативный способ: Согласно принципу Ферма в оптике, свет движется из начальной точки в конечную по пути, соответствующем минимальному времени движения. Данный принцип можно применить для решения данной задачи. Предположим, что дорога  $BC$  – это граница раздела двух сред, в которых свет распространяется со скоростями  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Тогда показатели преломления этих сред  $n_1 = \frac{c}{v_1}$  и  $n_2 = \frac{c}{v_2}$ . Мы будем пытаться определить траекторию луча, движущегося из точки  $A$  в точку  $C$ , которая, согласно принципу Ферма, обеспечит минимальное время движения. Логично предполагая, что фермер хотя бы в самом конце пути к дому будет двигаться по проселочной дороге, получаем, что луч света часть пути должен распространяться вдоль границы двух сред. Такая ситуация реализуется при критическом угле падения на границу сред, при превышении которого в оптике происходит явление полного внутреннего отражения. Получаем, что для достижения минимального времени фермер, как и луч света, должен двигаться под углом  $\beta_{кр}$  к прямой  $AB$  (нормали к дороге), который можно рассчитать, используя выражение:

$$\sin \beta_{кр} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{7}$$

Отсюда  $\beta_{кр} = 45,6^\circ$  – угол между направлением движения фермера и нормалью или  $\alpha = 44,4^\circ$  – угол между направлением движения фермера по полю и дорогой.

Как видно, результаты альтернативных способов решения совпадают.

1.2. Максимальный КПД тепловой машины достигается при осуществлении рабочим телом цикла Карно. Для совершения машиной максимально возможной работы будем считать, что процесс состоит именно из таких циклов. При этом рабочее тело на каждом цикле будет забирать теплоту у нагревателя и отдавать холодильнику, то есть температура камней будет изменяться. Процесс с совершением работы уже не сможет происходить, когда температуры камней сравняются.

Пусть после очередного цикла температура горячего камня равна  $T_{гор}$ , а холодного –  $T_{хол}$ . В течение одного последующего цикла температура горячего камня изменится на  $\Delta T_{гор}$ , передав рабочему телу теплоту  $Q_{пол} = -C\Delta T_{гор}$ . (Знак «минус» учитывает тот факт, что  $\Delta T_{гор} < 0$  – камень охлаждается). Температура же холодного камня изменится на  $\Delta T_{хол}$ , получив от рабочего тела теплоту  $Q_{отд} = C\Delta T_{хол}$ . КПД данного цикла такой тепловой машины можно рассчитать следующим образом:

$$\eta = \frac{A}{Q_{пол}} = \frac{Q_{пол} - Q_{отд}}{Q_{пол}} = 1 - \frac{Q_{отд}}{Q_{пол}} = 1 + \frac{\Delta T_{хол}}{\Delta T_{гор}}$$

С другой стороны, если процесс осуществляется по циклу Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_{хол}}{T_{гор}}$$

где температуры выражены по шкале Кельвина. Сравнивая два выражения для КПД, получаем:

$$\frac{\Delta T_{хол}}{T_{хол}} = -\frac{\Delta T_{гор}}{T_{гор}}$$

Согласно примечанию в условии задачи такая связь температур говорит о том, что в ходе всего процесса будет сохраняться их произведение:  $T_{гор} \cdot T_{хол} = const$ . Если обозначить конечную температуру обоих камней  $T_k$ , зная начальные их температуры, можно записать:

$$T_1 T_2 = T_k T_k = T_k^2$$

Отсюда  $T_k = \sqrt{T_1 T_2} = 339,8 \text{ K} = 66,8 \text{ }^\circ\text{C}$ . Пренебрегая теплоемкостью рабочего тела – газа по сравнению с теплоемкостью камней, то есть пренебрегая изменением внутренней энергии газа за весь процесс, можем записать второе начало термодинамики и определить искомую максимально возможную работу:

$$A_{max} = Q_{пол} - Q_{отд} = C(T_1 - T_k) - C(T_k - T_2) = C(T_1 + T_2 - 2T_k) = 52,3 \text{ кДж}$$

1.3. В случае А) очевидным является тот факт, что одним зеркалом необходимо отразить сразу оба луча, так как, распространяясь прямолинейно, ни один из них в щель не попадает. При построении отражения в плоском зеркале популярным является метод изображений, когда продолжения лучей мысленно по прямой продолжают за зеркало, а потом, для построения их настоящего хода, симметрично геометрически отражаются от зеркальной плоскости. Можно заметить, что при таком построении расстояние между какими-либо двумя точками лучей не изменяются, отражаются оба луча в зеркале или нет. Таким образом, для того чтобы оба луча «сошлись» в щели, в точку А необходимо отразить ту точку, где лучи и так сходятся на близкое (а лучше нулевое) расстояние – то есть точку их пересечения С (рисунок 2).

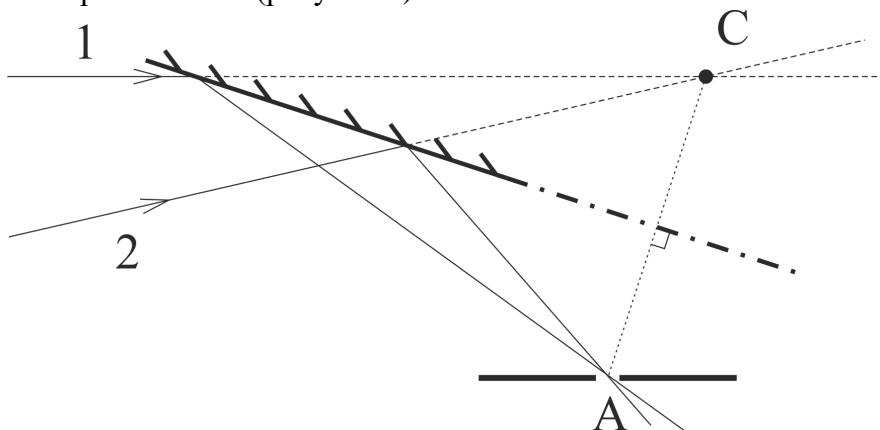


Рисунок 2

Для того чтобы точка А была изображением точки С зеркало должно находиться ровно посередине между указанными точками, а его плоскость должна быть перпендикулярна АС. Получив плоскость расположения зеркала, достаточно лишь изобразить его такого размера, чтобы лучи 1 и 2 попадали на поверхность и отражались. Теперь лучи пересекутся прямо в точке А, то есть оба пройдут через щель.

В случае Б) можно заметить, что диапазон DE, на котором лучи идут достаточно близко друг к другу, чтобы одновременно пройти через щель, меньше расстояния АВ между щелями (рисунок 4). Так как при отражениях в плоских зеркалах расстояния между точками не изменяется, получаем, что, отражая одновременно два луча, мы никаким образом не сможем их направить через обе щели.

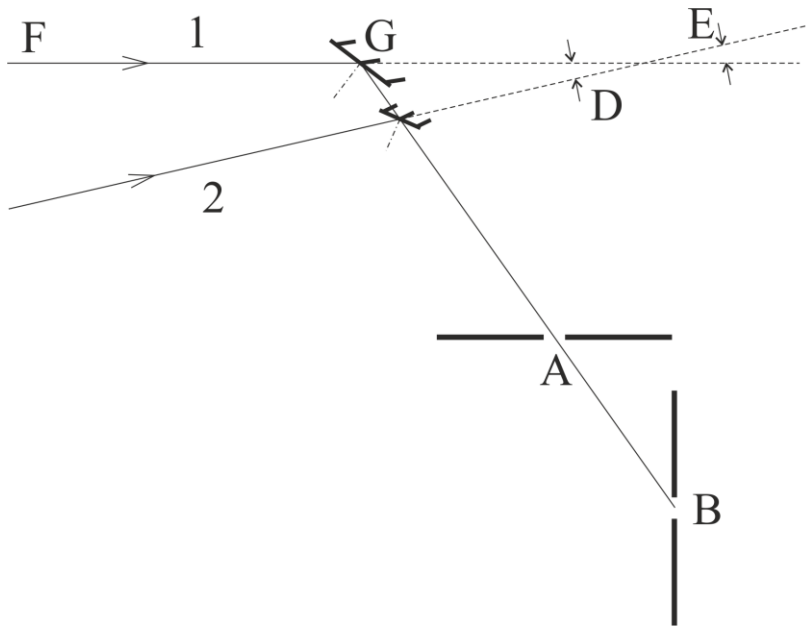


Рисунок 3

С другой стороны, никто не запрещает отражать каждый луч своим зеркалом по отдельности. Действительно, для того чтобы любой луч прошел через обе щели, его достаточно направить по прямой  $AB$ . Для этого построим угол  $FGB$ , как показано на рисунке 3 и найдем его биссектрису. Маленькое зеркало должно располагаться в точке  $G$  перпендикулярно полученной биссектрисе. Аналогичное построение можно сделать и для второго луча. Далее используя небольшой, но все же не нулевой размер щели, необходимо немного сместить одно или оба зеркала так, чтобы каждое отражало только один луч и не мешало прохождению второго (на рисунке 4 не отображено). Таким образом, оба луча примерно параллельно друг другу пройдут через обе щели  $A$  и  $B$ .

Ироничный момент задачи состоит в том, что в пункте А) необходимо взять достаточно большое зеркало, чтобы на него попали сразу оба луча. В пункте Б) наоборот, стоит выбрать зеркала поменьше, чтобы они отразили только один луч и не мешали ничему остальному.

## Задание 2. «Made in Chine».

Напряжение на клеммах  $U$ , рассчитанное Федей по формулам, при высокой точности расчетов будет отличным от истинного по той причине, что амперметр также обладает некоторым сопротивлением  $R_a$ . В случае подключения амперметра в точке  $A$  цепи Федя будет рассчитывать напряжение по формуле:

$$U^A = I_a^A \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Где  $I_a^A$  – сила тока через амперметр в случае  $A$ . В то же время «настоящее» напряжение на клеммах равно:

$$U^{real} = I_a^A \left( R_a + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

В случае подключения амперметра в точке  $B$  эти напряжения будут равны:

$$U^B = I_a^B R_1 \quad U^{real} = I_a^B (R_1 + R_a)$$

В случае точки  $C$ :

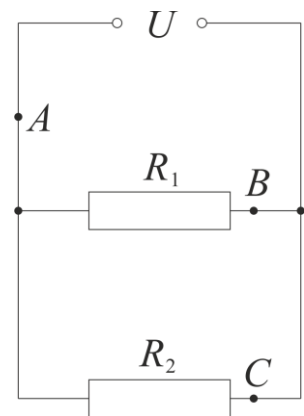


Рисунок 2

$$U^C = I_a^C R_2 \quad U^{real} = I_a^C (R_2 + R_a)$$

Отличия напряжения, рассчитанного Фейдей от истинного в каждом случае равно:

$$\Delta U^A = I_a^A R_a = R_a \frac{U^{real}}{R_a + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U^{real} R_a \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2}$$

$$\Delta U^B = I_a^B R_a = U^{real} R_a \frac{1}{R_1 + R_a}$$

$$\Delta U^C = I_a^C R_a = U^{real} R_a \frac{1}{R_2 + R_a}$$

Все выражения записаны через сопротивления и напряжение  $U^{real}$ , так как эти величины одинаковы для всех трех подключений  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Можно отметить, что случаи  $B$  и  $C$  отличаются лишь заменой  $R_1$  на  $R_2$ , то есть результаты всех вычислений для одного из них будет легко перенести на другой. Поэтому, прежде всего, сравним погрешности Федейных расчетов в случаях  $A$  и  $B$ .

Наиболее точный результат даст то положение амперметра в цепи, для которого соответствующее  $\Delta U$  будет меньше. Для того, чтобы сравнить ситуации  $A$  и  $B$  вычтем одно отклонение  $\Delta U$  из другого:

$$\begin{aligned} \Delta U^A - \Delta U^B &= U^{real} R_a \left( \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2} - \frac{1}{R_1 + R_a} \right) = \\ &= U^{real} R_a \frac{R_1^2 + R_1 R_a + R_1 R_2 + R_2 R_a - R_1 R_a - R_2 R_a - R_1 R_2}{(R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2)(R_1 + R_a)} = \\ &= U^{real} R_a \frac{R_1^2}{(R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2)(R_1 + R_a)} > 0 \end{aligned}$$

Как видно, разница положительна, то есть  $\Delta U^A > \Delta U^B$ . Аналогично можно получить  $\Delta U^A > \Delta U^C$ . Наконец, сравнивая между собой  $\Delta U^B$  и  $\Delta U^C$ , замечаем, что они отличаются только знаменателем, причем знаменатель в  $\Delta U^C$  больше, так как  $R_2 > R_1$ . Получаем, что минимальное отклонение рассчитанного напряжения от действительного  $\Delta U$ , то есть «наиболее правильное» измерение, реализуется при подключении амперметра в точке  $C$ .

### Задание 3. Как разгоняется газ?

#### Часть 1. В цилиндрической трубе.

1.1 Для определения установившегося ускорения поршней воспользуемся вторым законом Ньютона

$$ma = \Delta PS. \quad (1)$$

Здесь  $m$  - масса газа между поршнями, которая находится из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M} RT, \quad (2)$$

которое следует записать для начального состояния газа

$$P_0 S l_0 = \frac{m}{M} RT_0 \Rightarrow m = \frac{P_0 S M}{RT_0} l_0. \quad (3)$$

Тогда из уравнения (1) получим

$$a = \frac{RT}{P_0 l_0 M} \Delta P. \quad (4)$$

1.2 Для расчета зависимости давления газа от начальной координаты  $P(x)$  учтем, что разность сил давлений, действующих на малую выделенную порцию газа (толщина которой в начальном состоянии равна  $\Delta x$ ) должна обеспечивать ей ускорения, определяемое формулой (4). Так как масса этой порции может быть найдена по формуле, аналогичной формуле (3)  $\Delta m = \frac{P_0 S M}{RT} \Delta x$ , то искомая разность сил давлений  $\delta P$  может быть найдена из уравнения второго закона Ньютона для этой порции газа:

$$\Delta m a = -\delta P S \quad (5)$$

Используя выражения для массы порции и ее ускорения, получим, что

$$\frac{\delta P}{\Delta x} = -\frac{\Delta P}{l_0}. \quad (6)$$

Из этого выражения следует, что давление изменяется по линейному закону<sup>1</sup>, который с учетом граничного условия (при  $x = 0$   $P = P_0 + \Delta P$ ), имеет вид

$$P = P_0 + \Delta P \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \quad (7)$$

1.3 Выразим толщину слоя выделенной порции ускорено движущегося газа через ее относительную деформацию

$$\delta x = (1 + \varepsilon) \Delta x \quad (8)$$

Так как на первом этапе установления равновесия мы пренебрегаем теплообменом между слоями, то для каждого из слоев можно применить уравнение адиабатического процесса

$$P_0 (\Delta x)^\gamma = P ((1 + \varepsilon) \Delta x)^\gamma \quad (9)$$

Так как относительные деформации равны, то к этому выражению можно применить приближенную формулу, приведенную в условии задачи, в результате получим

$$P = P_0 (1 + \varepsilon)^{-\gamma} \approx P_0 (1 - \gamma \varepsilon). \quad (10)$$

Теперь, применяя найденную зависимость (7), определим зависимость относительной деформации от координаты

$$P = P_0 + \Delta P \left(1 - \frac{x}{l_0}\right) = P_0 (1 - \gamma \varepsilon) \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\Delta P}{\gamma P_0} \left(1 - \frac{x}{l_0}\right). \quad (11)$$

1.4 Так как в использованном приближении эта зависимость линейна, то для вычисления изменения расстояния  $\Delta l_1$  между поршнями можно использовать среднее значение относительной деформации, поэтому

$$\Delta l_1 = l_0 \langle \varepsilon \rangle = -\frac{\Delta P}{2\gamma P_0} l_0. \quad (12)$$

Таким образом, на этом этапе расстояние между поршнями уменьшится, т.е. газ сожмется.

1.5 Теперь температура каждого выделенного слоя может быть найдена из уравнения

Клапейрона  $\frac{PV}{T} = const$ , которое в данном случае записывается в виде

$$\frac{P_0 S \Delta x}{T_0} = \frac{PS(1 + \varepsilon) \Delta x}{T}. \quad (13)$$

Учитывая найденные зависимости давления и относительной деформации, из этого уравнения находим

<sup>1</sup> Еще раз отметим, что такая линейная зависимость получена для начальных координат рассматриваемых слоев – если же рассматривать зависимость от координаты движущегося и деформированного газа эта зависимость будет гораздо сложнее!

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\Delta P}{P_0} \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) \right) \left( 1 - \frac{\Delta P}{\gamma P_0} \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) \right). \quad (14)$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малыми величинами второго порядка, это выражение приводится к виду

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) \right) \quad (15)$$

1.6 Установившуюся температуру газа между поршнями после установления теплового равновесия следует искать из условия сохранения внутренней энергии газа. Заметим, что это возможно, так как на этом этапе мы пренебрегаем работой внешних сил. Обратим внимание, что в использованном приближении температура также изменяется по линейному закону, поэтому установившуюся температуру можно найти, взяв среднее значение изменения температуры, поэтому

$$\bar{T} = T_0 \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} \right). \quad (16)$$

1.7 Для расчета изменения расстояния между поршнями после установления теплового равновесия следует применить ту же методику:

- распределение давлений определяется динамическими условиями, поэтому остается прежним и описывается формулой (7);
- установившееся распределение относительных деформаций находится из уравнения состояния газа, записанного для каждого слоя с учетом равенства их температур:

$$\begin{aligned} \frac{P_0 S \Delta x}{T_0} = \frac{PS(1 + \bar{\varepsilon}) \Delta x}{\bar{T}} &\Rightarrow 1 + \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{T}}{T_0} \frac{P}{P_0} = \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} \right) \left( 1 + \frac{\Delta P}{P_0} \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) \right) \approx \\ &\approx 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta P}{P_0} \left( 1 - \frac{x}{l_0} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

- средняя относительная деформация оказывается равной

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} + \frac{\Delta P}{2P_0} = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0}; \quad (18)$$

- наконец, изменение расстояния между поршнями становится равным

$$\Delta \bar{l}_2 = \langle \bar{\varepsilon} \rangle l_0 = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} \frac{\Delta P}{P_0} l_0 \quad (19)$$

Из полученного выражения следует, что расстояние между поршнями увеличится, то есть в итоге – газ расширится!

## Часть 2. В сопле переменного сечения.

2.1 Процесс расширения газа при прохождении сопла можно считать адиабатным, так как движение газа по соплу происходит достаточно быстро, а массу порции газа — постоянной:

$$pV^\gamma = const, m = const \Rightarrow p\rho^{-\gamma} = const.$$

И в результате:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}. \quad (20)$$

2.2 Используя (20), можно записать:

$$\rho + \Delta\rho = \rho_0 \left( \frac{p + \Delta p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \approx \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} + \Delta p \frac{\rho_0}{\gamma} \frac{p^{\frac{1}{\gamma}-1}}{p_0^{1/\gamma}} \Rightarrow \Delta\rho = \Delta p \frac{\rho_0}{\gamma} \frac{p^{\frac{1}{\gamma}-1}}{p_0^{1/\gamma}} = \Delta p \frac{\rho}{\gamma p}.$$

Используя формулу локальной скорости звука, получим:



$$\Delta\rho = \frac{\Delta P}{c^2} \quad (21)$$

2.3 Рассмотрим слой газа небольшой толщины  $\Delta x$  и площади  $S$  (считаем, что площадь практически не меняется за малое  $\Delta x$ ). Запишем второй закон Ньютона для этого слоя в проекции на ось симметрии сопла:

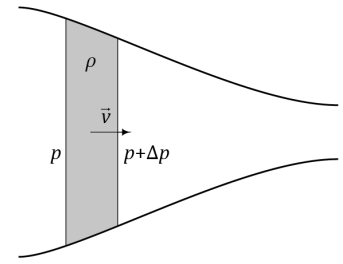
$$ma = -\Delta p S.$$

Считаем порцию газа достаточно малым однородным слоем площадью  $S$  и толщиной  $\Delta x$ :

$$m = S\rho\Delta x \Rightarrow S\rho a\Delta x = -\Delta p S \Rightarrow \rho a\Delta x = -\Delta p.$$

Учитывая, что газ пройдет расстояние  $\Delta x$  за промежуток времени  $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$ , а скорость изменится на величину  $\Delta v = a\Delta t$ :

$$\Delta v = -\frac{\Delta p}{\rho v}. \quad (22)$$



2.4 Так как масса газа, проходящая через сопло в единицу времени,  $Q$  должна быть постоянной величиной, получаем, что:

$$Q_+ - Q_- = 0, \\ \rho v S - (\rho + \Delta\rho)(v + \Delta v)(S + \Delta S) = 0.$$

Пренебрегая произведениями малых величин, получаем:

$$\Delta\rho v S + \rho\Delta v S + \rho v\Delta S = 0.$$

Подставим найденные ранее выражения для изменения плотности:

$$-\frac{\Delta v \rho v}{c^2} v S + \rho\Delta v S + \rho v\Delta S = 0$$

И выразим искомое изменение скорости

$$\Delta v = \frac{v\Delta S}{S\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)} \quad (23)$$

2.5 Для этого пункта требуется анализ выражения (23). Движение газа через сопло можно разделить на три части, как это указано на рисунке:

$$\text{I. } v < c, \Delta v > 0, \frac{v\Delta S}{S\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)} > 0$$

Так как знаменатель меньше единицы, мы получаем, что  $\Delta S < 0$ .

$$\text{II. } v > c, \Delta v > 0, \frac{v\Delta S}{S\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)} > 0$$

Так как знаменатель стал больше единицы, мы получаем, что  $\Delta S > 0$ .

III.  $v = c$ . Это переходная часть, где  $\Delta S = 0$ .

Таким образом, мы получили, что для того, чтобы газ постоянно ускорялся необходимо, чтобы сначала канал должен сужаться, а после достижения локальной скорости звука должен расширяться.

