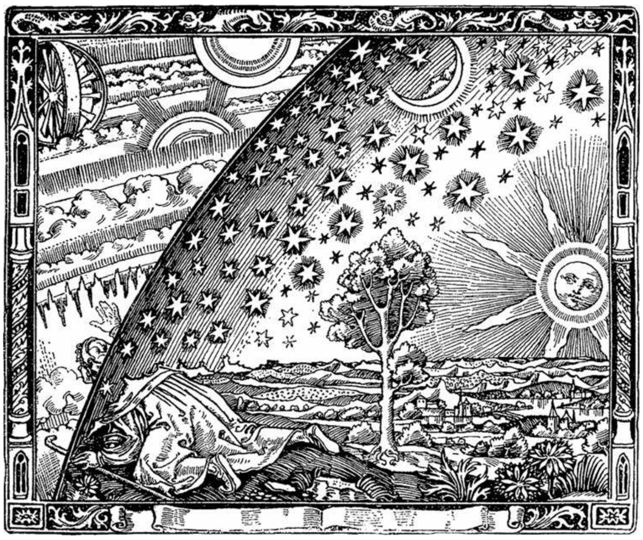
А.И. Слободянюк
А.А. Мищук
В.И. Анцулевич
Л.Г. Маркович

Республиканская физическая олимпиада (III этап) 2012 год



Теоретический тур

Условия задач.
9 класс

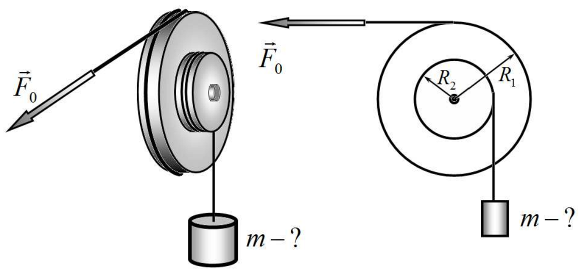
Задача 9.1. Простая задача про простые механизмы.

Когда великий Архимед открыл правило рычага, он воскликнул: «Дайте мне точку опоры, и я переверну Землю!».

И не случайно – еще в античные времена это правило трансформировалось в «золотое правило механики»: «ни один механизм не дает выигрыша в работе, во сколько раз выигрываешь в силе, во столько раз проигрываешь в работе!». А через 2 тысячи лет из этого правила вырос закон сохранения энергии, основа современной физики.

Вам предстоит доказать, что Вы тоже понимаете «золотое правило механики» и его применение к различным механизмам. В каждой части не только приведите ответ, но и обоснуйте его. Во всех устройствах трением пренебрегайте.

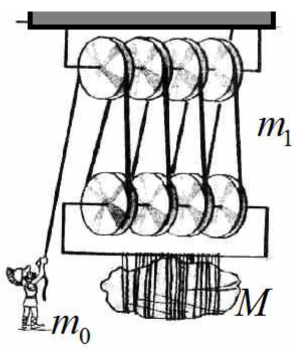
1.1 Ворот.



Подъемное устройство (ворот) состоит из двух соединенных толстых дисков, насаженных на одну горизонтальную ось. Радиусы дисков равны R_1, R_2.

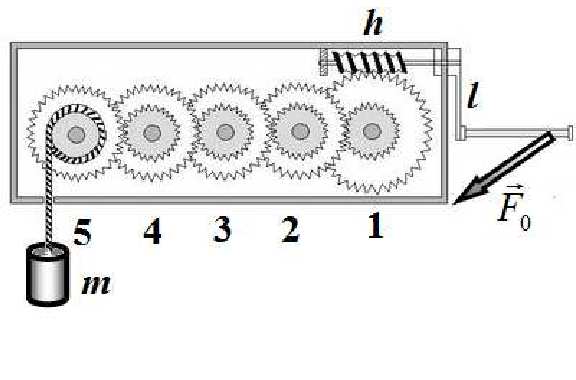
На боковые поверхности дисков намотаны крепкие веревки. Одну из них тянут горизонтально с постоянной силой $\vec{F}_0$. Определите массу груза m, который можно поднять с помощью этого устройства.

1.2 Полиспаст.



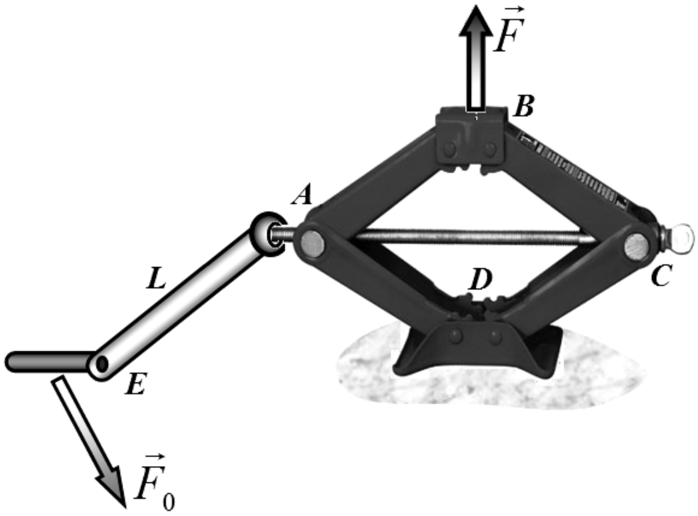
На рисунке показано еще одно подъемное устройство – полиспаст. Определите массу груза M, который может поднять человек массы m_0 с помощью этого устройства. Масса всех одинаковых блоков полиспаста равна m_1, массой остальных его частей можно пренебречь.

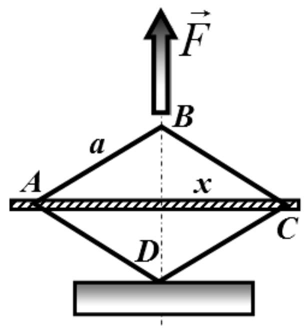
1.3 Лебедка.



На рисунке показана схема еще одного подъемного устройства – лебедки. Сдвоенные шестерни 1-4 имеют n_1 зубьев на большей шестеренке и n_2 зубьев на меньшей шестеренке (причем $n_1 = 2n_2$). На последней 5 ступени меньшая шестеренка заменена на диск радиуса r, на который намотана веревка, к которой привязывают поднимаемый груз m. Первую шестерню приводят во вращения с помощью червячного механизма. Ось червяка вращают с помощью ручки, длина плеча которой равна l. Силу F_0 прикладывают к рукоятке перпендикулярно плечу. Определите массу груза, которую можно поднять с помощью этой лебедки.

1.4 Домкрат.





На рисунке показан домкрат и его схема. Основу домкрата составляет подвижная рама ***ABCD,*** имеющая форму ромба со стороной $a = 25\,см$. Эти стороны соединены шарнирно. Между точками ***A*** и ***C*** находится стержень с резьбой с шагом $h = 2{,}0\,мм$. При вращении стержня узел ***A*** (внутри которого имеется гайка с соответствующей резьбой) приближается к узлу ***C,*** при этом узел ***B*** поднимается и поднимает необходимый груз. Стержень с резьбой вращают с помощью рукоятки ***AE,*** длина которой $L = 30\,см$. Силу $F_0 = 50\,Н$ прикладывают к ручке рукоятки перпендикулярно к плечу ***AE.*** Рассчитайте подъемную силу домкрата (т.е. силу F) в тот момент, когда расстояние ***AC*** (обозначим его x) в два раза больше расстояния ***BD.***
Постройте примерный график зависимости подъемной силы домкрата от длины x (которая изменяется в ходе подъема).

<u>Подсказка.</u> Рассмотрите малое изменение величины x.

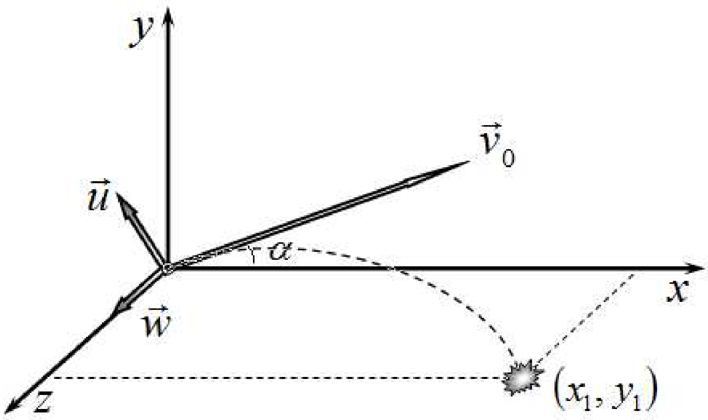
Задача 9.2. Убойная задача про убойные механизмы.

Попасть точно в цель из артиллерийского орудия — не простая задача. Еще более сложная — рассчитать, куда попадет снаряд при заданной скорости вылета и ориентации ствола. Необходимо рассмотреть множество факторов — ветер, вращение земли и т. д. В данной задаче мы предлагаем Вам учесть тот факт, что снаряд вылетает не точно вдоль ствола, а имеет некоторую скорость и в перпендикулярном направлении. Величина и направление этой скорости зависят от многих случайных факторов, поэтому при одной и той же ориентации ствола и одинаковой начальной скорости (вдоль ствола) вылета снарядов они будут попадать в некоторую область, границы которой Вам предстоит определить.

Для разминки. Пусть снаряд вылетает из пушки со скоростью v_0, направленной вдоль ствола, ориентированного под углом α к горизонту. Ось x направим вдоль земли в направлении движения снаряда. Ось y - перпендикулярно земле.

0. Запишите уравнения движения снаряда ($x(t)$, $y(t)$) и определите дальность полета x_0 .

Помимо скорости $\vec{v}_0$ направленной вдоль оси ствола (в плоскости xOy и под углом α к горизонту) в результате случайных факторов снаряд в момент выстрела приобретает дополнительную скорость, направленную перпендикулярно вектору $\vec{v}_0$. Эту дополнительную скорость можно разложить на две компоненты: $\vec{u}$, лежащую в плоскости xOy, и $\vec{w}$ - направленную перпендикулярно ей, то есть вдоль оси Oz.



1. Запишите выражения для проекций скорости снаряда на соответствующие оси координат: v_x , v_y , v_z .

2. Запишите уравнения движения снаряда вдоль всех трех осей.

3. Определите координаты места падения снаряда $(x_1; z_1)$.

Отклонением снаряда от расчетной траектории назовем величины: $\Delta x = x_1 - x_0$ и $\Delta z = z_1$. Скорости u и w значительно меньше скорости v_0, поэтому, отбросив несущественные слагаемые, выражения для Δx и Δz можно записать в простом виде:

$$\Delta x = A\cos 2\alpha$$
$$\Delta z = B\sin\alpha$$

4. Выразите постоянные A и B через u и w, v_0 и ускорение свободного падения g .

Пусть $v_0 = 500 м/с$, $g = 10{,}0 м/с^2$. Рассмотрите частные случаи:

а) $u = \pm 10{,}0 м/с$, $w = 0$.

б) $w = \pm 10{,}0 м/с$, $u = 0$.

5. Рассчитайте величины отклонений (Δx и Δz) для углов $30{,}0^\circ$, $45{,}0^\circ$ и $60{,}0^\circ$ градусов.

При стрельбе скорости u и w меняются случайным образом, однако максимальная суммарная перпендикулярная скорость ($\sqrt{u^2 + w^2}$) не превосходит значения u_0. Пусть $u_0 = 10 м/с$.

6. Изобразите схематически область, в которую будут попадать снаряды при многочисленных выстрелах с одной и той же скоростью $v_0 = 500 м/с$ при одинаковом угле α. Рассмотрите три случая для углов: $30{,}0^\circ$, $45{,}0^\circ$ и $60{,}0^\circ$ градусов.

Тригонометрические подсказки:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$$

Задача 9.3 Большая теплая задача про тепловые большие механизмы.

По сообщению Министерства энергетики Республики Беларусь ежегодно в стране производится **36 млн. Гкал** тепловой энергии. Эту энергию мало произвести – ее еще надо доставить потребителю – например, Вам, для обогрева квартиры! В данной задаче необходимо провести некоторые расчеты, связанные с производством и передачей тепловой энергии, а также рассмотреть альтернативные возможности ее передачи.

Во всех пунктах задач обязательно приведите расчетные формулы, а затем результаты численных расчетов.

Обратите внимание – в конце задачи приведены необходимые справочные данные!

Часть 1. Что мы имеем?

Традиционно производство тепловой энергии осуществляется посредством нагревания воды при сжигании топлива и ее последующей транспортировки по теплотрассам к потребителю.

1.1 Рассчитайте сколь тонн воды, которую необходимо нагреть от температуры $t_0 = 20°C$ до температуры $t_1 = 90°C$, чтобы произвести всю тепловую энергию за год в нашей стране.
1.2. Сколько тонн нефти необходимо сжечь, что бы произвести это количество тепловой энергии? Считайте, что КПД нагревательной установки составляет $\eta = 80\%$.
1.3. Допустим, что вся нагретая вода поставляется по трубам, причем средняя скорость течения воды в трубе составляет $v = 10\frac{м}{с}$. Какую работу должны совершить насосы, что разогнать всю нагретую в республике горячую воду до этой скорости?
Вязким трением воды в трубах пренебрегайте.
1.4. Сколько нефти необходимо дополнительно сжечь, что обеспечить работу всех насосных станций? КПД насоса примите равным $\eta = 40\%$.
1.5. Чему равна стоимость (в долларах США) всей этой нефти (и на нагрев воды, и на работу насосных станций)? Среднюю стоимость нефти примите равной 150 долларов/баррель.
1.6. Оцените площадь поперечного сечения всех труб теплотрасс, по которым горячая вода поставляется потребителю?

Часть 2 Можно ли сэкономить?

В данной части задачи мы мысленно переместимся в исследовательскую лабораторию, чтобы от громадных чисел республиканских масштабов перейти к более скромным и осязаемым величинам.

Вы знаете, что теплоперенос может осуществляться различными способами, в том числе без переноса массы. Вам необходимо провести сравнительный анализ этих способов.

2.1 Рассмотрим традиционный способ передачи теплоты – посредством перекачки горячей воды. Пусть горячая вода ($t_1 = 90°C$) перекачивается из котла нагревателя по трубе диаметром $d = 5{,}0\,см$ и длиной $l = 10\,м$ со скоростью $v = 10\frac{м}{с}$ к холодильнику, где остывает до температуры $t_0 = 20°C$. Считайте, что потерями теплоты при движении жидкости по трубе можно пренебречь. Найдите поток теплоты, переносимой в этих условиях.

2.2 Теплоперенос может осуществляться посредством теплопередачи по неподвижному стержню. Для исследования этого способа передачи создана следующая установка. Медный стержень диаметром $d = 5{,}0\,см$ и длиной $l = 10\,м$ одним концом соединен с нагревателем, поддерживающим постоянную температуру $t_1 = 90°C$, а вторым с холодильником, поддерживающим постоянную температуре $t_0 = 20°C$. Боковая поверхность стержня теплоизолирована.

2.2.1. При каком распределении температуры вдоль стержня поток теплоты по нему будет постоянным? Запишите формулу, описывающую зависимость температуры стержня от расстояния до его горячего конца.

2.2.2 Какое количество теплоты потребуется, что нагреть стержень, до такого распределения температур, при котором поток теплоты по нему будет постоянным?

2.2.3 Найдите поток теплоты по стержню в установившемся режиме теплопередачи (т.е. когда этот поток постоянен).

2.3 В природе теплоперенос в больших масштабах осуществляется посредством испарения и конденсации воды. Попытайтесь оценить возможности такого способа теплопередачи.

Пусть в теплоизолированную трубу диаметром $d = 5{,}0\,см$ и длиной $l = 10\,м$ поступает водяной пар при температуре $t_1 = 90°C$, движется по ней со средней скоростью $v = 50\frac{м}{с}$ и конденсируется на другом конце трубы. Найдите поток теплоты, переносимой паром в этой установке. Считайте, что сконденсировавшаяся вода остывает до температуры $t_0 = 20°C$.

Справочные материалы.

Гкал – гигокалория;
- приставка Гига- означает 10^9.
- калория единица теплоты (или тепловой энергии), 1 кал = 4,21 Дж.

Удельная теплота сгорания нефти - $q = 4{,}0 \cdot 10^7 \frac{Дж}{кг}$

Плотность воды $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$.

Плотность водяного пара (при условиях, рассматриваемых в данной задаче) считать равной $\rho = 0{,}70 \frac{кг}{м^3}$.

Плотность меди - $\rho = 8{,}9 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$

Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot град}$.

Удельная теплоемкость меди $c = 0{,}39 \cdot 10^3 \frac{Дж}{кг \cdot град}$.

Удельная теплота испарения воды $L = 2{,}25 \cdot 10^6 \frac{Дж}{кг}$.

1 нефтяной баррель равен 158,988 литров.

Стандартная плотность нефти марки Urals (в основном поставляемой в Республику Беларусь) принимается равной $\rho = 0{,}864 \cdot 10^3 \frac{кг}{м^3}$

Поток теплоты – количество теплоты, переносимой в единицу времени $q = \frac{\Delta Q}{\Delta \tau}$, где ΔQ - количество перенесенной теплоты за промежуток времени $\Delta \tau$.

Если разность температур концов однородного теплоизолированного стержня длиной l равна Δt, тогда в единицу времени через площадку единичной площади поперечного сечения в единицу времени протекает количество теплоты, равное

$$q = \lambda \frac{\Delta t}{l}. \qquad (1)$$

где λ - коэффициент теплопроводности – величина, зависящая от материала, из которого изготовлен стержень.

Коэффициент теплопроводности меди $\lambda = 390 \frac{Вт}{м \cdot град}$.

10 класс

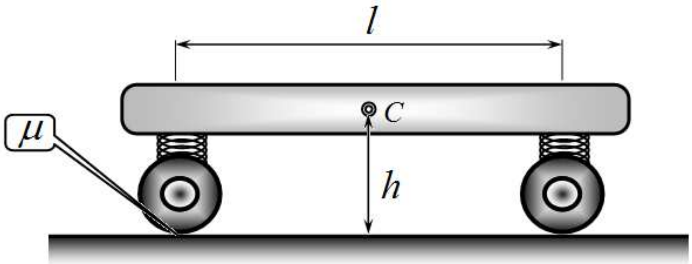
Задача 1. Лихач (не задирай носа)

Автомобили бывают разные – большие и маленькие, красные и черные, дорогие и поддержанные. Но у всех их есть нечто общее, например, двигатель, кузов, колеса, подвеска.

Рассматриваемый в данной задаче автомобиль понравится не многим автолюбителям, поэтому будем его считать некоторой моделью – «идеальным автомобилем». Подобно тому как в модели идеального газа пренебрегают многими важными свойствами, например, запахом, так и в нашей модели мы оставим только наиболее существенные для нашей задачи характеристики.

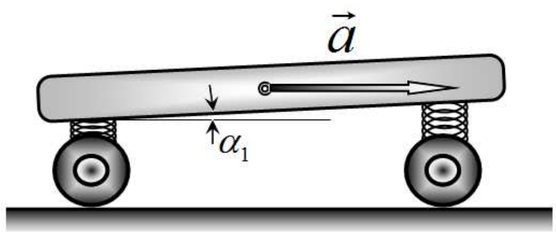
Итак, рассматриваем следующую модель автомобиля:

- автомобиль передвигается только по горизонтальной поверхности, трением качения можно пренебречь;
- корпус автомобиля – однородный параллелепипед;
- колеса соединены с корпусом посредством пружин подвески;
- жесткость всех пружин одинакова и такова, что у неподвижного автомобиля на горизонтальной дороге их деформация равна $x_0 = 10\,\text{см}$;



- центр масс корпуса находится на равных расстояниях от осей передних и задних колес;
- расстояние между осями равно $l = 3{,}5$ м;
- в состоянии покоя центр масс автомобиля находится на высоте $h = 0{,}40$ м
- масса колес, подвески и заднего моста пренебрежимо мала;
- ведущими является задняя пара колес автомобиля (передняя пара колес не взаимодействует с двигателем);
- коэффициент трения скольжения между колесами автомобиля и дорогой $\mu_с = 0{,}80$, максимальный коэффициент трения покоя между колесами автомобиля и дорогой $\mu_п = 0{,}90$ *(наверно, вы слышали, что коэффициент трения покоя превышает коэффициент трения скольжения).*

Часть 1. Поехали - старт и разгон.



Разгоняться хочется быстро! Тщательно рассмотрите движение автомобиля при его разгоне – силы, моменты сил, ускорение, все так, как вас учили! Сначала рассмотрите «аккуратный» разгон, когда водитель бережет

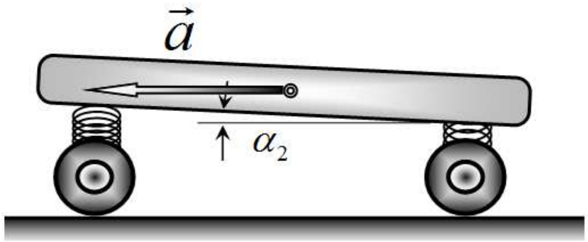
колеса и при старте колеса не проскальзывают.
1.1 Известно, что при разгоне автомобиля с задними ведущими колесами передок (передняя часть) автомобиля приподнимается. На какой угол α_1 «задерет нос» автомобиль при старте с максимально возможным ускорением?
1.2 Определите модуль максимального ускорения $a_{\max}$, с которым автомобиль может начать движение.
1.3 Чему равен модуль скорости υ_1 автомобиля через промежуток времени $\Delta t = 5{,}0\,\text{с}$ после начала движения с максимально возможным ускорением?

Часто можно наблюдать, как водители «рвут с места», включая двигатель на максимальную мощность, при которой колеса прокручиваются при еще неподвижном автомобиле. Насколько эффективен такой старт?

1.4. Чему равно максимальное ускорение при таком старте при заданных значениях коэффициентов трения?
Нужные Вам дополнительные характеристики автомобиля задайте самостоятельно.

Часть 2 Приехали – торможение и остановка.

Тормозить тоже желательно аккуратно, но иногда возникает необходимость в резком торможении. Считайте, что при таком торможении вращение колес прекращается практически мгновенно.

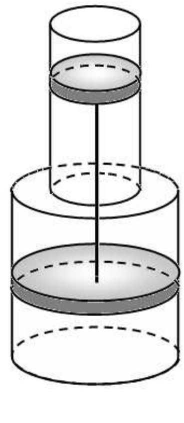


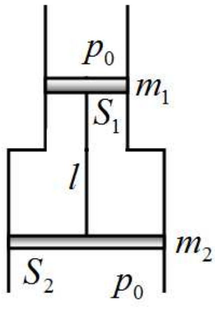
2.1 Определите тормозной путь s автомобиля, движущегося со скоростью $\upsilon = 90\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, при резком торможении.
2.2 Известно, что при резком торможении, когда вращение всех колес резко прекращается, автомобиль «клюет носом». На какой угол α_2 наклонится автомобиль при таком торможении?

Можно ли уменьшить тормозной путь, применяя другую стратегию торможения?
2.3 Каким может быть минимальный тормозной путь s' автомобиля, движущегося со скоростью $\upsilon = 90\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, при торможении опытным водителем, знающим основы физики?

Задача 2. Две трубы, два поршня, две части…

Два цилиндра поперечными сечениями $S_1 = 20\,\text{см}^2$ и $S_2 = 80\,\text{см}^2$ сварены так, что их оси совпадают. В цилиндры вставлены легкоподвижные поршни массами





$m_1 = 200$г и $m_2 = 800$г соответственно, связанные жестким невесомым стержнем длиной $l = 20\,см$.

Часть 1. Воздух.

Между поршнями герметически заперт воздух, количество которого остается постоянным. При нормальном атмосферном давлении $p_0 = 101$кПа поршни находятся в равновесии на одинаковом расстоянии от места стыка труб. Температура окружающего воздуха и воздуха внутри труб не изменяется.

1.1. Определите давление p воздуха между поршнями, при котором поршни находятся в равновесии.
1.2. Сжат или растянут стержень? Чему равна сила упругости, действующая в стержне?
1.3. Рассмотрим поршни, стержень и воздух между ними как единую систему. Укажите все внешние силы, действующие на нее. Покажите, что эта система находится в равновесии при найденном вами в п. 1.1 давлении воздуха между поршнями.

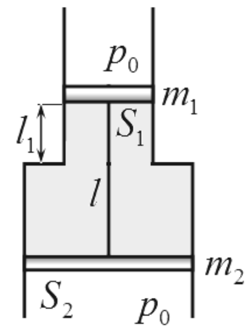
Рассматриваемое устройство может служить барометром – прибором для измерения атмосферного давления.

1.4 Определите изменение атмосферного давления Δp_0, если поршни опустились на $\Delta h = 1{,}0$см.

Будем считать, что устройство разрушается, если верхний поршень опускается ниже уровня стыка труб. Считаем, что атмосферное давление опять стало равным $p_0 = 101$кПа.

1.5 Найдите максимальную массу груза, который можно положить на верхний поршень, чтобы при этом система не разрушилась.
1.6 Найдите максимальную массу груза, который можно подвесить к нижнему поршню, чтобы при этом система не разрушилась.

Часть 2. Вода.
(численных расчетов в данной части проводить не надо!)



Пространство между поршнями полностью заполнили водой, плотность которой равна ρ. При этом верхний поршень оказался на некотором расстоянии l_1 от места стыка труб.

2.1. Определите модуль силы упругости T в стержне при отсутствии дополнительного груза. Сжат или растянут стержень в этом случае?
2.2. Как изменится сила упругости в стержне, если груз массой m,

первоначально находившийся на верхнем поршне, подвесить к нижнему поршню?

2.3. Рассмотрим поршни, стержень и воду между ними как единую систему. Укажите все внешние силы, действующие на нее. Покажите, что эта система находится в равновесии при найденных вами в п. 2.1 условиях.

2.4 Может ли система находиться в состоянии равновесия при отсутствии атмосферного давления?

2.5 Какой максимальный груз (имеется ввиду его масса M) можно положить на верхний поршень, чтобы система оставалась в равновесии при нормальном атмосферном давлении? Считайте, что сами поршни, трубы и стержень не разрушаются. Температуру воды считайте близкой к комнатной.

Задача 3. В чем причина появления поверхностной энергии?

В некоторых учебниках можно найти следующие рассуждения «молекулы на поверхности жидкости находятся в особых условиях, на них действует сила направленная внутрь жидкости. Благодаря этому приповерхностные слои оказываются сжатыми, а это приводит к увеличению суммарной энергии взаимодействия молекул. Эта избыточная положительная энергия и называется поверхностной энергией»

В данной задаче вам предлагается разобраться в истинных причинах возникновения поверхностной энергии.

Часть 1. Описание взаимодействия двух молекул.

Рассмотрим одномерную модель – цепочку шариков (молекул), взаимодействующих между собой по закону, близкому к закону взаимодействия молекул.

Будем считать, что энергия взаимодействия двух молекул, находящихся на расстоянии r описывается функцией

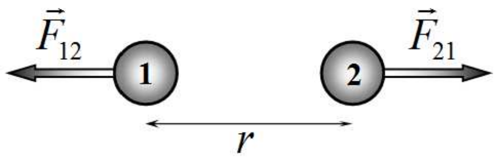
$$U(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^{6}}, \tag{1}$$

где a, b - известные постоянные величины. Потенциальная энергия принимается равной нулю при бесконечном расстоянии между молекулами.

1.1 Покажите, что функцию (1) можно представить в виде

$$U(r) = U_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right), \tag{2}$$

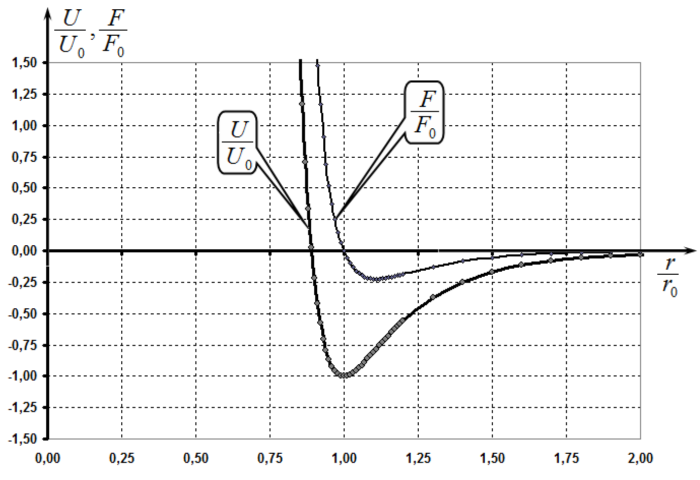
где r_0 - равновесное расстояние между молекулами, $-U_0$ - минимальная энергия взаимодействия молекул.



Можно показать (*вам этого делать не надо!*), что такой энергии взаимодействия соответствует сила, определяемая формулой

$$F(r) = F_0\left(\left(\frac{r_0}{r}\right)^{13} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{7}\right), \tag{3}$$

где $F_0 = 12\dfrac{U_0}{r_0}$. Положительным направлением считается направление «наружу», то есть положительная сила соответствует отталкиванию молекул. На рисунке показаны графики функций (2) и (3) *(Может, пригодятся!)*



Приведенные функции сложны и делают решение задачи слишком громоздким. Однако, в реальных средах относительные изменения расстояний между молекулами по сравнению с равновесными малы, поэтому с высокой точностью эти функции можно приближенно заменить линейными.

Для упрощения математических выкладок рекомендуем воспользоваться следующей приближенной формулой

$$(1+x)^{\gamma} \approx 1+\gamma x, \qquad (4)$$

справедливой при $|x| << 1$ *и любых (целых, дробных, положительных, отрицательных) степенях* γ.

1.2 Пусть расстояние между молекулами r мало отличается от равновесного r_0. Представим его в виде $r = r_0 + r_0\varepsilon$, где ε - относительное изменение расстояния между молекулами, которое можно считать малым $|\varepsilon| << 1$. В общем случае, для расчета энергии и силы взаимодействия не только между ближайшими соседями удобно записать расстояние между молекулами в виде $r = nr_0 + r_0\delta$, где $\delta << 1$. Тогда энергию и силу взаимодействия можно рассчитывать по приближенным формулам

$$\begin{aligned} U(\delta) &= U_0(u_n + s_n\delta) \\ F(\delta) &= F_0(f_n + c_n\delta) \end{aligned}. \qquad (6)$$

Найдите численные значения коэффициентов u_n, s_n, f_n, c_n для функций (2) -(3) для n от 1 до 5 с точностью до 3 значащих цифр. Результаты расчетов представьте в таблице *(она потом и вам поможет!)*

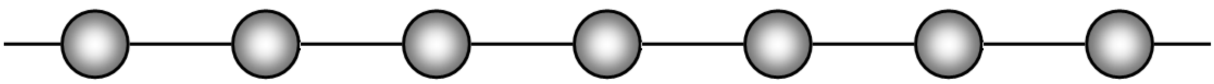
В дальнейшем рассчитывайте энергию в единицах U_0, а силу в единицах F_0, или что равносильно, считайте $U_0 = 1$, $F_0 = 1$.

Энергию, измеренную в этих единицах, будем обозначать w.

Также рекомендуем пользоваться приближенными формулами, за исключением расчета энергии взаимодействия ближайших соседей, т.е. при $r = r_0 + r_0\varepsilon$.

Проводите промежуточные численные расчеты с точностью до трех значащих цифр!

Часть 2. Бесконечная цепочка молекул.



2.1 При каких расстояниях между молекулами цепочка может находится в равновесии?

2.2 Как можно найти, какое расстояние между молекулами установится по прошествии достаточно большого промежутка времени?

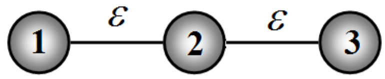
Искать не надо, но скажите, как это можно сделать!

Ответ на этот вопрос - $\varepsilon_0 = +1{,}40 \cdot 10^{-3}$

2.3 Оцените с точностью до 10^{-3} потенциальную энергию w_0, приходящуюся на одну молекулу.

Часть 3. Цепочка из трех молекул.

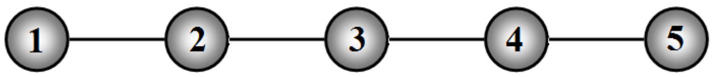
Вырвем из цепочки три молекулы.



3.1. Найдите относительное изменение расстояния между молекулами ε.
3.2 Найдите изменение энергии взаимодействия между ближайшими молекулами Δw_{12} (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).
3.3 Найдите изменение энергии взаимодействия между крайними Δw_{13} (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке).
3.4 Чему равно изменение полной потенциальной энергии трех «вырванных» молекул по сравнению с их полной энергией в бесконечной цепочке?

Часть 4. Цепочка из пяти молекул.

Вырвем из цепочки пять шариков.



4.1 Рассчитайте изменение энергии взаимодействия этих шариков между собой (по сравнению с этой энергией в бесконечной цепочке.
4.2 Чему равно изменение полной потенциальной энергии пяти «вырванных» молекул по сравнению с их полной энергией в бесконечной цепочке?

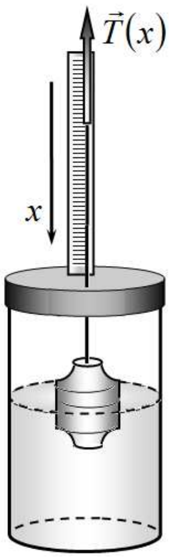
Вопрос последний.

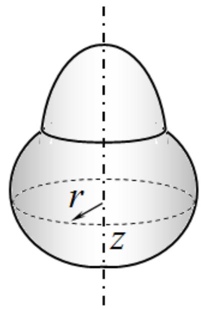
Так в чем основная причина появления поверхностной энергии?

11 класс

Задача 1. Новые Архимеды.

Молодой, но талантливый физик Федор (далее Федя), после просмотра программы «Что? Где? Когда?» решил сочинить собственный вопрос-задачу с черным ящиком – как, не заглядывая внутрь, определить что там находится. Идея пришла сразу - нужен «гидравлический черный ящик». Возьмем большую бочку, наполовину заполненную водой, и закроем ее крышкой с маленьким отверстием. Через отверстие пропустим прочную нить, к которой снизу прикрепим некоторой тело. Сверху с помощью чувствительного динамометра будем измерять силу натяжения нити, постепенно опуская и поднимая ее. Измеряя тем самым зависимость силы натяжения $T(x)$ от координаты верхнего конца нити. Для ее измерения прикрепим к крышке бочки вертикальную линейку. Причем можно провести два измерения – при опускании и при подъеме тела! Можно ли по измеренной зависимости $T(x)$ восстановить форму тела? Подумавши, Федя решил, что эта задача не имеет однозначного решения. Поэтому ввел дополнительное условие – тело должно быть осесимметричным! Уж в этом случае задача должна иметь решение при условии, что ось тела все время остается вертикальной.



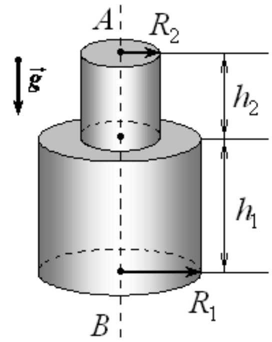


Тем более, что форма осесимметричного тела определяется одной функцией – зависимостью радиуса от высоты над низом тела $r(z)$.

Решено – сделано! Федор приступает к апробации своей идеи. Соединяет два сплошных металлических цилиндра, прикрепляет сверху прочную бечевку и … решает провести сначала теоретические расчеты. Измеряет размеры:

$R_1 = 10{,}0\,\text{см}$, $R_2 = 5{,}0\,\text{см}$, $h_1 = 15\,\text{см}$, $h_2 = 10\,\text{см}$,

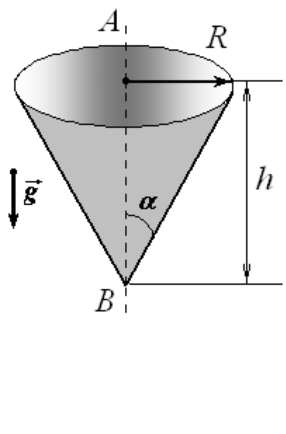
Измеряет массу $m = 20\,кг$. Далее рассчитывает (естественно полагая, что $g = 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, а плотность воды равна $\rho = 1{,}0 \cdot 10^3\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$) и строит график зависимости силы натяжения веревки от координаты верхней точки веревки.



Вопрос 1.

Постройте график зависимости силы натяжения веревки от координаты верхней точки веревки. Считайте, что сила натяжения стала изменяться после того, как веревка опустилась до $x_0 = 5{,}0\,см$.

Проведя эксперимент, Федя убедился, экспериментальные данные в пределах погрешности совпали с результатами расчетов. «Может провести эксперимент, поднимая груз со дна?» - подумал Федя и тут же отбросил эту идею – ничего нового не получится!



Далее Федор решил усложнить задачу – больно уж простой получилась зависимость. Во втором эксперименте Федя использовал сплошной конус высотой $h = 17$ см с углом полураствора $\alpha = 20°$, измеренная масса конуса равна $m = 7{,}5\,кг$.

Вопрос 2.

Постройте график зависимости силы натяжения нити $T(x)$ от координаты x для этого эксперимента.

И этот эксперимент подтвердил проведенные расчеты.
Вдохновленный успехом, Федор решил разработать общую теорию решения обратной задачи – как по измеренной зависимости $T(x)$ восстановить форму тела $r(z)$? Оказалось, что задача имеет решение в общем виде!

Вопрос 3.

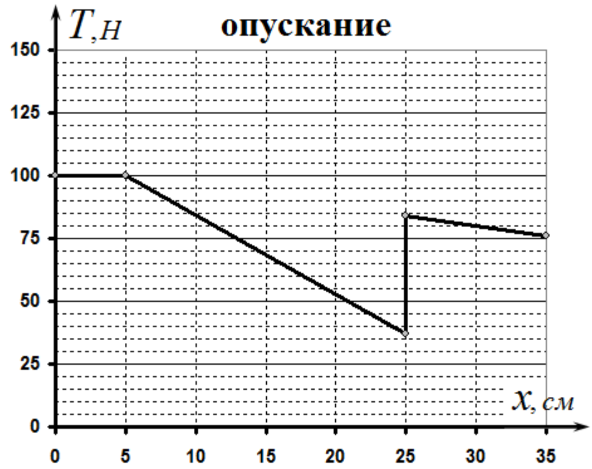
Допустим, что вам известен точный вид зависимости силы натяжения веревки $T(x)$. Выразите в общем виде функцию, описывающую форму тела $r(z)$.

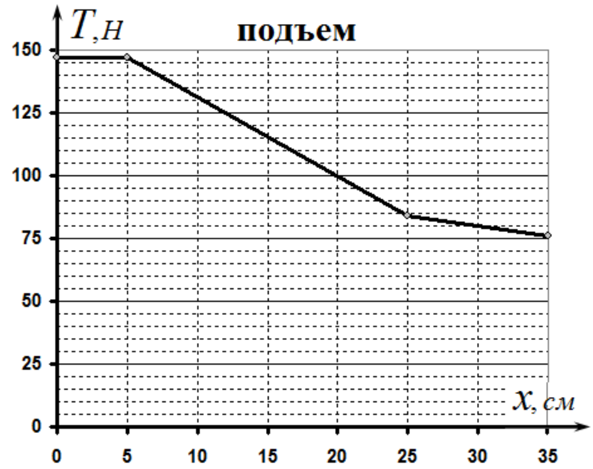
Придя в восторг от полученных достижений, Федя решил продемонстрировать свое открытие другу Васе. Он подробно объяснил суть дела и предложил Васе самостоятельно, в тайне, изготовить любое осесимметричное тело (только такое, чтобы оно тонуло в воде), привязать его к веревке, опустить в бочку, просунув конец веревки через отверстие в крышке. Хитрый Вася согласился и всего через пять минут закончил все подготовительные работы, и предложил Феде провести свой эксперимент.

После тщательных измерений Федя построил график зависимости силы натяжения веревки от ее координаты. «Тоже мне друг называется!» - подумал Федя взглянув на график. И решил провести измерения при подъеме того же тела. Через несколько минут и второй график был готов!

Полученные графики показаны на рисунке.

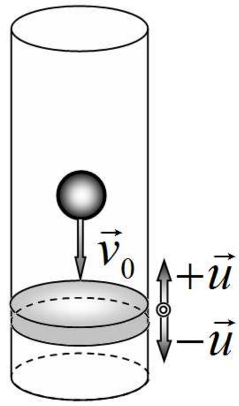
«Эврика!» - воскликнул Федя и рассказал Васе, какое тело он изготовил и поместил в прибор.





Вопрос 4.
Определите Форму тела, которое сделал Вася, найдите его размеры.

Задача 2. Резонанс



Внизу очень высокого цилиндра колеблется тяжелая платформа. Платформа движется вверх и вниз с постоянной по модулю скоростью $\pm u$ и с некоторым периодом T. Время торможения и разгона платформы пренебрежимо малы, т. е. можно считать, что, достигая нижнего или верхнего положения, платформа мгновенно изменяет скорость на противоположную.

На платформу с некоторой высоты h падает маленький шарик. Непосредственно перед столкновением с платформой шарик движется вниз с некоторой скоростью v, а сам поршень находится в крайнем нижнем положении и движется вверх (см. рис.).

Возможна ситуация, при которой шарик в процессе движения всегда ударяется о платформу, находящуюся в одном и том же (описанном выше) положении, и при этом всегда приобретает дополнительную скорость.

1. Покажите, что при заданной скорости u такая ситуация возможна, только если период колебаний платформы и скорость, с которой шарик подлетает к платформе, удовлетворяют следующим условиям:

$$T = A/m \text{ и } v = B\frac{n}{m}\text{, где } n,m \in N.$$

Пусть $u = 0.5 м/с$, а $g = 10 м/с^2$.

2. Найдите численные значения A и B.

В задаче рассматривается только случай, когда скорость шарика гораздо больше скорости платформы $v \gg u$ ($v \geq 10u$) и высота, на которую поднимается шарик, намного больше амплитуды колебаний платформы. Последнее условие сформулируем следующим образом: $uT \ll h$ ($uT \leq h/10$).

3. Как должны быть связаны числа n и m, чтобы эти условия выполнялись?

4. Определите значение наименьшей «резонансной» скорости v_0, которой может обладать подлетающий к платформе шарик, а также интервал Δv между двумя резонансными скоростями для $m=1$, $m=2$ и $m=10$.

Рассмотрим более подробно поведение шарика, подлетающего к платформе с резонансной скоростью v_0 при $m=1$.

5. Определите моменты времени i-го касания шарика и платформы, а также максимальную высоту подъема шарика после i-го касания.

6. Изобразите схематически зависимость координаты шарика от времени (обозначьте характерные точки: моменты удара, максимальные высоты).

Пусть скорость v шарика отличается от резонансной на величину δv ($v = v_0 + \delta v$) Рассмотрите только случай, когда $v_0 < v < v_0 + \dfrac{\Delta v}{2}$.

7. Через какое количество ударов процесс увеличения высоты подъема сменится уменьшением? Выразите это время через отношение $\delta v / \Delta v$.

8. Какое время будет продолжаться разгон и на какую максимальную высоту $h\left(\dfrac{\delta v}{\Delta v}\right)$ сможет подняться этот шарик?

9. Нарисуйте качественный график зависимости $h\left(\dfrac{\delta v}{\Delta v}\right)$.

10. Полученное в п. 8 значение высоты является несколько заниженным, т.к. сама платформа находится в различных положениях при каждом следующем ударе. Оцените ошибку $\Delta h\left(\dfrac{\delta v}{\Delta v}\right)$ определения максимальной высоты подъема.

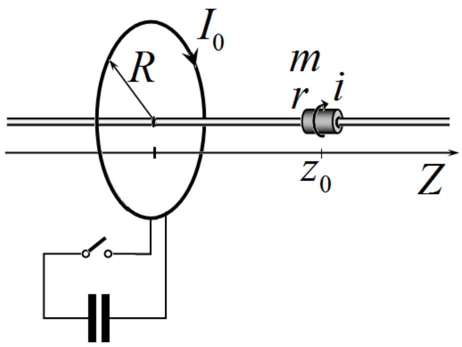
Задача 1. «Railgun»

Программа СОИ США сосредоточила публичное внимание на электромагнитных пушках…
М. Леффлер

Электромагнитные пушки давно заполонили компьютерные игры, боевики … и даже являются объектами серьезных научных и инженерных исследований. Нам не кажется, что за отведенное Вам время, Вы сможете предложить принципиально новые принципы создания такого оружия. Но, Вы обязаны продемонстрировать свои знания и способности в объяснении и описании основных принципов устройства такого оружия.

Основная идея разгона снарядов заключается во взаимодействии снаряда с магнитным полем, создаваемым системой катушек, по которым пропускаются сильные импульсы электрического тока.

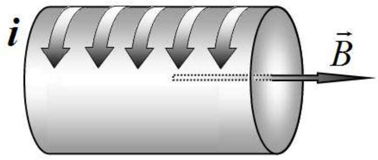
Вам предстоит рассмотреть простейший вариант – система катушек заменяется на одну, которая, в свою очередь, рассматривается как круговой виток радиуса R с током, силу которого будем обозначать I_0. Для производства выстрела кольцо подключают к батарее конденсаторов суммарной емкостью C, заряженной до напряжения U_0. Электрическое сопротивление кольца обозначим Y (чтобы не путать с его радиусом), индуктивностью кольца можно пренебречь.



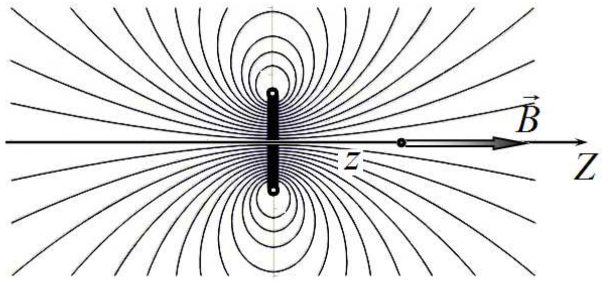
Излучением электромагнитных волн во всех случаях следует пренебрегать.

Вдоль оси витка расположен тонкий, длинный, гладкий, непроводящий и немагнитный стержень. Со стержнем совместим ось координат Oz, начало которой находится в центре кольца.

Вдоль стержня может скользить без трения цилиндрический снаряд массы m. Размеры снаряда – его радиус r и длина l, значительно меньше радиуса витка R. Во всех случаях, электромагнитные свойства снаряда моделируются проводящим круговым витком, в котором протекает, или может протекать электрический ток, силу которого будем обозначать i. Магнитные свойства снаряда будут варьироваться по ходу задачи.



Магнитное поле, создаваемым круговым током I_0 описывается достаточно сложно. Однако, на оси кольца вектор индукции магнитного поля направлен вдоль этой оси, а его модуль на расстоянии z от центра кольца определяется по формуле



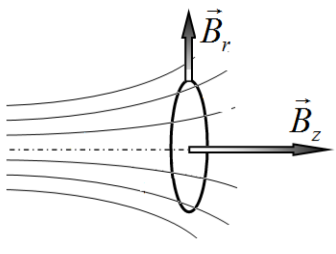
$$B_z = \frac{\mu_0 I_0}{2} \cdot \frac{R^2}{\left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Часть 0. (Тоже оценивается!)

0.1 Покажите, что в осесимметичном магнитном поле при изменении осевой компоненты индукции поля $B_z(z)$ неизбежно существование радиальной компоненты поля, которая на малом расстоянии r от оси может быть рассчитана по формуле

$$B_r = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}, \quad (2)$$

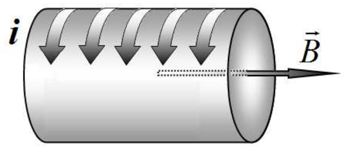
где $\frac{dB_z}{dz}$ - производная от осевой компоненты по координате.



0.2 Найдите зависимость радиальной компоненты поля кругового тока в зависимости от координаты z и расстояния до оси $B_r(z, r)$.

Часть 1. Снаряд – постоянный магнит.

Снаряд пушки представляет собой постоянный магнит (в состоянии полной намагниченности). Это значит, что его магнитные свойства моделируются постоянным круговым током силой i, протекающим по его боковой поверхности. Сила этого тока не зависит от индукции внешнего магнитного поля.



1.1 Пусть снаряд покоится и находится на расстоянии z_0 от центра кольца, по которому протекает постоянный ток силой I_0. Найдите силу, действующую на снаряд со стороны магнитного поля. Постройте график зависимости этой силы от расстояния до центра кольца.

1.2 Какую максимальную скорость может приобрести снаряд при выстреле в описанных выше условиях при разрядке конденсатора?

Считайте, что смещением снаряда за время прохождения тока по кольцу можно пренебречь.

1.3 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?

Часть 2. Снаряд – магнетик.

Рассмотрим теперь поведение снаряда из магнитномягкого железа. В этом случае в магнитном поле снаряд намагничивается, причем можно считать, что его намагниченность пропорциональна индукции внешнего поля (то есть можно пренебречь эффектами насыщения и остаточной намагниченности). Иными словами, магнитные свойства снаряда моделируются круговым током, текущим по боковой поверхности, сила которого пропорциональная индукции внешнего поля B_0, направленного по оси снаряда

$$i = \chi B_0 . \qquad (3)$$

Считайте, что χ - известная константа.

2.1 Пусть снаряд покоится и находится на расстоянии z_0 от центра кольца, по которому протекает постоянный ток силой I_0. Найдите силу, действующую на снаряд со стороны магнитного поля.

2.2 Рассчитайте, какую максимальную скорость может приобрести снаряд в этом случае.

2.3 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?

Часть 3. Снаряд – катушка индуктивности.

Рассмотрим теперь снаряд, изготовленный из немагнитного материала, на внешнюю поверхность которого намотана закороченная на себя катушка, индуктивность которой равна L. Электрическим сопротивлением катушки можно пренебречь.

3.1 Рассчитайте, какую максимальную скорость может приобрести снаряд в этом случае.

3.2 В какую сторону полетит снаряд и как изменится его направление полета, если не изменяя первоначального положения снаряда, изменить полярность подключения батареи?