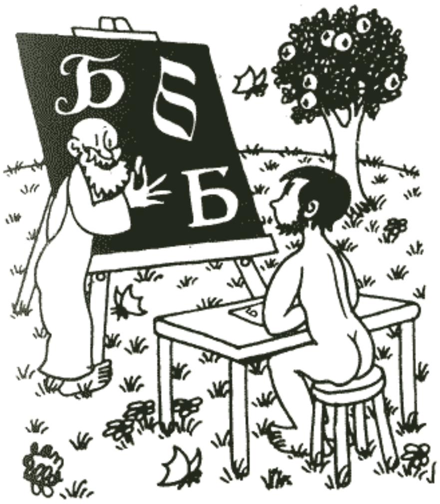
А.И. Слободянюк
А.А. Мищук
Л.Г. Маркович

Республиканская физическая олимпиада (III этап) 2010 год.



Теоретический тур
Решения

Решения задач.

9 класс.

Задача 1. Разминка «50 на 50»

1.1 Расстояние, пройденное материальной точкой равно

$$S = v_1\frac{t}{2} + v_2\frac{t}{2} \qquad (1).$$

Искомая скорость

$$v_0 = \frac{S}{t} = \frac{v_1 + v_2}{2} \qquad (2).$$

1.2 На первую половину пути требуется время

$$t_1 = \frac{S/2}{v_1} \qquad (3),$$

на вторую

$$t_2 = \frac{S/2}{v_2} \qquad (4).$$

Искомая скорость равна:

$$v_0 = \frac{S}{t_1 + t_2} = \frac{1}{\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{2v_2}} \qquad (5).$$

2.1 Теплоемкость каждой жидкости:

$$C_1 = c_1\frac{m}{2} \text{ и } C_2 = c_2\frac{m}{2} \qquad (6).$$

Удельная теплоемкость смеси:

$$c_0 = \frac{C_1 + C_2}{m} = \frac{c_1 + c_2}{2} \qquad (7).$$

2.2 Количество тепла, получаемое каждой жидкостью:

$$\frac{Q}{2} = c_1 m_1 \Delta t \text{ и } \frac{Q}{2} = c_2 m_2 \Delta t \qquad (8).$$

Для всей смеси:

$$Q = c_0\left(m_1 + m_2\right)\Delta t \qquad (9).$$

Выражая из (12) m_1 и m_2, получим:

$$c_0 = \frac{Q}{\left(\frac{Q}{2c_1} + \frac{Q}{2c_2}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2c_1} + \frac{1}{2c_2}} \qquad (10).$$

3.1 Количество тепла, выделившееся на резисторах:

$$Q_1 = I^2 R_1 \frac{\Delta t}{2} \text{ и } Q_2 = I^2 R_2 \frac{\Delta t}{2} \qquad (11).$$

На резисторе R_0 за время Δt выделится количество тепла:

$$Q = I^2 R_0 \Delta t \qquad (12).$$

Откуда:

$$R_0 = \frac{R_1 + R_2}{2} \qquad (13)$$

3.2 Рассуждая аналогично получим:

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\frac{\Delta t}{2} \text{ и } Q_2 = \frac{U^2}{R_2}\frac{\Delta t}{2} \qquad (14),$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \frac{U^2}{R_0}\Delta t \qquad (15),$$

$$R_0 = \frac{1}{\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2R_2}} \qquad (16).$$

3.3 Количество тепла, выделившееся на резисторе:

$$Q_1 = I_1^2 R\frac{\Delta t}{2} \text{ и } Q_2 = I_2^2 R\frac{\Delta t}{2} \qquad (17)$$

При прохождении тока I_0 в течение времени Δt выделится количество тепла, равное:

$$Q = Q_1 + Q_2 = I_0^2 R\Delta t \qquad (18)$$

Откуда:

$$I_0 = \sqrt{\frac{I_1^2 + I_2^2}{2}} \qquad (19)$$

3.4 Количество тепла, выделившееся на резисторе:

$$\frac{Q}{2} = \frac{U_1^2}{R}\Delta t_1 \text{ и } \frac{Q}{2} = \frac{U_2^2}{R}\Delta t_2 \qquad (20).$$

При подключении к источнику напряжения U_0 выделится количество тепла, равное:

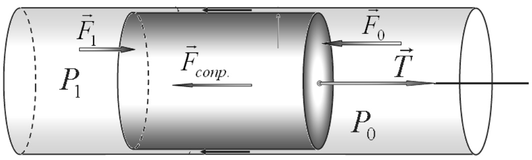
$$Q = \frac{U_0^2}{R}\left(\Delta t_1 + \Delta t_2\right) \qquad (21)$$

Искомое напряжение равно:

$$U_0 = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2U_1^2} + \frac{1}{2U_2^2}}} \qquad (22).$$

Задача 2. «Просачивание»

1. **Неподвижный цилиндр.**



Сумма сил, действующих на цилиндр равна нулю, так как он покоится, поэтому

$$\Delta P \cdot \pi R^2 + F_{сопр.} = T\ , \qquad (1)$$

здесь $\Delta P \cdot \pi R^2 = F_0 - F_1$ - разность сил давления жидкости на торцы цилиндра;

$$F_{сопр.} = \gamma \frac{v}{h} \cdot 2\pi R l \qquad (2)$$

- сила вязкого трения, действующая со стороны движущейся жидкости на боковую поверхность цилиндра.

Жидкость в зазоре движется с постоянной скоростью, поэтому сумма сил, действующих на нее также равна нулю, поэтому можно записать

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = 2F_{сопр.} \qquad (3)$$

Здесь и далее, мы учитываем малость толщины зазора, поэтому его площадь поперечного сечения может быть записана в виде (если пренебречь малой величиной h^2)

$$s = \pi (R+h)^2 - \pi R^2 \approx 2\pi R h\ . \qquad (4)$$

При записи уравнения (3) также следует учесть, что на жидкость действуют силы вязкого трения, как со стороны боковой поверхности цилиндра, так и со стороны внутренней поверхности трубки, причем различием в их площадях можно пренебречь.

Из уравнений (1), (3) находим

$$F_{сопр.} = \pi R h \cdot \Delta P$$
$$T = \pi R^2 \Delta P \left(1 + \frac{h}{R}\right). \qquad (5)$$

Как следует из последней формулы, сила натяжения нити превышает разность сил давления на величину силы вязкого трения, действующей на боковую поверхность цилиндра.

Приравнивая силу трения к ее выражению через среднюю скорость течения воды в зазоре

$$\pi R h \cdot \Delta P = \gamma \frac{v}{h} \cdot 2\pi R l\ , \qquad (6)$$

находим

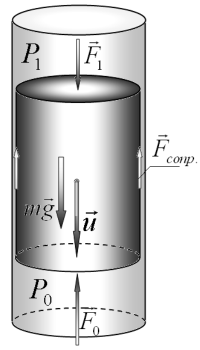
$$v = \frac{h^2}{2\gamma l} \Delta P\ . \qquad (7)$$

Расход жидкости равен средней скорости, умноженной на площадь поперечного сечения потока

$$q = 2\pi R h \cdot v = \frac{\pi R h^3}{\gamma l} \Delta P\ . \qquad (8)$$

Обратите внимание на сильную зависимость расхода жидкости от толщины зазора, например, при уменьшении толщины зазора в 2 раза расход уменьшается в 8 раз!

2. **«Тонем и всплываем!»**



Данная часть задачи отличается от предыдущей, тем, что необходимо учитывать действие силы тяжести, как на цилиндр, так и на движущуюся жидкость. Так как на жидкость в зазоре и на цилиндр действуют тормозящие силы, зависящие от скоростей движения. По-прежнему, векторная сумма сил, действующих на цилиндр, равна нулю, поэтому

$$mg - \pi R^2 \Delta P - F_{сопр.} = 0\,. \tag{9}$$

Запишем также выражение для массы цилиндра

$$m = \pi R^2 l \rho_1\,. \tag{10}$$

Второе уравнение выражает условие постоянства скорости жидкости в зазоре (то есть сумма сил, действующих на нее равна нулю):

$$2\pi Rh\Delta P - 2\pi Rhl\rho_0 g - 2F_{сопр.} = 0\,, \tag{11}$$

где второе слагаемое есть сила тяжести, действующая на жидкость.
Из уравнения (9) выразим силу сопротивления (с учетом выражения для массы цилиндра (10)) и подставим ее в уравнение (11)

$$2\pi Rh\Delta P - 2\pi Rhl\rho_0 g - 2\left(\pi R^2 l\rho_1 g - \pi R^2 \Delta P\right) = 0\,.$$

Из этого уравнения выражаем значения разности давлений

$$\Delta P = \frac{\rho_1 gl + \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} \tag{12}$$

Полученное выражение принципиально отличается от формулы для гидростатического давления столба жидкости в зазоре $(\Delta P)_{статическое} = \rho_0 gl$. Разность сил давлений (см. (9)) равна силе тяжести цилиндра уменьшенной на силу вязкого трения. Иными словами, формулы гидростатики не применимы при движении жидкости. Основные условия гидростатики – условия равновесия, а в данном случае главное – условия установившегося движения жидкости (и цилиндра). При движении тела в жидкости происходит такое перераспределение давлений, которое и обеспечивает условия стационарности потоков.

Эту идею можно развить и далее - формула для гидростатической силы Архимеда также «не работает» в данном случае. Сумма сил давлений жидкости на цилиндр равна весу цилиндра (минус сила сопротивления), а не весу жидкости вытесненной цилиндром!
Формально, разность между полученным выражением (12) и гидростатическим давлением выражается формулой

$$\frac{\rho_1 gl + \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} - \rho_0 gl = \frac{\rho_1 gl + \rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} \approx (\rho_1 - \rho_0)gl\,. \tag{13}$$

Найдем из уравнения (9) силу сопротивления, действующую на поверхность диска

$$F_{сопр.} = \pi R^2 l\rho_1 g - \pi R^2 \Delta P = \pi R^2 \frac{\frac{h}{R}\rho_1 gl - \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} \approx \pi R^2 \frac{h}{R}(\rho_1 - \rho_0)gl\,. \tag{14}$$

С другой стороны эта же сила выражается через среднюю скорость жидкости

$$F_{сопр.} = 2\pi Rl\gamma \frac{v}{h}\,. \tag{15}$$

Скорость течения жидкости в зазоре связана со скоростью движения цилиндра условием постоянства объема жидкости (объем жидкости вытесненной цилиндром равен объему жидкости, протекающей в зазоре):

$$2\pi Rhv = \pi R^2 u\,. \tag{16}$$

Из этого уравнения легко найти среднюю скорость движения жидкости в зазоре

$$v = \frac{R}{2h}u\,. \tag{17}$$

Отметим, что скорость течения жидкости значительно превышает скорость движения цилиндра (из $R >> h \quad \Rightarrow \quad v >> u$), что оправдывает сделанное в условие о практической независимости силы сопротивления от скорости движения цилиндра)

Теперь решим систему уравнений (14)-(16). Находим

$$\begin{gathered} 2\pi Rhv = \pi R^2 u \quad \Rightarrow 2\pi Rv = \frac{\pi R^2}{h}u; \\ F_{сопр.} = 2\pi Rl\gamma\frac{v}{h} = \frac{\pi R^2 l}{h^2}\gamma u \end{gathered}.$$

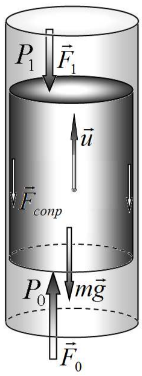
Наконец из равенства

$$\frac{\pi R^2 l}{h^2}u = \pi R^2\frac{h}{R}(\rho_1 - \rho_0)gl$$

определяем

$$u = \frac{h^3}{\gamma R}(\rho_1 - \rho_0)g\,. \tag{17}$$

Решение задачи при всплывании цилиндра аналогично.



Суммарная сила, действующая на цилиндр, равна нулю:

$$\begin{gathered} mg - \pi R^2\Delta P + F_{сопр.} = 0 \\ \pi R^2 l\rho_1 g - \pi R^2\Delta P + F_{сопр.} = 0 \end{gathered}. \tag{18}$$

Суммарная сила, действующая на жидкость в зазоре, равна нулю

$$2\pi Rh\Delta P - 2\pi Rhl\rho_0 g + 2F_{сопр.} = 0\ , \tag{19}$$

Исключая из этих уравнений силу сопротивления, находим разность давлений

$$\Delta P = \frac{\rho_1 gl + \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}}\,. \tag{20}$$

Скорость опускания цилиндра находим, выражая силу сопротивления через среднюю скорость жидкости в зазоре и уравнение неразрывности. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$u = \frac{h^3}{\gamma R}(\rho_0 - \rho_1)g\,. \tag{21}$$

Задача 3. «Морской бой»

1. Выход на боевую позицию.

1.1 Скорость корабля А относительно корабля Б:

$$\vec{v}_{АотнБ} = \vec{v}_А - \vec{v}_Б \qquad (1).$$

Построение показано на рис. 1

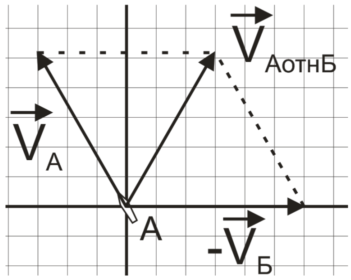


Рис. 1

Модуль относительной скорости равен

$$\left|\vec{v}_{АотнБ}\right| = 10\, м/с \qquad (2)$$

и направлена она под углом

$$\alpha = 60^\circ \qquad (3)$$

к оси ОХ.

1.2 Корабль А будет двигаться относительно корабля Б вдоль прямой проходящей через вектор относительной скорости. Минимальное расстояние – длина перпендикулярного отрезка, соединяющего эту прямую и точку в которой находится корабль Б (отрезок БВ на рис. 2).

Длина этого отрезка равна 62 мм, что соответствует расстоянию

$$S_{МИН} = 6{,}2 км \qquad (4).$$

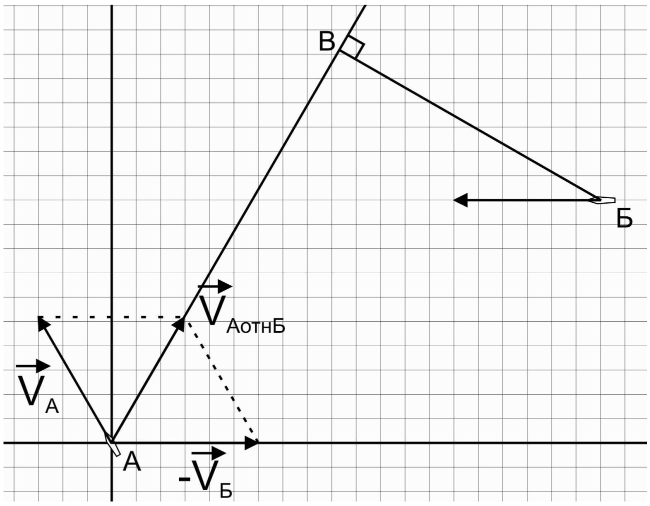


Рис. 2

1.3. Для определения искомого времени движения необходимо определить расстояние, соответствующее длине отрезка АВ и разделить его на величину относительной скорости.

Расстояние АВ равно 9,3 км

Искомое время составляет

$$t_{МИН} = 930 с \qquad (5)$$

1.4 Для определения координат кораблей в момент встречи необходимо вернуться в систему отсчета, связанную с водой. В этой системе корабль А переместиться в точку с координатами

$$x_А = -4{,}7 км \quad y_А = 8{,}1 км \qquad (6)$$

а корабль Б в точку

$$x_Б = 0{,}7 км \quad y_Б = 5{,}0 км \qquad (7)$$

2. Атака.

2.1 Решения этого пункта проще всего провести в системе отсчета, связанной с кораблем Б. В этой системе корабль А движется со скоростью $\vec{v}_{АотнБ}$, а торпеда – со скоростью $\vec{v}_{ТотнБ}$. Вектор, равный разности скорости торпеды и корабля А:

$$\vec{v}_{Т2} = \vec{v}_{ТонтБ} - \vec{v}_{АотнБ} \qquad (8)$$

должен быть направлен в точку В, в которой находится корабль А (рис.3).

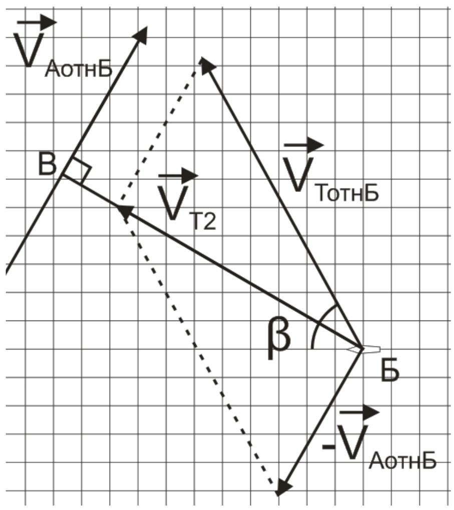


Рис. 3

Угол с направлением скорости корабля Б в этом случае равен

$$\beta = 60^\circ \qquad (9)$$

2.2 Для определения скорости торпеды относительно воды необходимо к скорости торпеды $\vec{v}_{ТотнБ}$ прибавить скорость корабля Б (рис. 4):

$$\vec{v}_{ТотнВ} = \vec{v}_{ТотнБ} + \vec{v}_{Б} \qquad (10).$$

Тогда:

$$\left|\vec{v}_{ТотнВ}\right| = 26 м/с \qquad (11),$$

$$\gamma = 40^{\circ} \qquad (12)$$

2.3 Модуль скорости торпеды $\vec{v}_{T2}$ равен:

$$\left|\vec{v}_{T2}\right| = 17 м/с \qquad (13)$$

Для достижения цели торпеде понадобится время

$$t_{T} = \frac{S_{МИН}}{\left|\vec{v}_{T2}\right|} = 360 с \qquad (14)$$

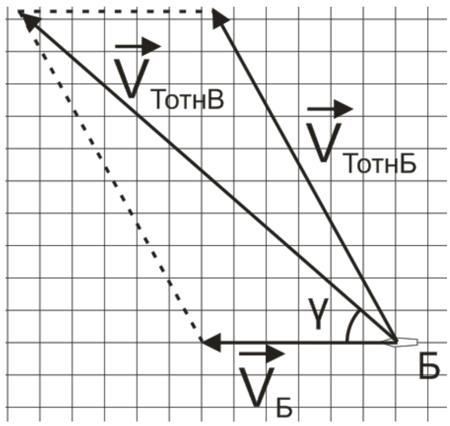


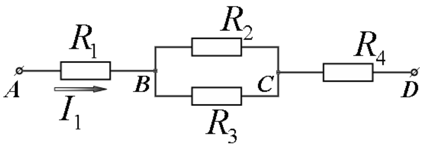
Рис. 4

2.4 В момент попадания торпеды корабль А будет находится в точке с координатами:

$$x_{A1} = -6{,}5 км \quad y_{A1} = 11{,}2 км \qquad (15)$$

10 класс.

Задача 1. «Узорные цепи».



1.1 Так как резисторы $R_2 = 2{,}0\,Ом$ и $R_3 = 4{,}0\,Ом$ соединены параллельно, то напряжения на них одинаковы. Поэтому отношение сил токов через резисторы обратно отношению их сопротивлений. Кроме того, их сумма равна силе тока $I_1 = 1{,}0\,A$. Следовательно, силы токов через эти резисторы равны

$$I_2 = I_0 \frac{R_3}{R_3 + R_2} \approx 0{,}67\,A; \quad I_3 = I_0 \frac{R_2}{R_3 + R_2} \approx 0{,}33\,A. \qquad (1)$$

Сила тока через резистор $R_4 = 1{,}0\,Ом$ равна силе тока через первый резистор

$$I_4 = I_1 = 1{,}0\,A. \qquad (2)$$

Напряжения на всех резисторах рассчитываются по закону Ома

$$\begin{aligned} U_1 &= I_1 R_1 = 1{,}0\,B \\ U_2 &= U_3 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = 1{,}3\,B. \\ U_4 &= I_4 R_4 = 1{,}0\,B \end{aligned} \qquad (3)$$

Напряжение на участке AD равно сумме

$$U_{AD} = U_1 + U_2 + U_4 = 3{,}3\,B. \qquad (4)$$

Общее сопротивление цепи можно найти как отношения общего напряжения к общей силе тока

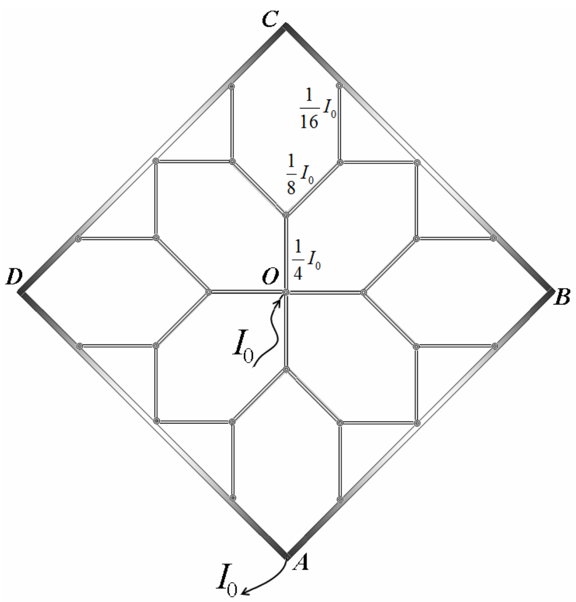
$$R_O = \frac{U_{AD}}{I_1} = 3{,}3\,Ом. \qquad (5)$$

Возможна и иная последовательность расчетов.

1.2 Симметрия задачи позволяет сразу указать значения токов через все звенья сетки (см. рис). Поэтому искомое напряжение будет равно

$$U = \frac{1}{4} I_0 R + \frac{1}{8} I_0 R + \frac{1}{16} I_0 R = \frac{7}{16} I_0 R. \qquad (6)$$

Мы воспользовались свойством потенциальности электростатического поля – разность потенциалов между точками не зависит от пути перехода от одной из них к другой.

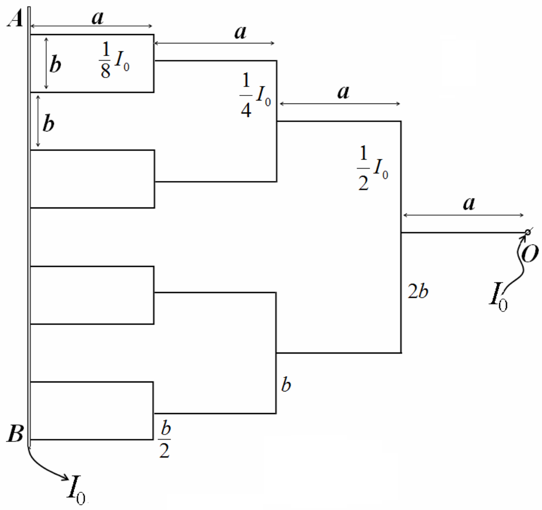


Возможны и другие варианты решения (например, соединить точки равного потенциала).

1.3 В данной задаче распределение токов также очевидно (в каждом узле ток делится пополам). Не сложно найти и геометрические размеры всех участков (см. рис.). Искомое напряжение можно найти как сумму напряжений, двигаясь от точки O до стержня AB любым путем (мы пойдем «по краю»):

$$U = I_0 r\left(a+\frac{1}{2}(a+2b)+\frac{1}{4}(a+b)+\frac{1}{8}\left(a+\frac{1}{2}b\right)\right)=$$

$$= I_0 r\left(\frac{15}{8}a+\frac{21}{16}b\right)$$



Возможны и другие варианты решения (например, соединить точки равного потенциала).

Задача 2 «Гвоздь»

Часть 1.

1.1 Запишем закон сохранения энергии и импульса:

$$\begin{cases} Mv_0 = Mv + mu \\ \dfrac{Mv_0^2}{2} = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{mu^2}{2} \end{cases} \quad (1).$$

Решая систему, получим:

$$u = \frac{2v_0}{\dfrac{m}{M}+1} = \frac{2v_0}{\gamma+1} \quad (2).$$

1.2 При $m << M$, $\gamma \to 0$, поэтому:

$$u = 2v_0 \quad (3).$$

1.3 Коэффициент передачи энергии:

$$\eta = \frac{\dfrac{mu^2}{2}}{\dfrac{Mv_0^2}{2}} = \gamma\frac{u^2}{v_0^2} \quad (4).$$

Подставляя значение скорости (2), получим:

$$\eta = 4\frac{\gamma}{(\gamma+1)^2} \quad (5).$$

Часть 2.

2.1 Вся полученная гвоздем кинетическая энергия расходуется на совершение работы против сил трения (изменением потенциальной энергии можно пренебречь). Работа силы трения, действующей на острие гвоздя, равна:

$$A_{ОСТР} = f\Delta x \quad (6).$$

Работа силы трения, действующей на боковую поверхность, равна:

$$A_{БОК} = k\frac{(x+\Delta x)^2}{2} - k\frac{x^2}{2} \quad (7).$$

Следовательно:

$$E = f\Delta x + k\frac{(x+\Delta x)^2}{2} - k\frac{x^2}{2} \quad (8).$$

Решая это уравнение относительно Δx, получим:

$$\Delta x = -\left(x+\frac{f}{k}\right) + \sqrt{\left(x+\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E}{k}} \quad (9).$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет.

2.2 Для определения энергии E_1 подставим в выражение (9) $x = 0$ и $\Delta x = l$.

$$l = -\frac{f}{k} + \sqrt{\left(\frac{f}{k}\right)^2 + \frac{2E_1}{k}} \quad (10).$$

Решением уравнения является:

$$E_1 = \frac{kl^2}{2} + fl \quad (11).$$

2.3 Ели $F_{БОК} << F_{ОСТР}$, то глубина погружения после удара будет определяться силами, действующими на острие:

$$\Delta x = \frac{E}{f} \quad (12).$$

Число ударов, очевидно, равно:

$$N_1 = \frac{lf}{E} \quad (13).$$

2.4 Если, $F_{БОК} >> F_{ОСТР}$, то отношением $\frac{f}{k}$ в выражении (9) можно пренебречь, и тогда:

$$\Delta x = -x + \sqrt{x^2 + \frac{2E}{k}} \quad (14).$$

Величина погружения после $(n+1)$-го удара равна:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x = x_n + \left(-x_n + \sqrt{x_n^2 + \frac{2E}{k}}\right) = \sqrt{x_n^2 + \frac{2E}{k}} \quad (15).$$

Или

$$x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{2E}{k} \quad (16).$$

Таким образом:

$$\varepsilon = \frac{2E}{k} \quad (17).$$

Квадраты глубин погружения гвоздя образуют арифметическую прогрессию:

$x_0^2 = 0$, $x_1^2 = \frac{2E}{k}$, $x_2^2 = \frac{4E}{k}$, $x_3^2 = \frac{6E}{k}$, …, $x_n^2 = n\frac{2E}{k}$.

Для вбивания гвоздя нужно совершить число N ударов, которое находится из условия:

$$l^2 = N_2\frac{2E}{k} \quad (18),$$

откуда

$$N_2 = \frac{kl^2}{2E} \quad (19).$$

Задача 3 «Вода и пар»

1.1 Зависимость давления насыщенного пара от температуры является также зависимостью температуры кипения от внешнего давления. Поэтому для решения данного пункта задачи можно воспользоваться приведенной таблицей. Из таблицы следует, что искомая температура лежит в интервале от 100 до 110 градусов. Считая, что в этом интервале представленная зависимость линейна, находим

$$t_x = 100° + \frac{10°}{P_{110} - P_{100}}\left(P_x - P_{100}\right) \approx 106{,}8°C \approx 107°C. \qquad (1)$$

1.2 Воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M} RT,$$

из которого найдем (давление пара определим по таблице)

$$m = \frac{MPV}{RT} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 31{,}16 \cdot 10^{3} \cdot 10}{8{,}31 \cdot (273{,}15 + 70)} \approx 2{,}0\,кг \qquad (2)$$

1.3 Столб воды разорвется, если давление в его верхней части станет равным давлению насыщенных паров при заданной температуре (при этом вода закипит).
Отсюда следует

$$P_0 - \rho g h = P_{нас} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P_0 - P_{нас}}{\rho g} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{5} - 0{,}47 \cdot 10^{5}}{1{,}0 \cdot 10^{3} \cdot 9{,}8} \approx 5{,}4\,м. \qquad (3)$$

Заметим, что максимальная высота подъема холодной воды с помощью поршневого насоса примерно равна 10 м. Поэтому для подъема воды на большую высоту используют много ступенчатые насосные системы.

1.4 Отношение теплоемкостей равно

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{3R}{Mc_0} = \frac{3 \cdot 8{,}31}{18 \cdot 10^{-3} \cdot 4{,}2 \cdot 10^{3}} \approx 0{,}33. \qquad (4)$$

Теплоемкость пара всего в три раза меньше теплоемкости жидкой воды!

1.5 Искомая доля рассчитывается по хорошо известным формулам

$$\eta = \frac{c_0 m \Delta t}{c_0 m \Delta t + Lm} = \frac{1}{1 + \dfrac{L}{c_0 \Delta t}} \approx 0{,}13. \qquad (5)$$

Столь малая доля объясняется чрезвычайно высокой удельной теплотой испарения воды.

1.6 В сосуде начнется конденсация пара, выделяющаяся при этом теплота пойдет на нагревание холодной воды. Главная проблема данной задачи заключается в том, что неизвестны ни конечная температура, ни масса сконденсировавшегося пара. Кроме того, зависимость давления насыщенного пара от температуры задана графически, что и заставляет искать графический способ решения задачи.
Запишем уравнение теплового баланса

$$L\Delta m + c_0 \Delta m (t_0 - t) = c_0 m_1 (t - t_1), \tag{6}$$

здесь Δm - масса сконденсировавшегося пара, t - искомая конечная температура.
Запишем также уравнение состояния для пара в начальном и конечном состоянии

$$\begin{aligned} P_0 V &= \frac{m}{M} R T_0 \\ PV &= \frac{m - \Delta m}{M} RT \end{aligned} \tag{7}$$

Наконец, третьим уравнением является заданная графически зависимость давления (насыщенного пара) от температуры $P(T)$.
Из уравнений (7) получим

$$P_0 V = \frac{m}{M} R T_0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{M P_0 V}{R T_0}$$

$$\frac{P}{P_0} = \frac{m - \Delta m}{m} \frac{T}{T_0} = \frac{T}{T_0} - \frac{\Delta m}{m} \frac{T}{T_0} = \frac{T}{T_0} - \frac{\Delta m R T}{M P_0 V} \quad \Rightarrow P = P_0 \frac{T}{T_0} - \frac{RT}{MV} \Delta m.$$

Массу сконденсировавшегося пара выразим из уравнения (6), в котором можно пренебречь теплотой, выделившейся при остывании сконденсировавшейся воды

$$\Delta m = \frac{c_0 m_1 (T - T_1)}{L}.$$

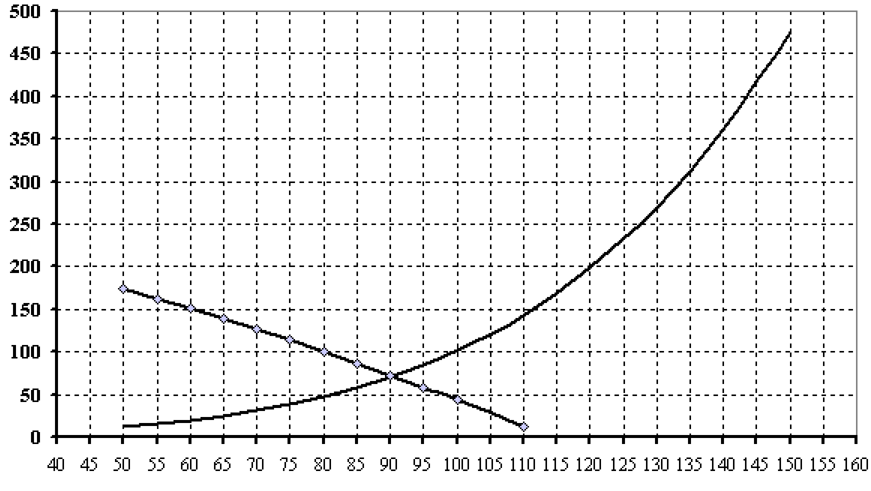
Подставляя это выражение в формулу для конечного давления, получим

$$P = P_0 \frac{T}{T_0} - \frac{RT}{MV} \frac{c_0 m_1 (T - T_1)}{L} = \frac{P_0}{T_0} T - \frac{c_0 m_1 R}{MVL} T (T - T_1). \tag{8}$$

Это уравнение допускает графическое решение – слева стоит функция, заданная графиком, справа - квадратичная функция от искомой температуры (правда в абсолютной шкале). График функции, стоящей справа следует построить на графике зависимости давления насыщенных паров от температуры.
Подставляя численные значения (давление измеряем в кПа), получаем довольно простую функцию, график которой построить не сложно.

$$P = 0{,}875 \cdot T - 8{,}43 \cdot 10^{-3} \cdot T \cdot (T - T_1) \tag{9}$$

Результат построения показан на рисунке. Точка пересечения (конечная температура) $t = 90°C$



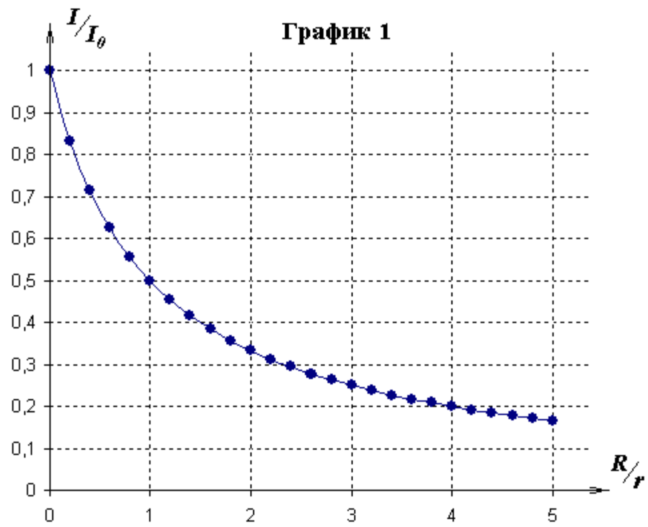
Задача 1 «Источник ЭДС»

1.1 Согласно закону Ома для полной цепи сила тока в цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

В качестве максимального значения по оси ординат удобно выбрать ток короткого замыкания I_0 (максимальный ток при $R = 0$) источника, который определяется только его параметрами

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$



В этом случае при использовании безразмерных координат (I/I_0) и (R/r) зависимость силы тока в цепи $I(R)$ от внешнего сопротивления R примет вид, представленный на графике 1.

1.2 Напряжение на внешнем сопротивлении найдем по закону Ома

$$U(R) = I \cdot R = \frac{\mathcal{E}}{R+r} R.$$

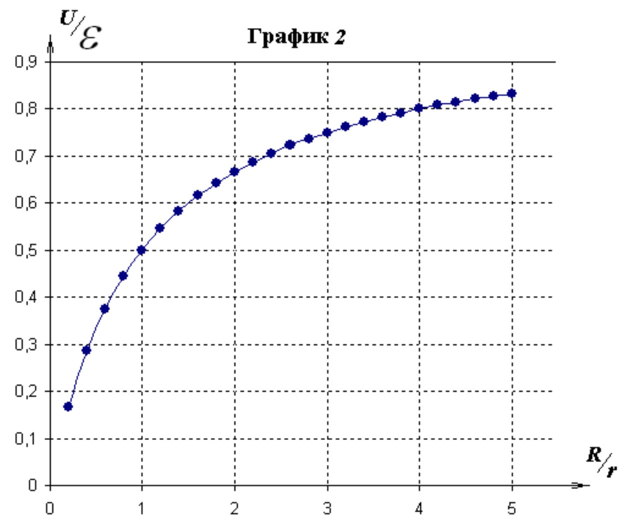
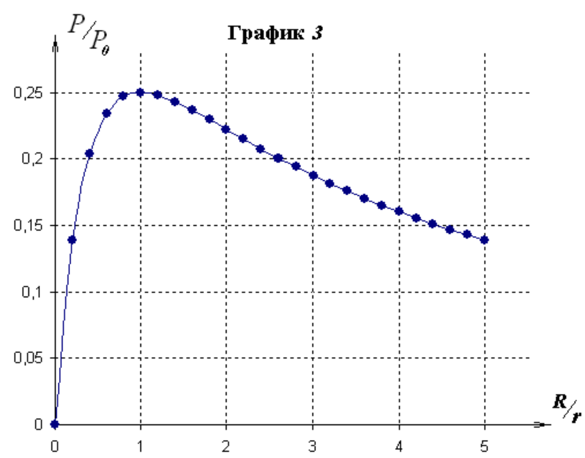


График полученной функции имеет вид, представленный на рисунке 2. Он начинается изначала координат и асимптотически приближается к значению, равному единице.

1.3 Мощность, выделяемую на внешнем сопротивлении, называемую также полезной мощностью, найдем согласно закону Джоуля-Ленца

$$P(R) = I^2 \cdot R = \left(\frac{\mathcal{E}}{R+r}\right)^2 R.$$



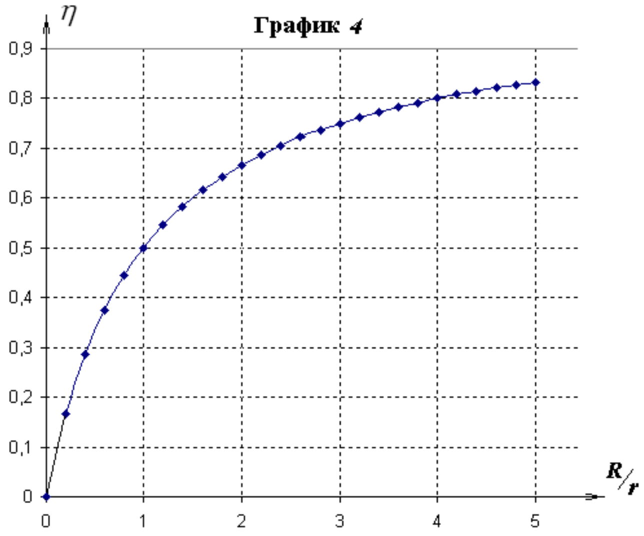
Для построения графика соответствующей зависимости удобно в качестве «единицы» измерения мощности выбрать величину

$$P_0 = \frac{\varepsilon^2}{r}.$$

Полученный график приведен на рисунке 3.

1.4 Согласно определению, коэффициент полезного действия цепи постоянного тока равен отношению полезной мощности (выделяемой на внешнем сопротивлении) к полной (выделяемой как на внешнем, так и на внутреннем сопротивлении)

$$\eta = \frac{I^2 \cdot R}{I^2 \cdot R + I^2 \cdot r} = \frac{R}{R+r}.$$



При больших внешних сопротивлениях график 4 подобно графику 2 асимптотически стремится к единице.

Интересно, что при достижении максимального значения КПД цепи полезная мощность стремится к нулю.

Соответственно, как следует из графика 3, максимум полезной мощности, достигаемый при выполнении условия $R = r$, соответствует значению КПД

$$\eta = 50\%$$

2.1 При последовательном соединении источников их ЭДС и внутренние сопротивления суммируются, следовательно в этом случае

$$P(R) = I^2 \cdot R = \left(\frac{N\varepsilon}{R + Nr} \right)^2 R.$$

Подобное включение выгодно для повышения напряжения питания и увеличения полезной мощности устройства.

2.2 При параллельном соединении одинаковых источников ЭДС батареи не увеличивается, и по-прежнему равно ЭДС одного источника. Внутреннее сопротивление батареи рассчитывается по законам параллельного соединения

$$r' = \frac{r}{N}.$$

Таким образом, в этом случае

$$P(R) = I^2 \cdot R = \left(\frac{\varepsilon}{R + \frac{r}{N}} \right)^2 R.$$

Как видим, подобное соединение не приводит к увеличению напряжения питания, правда несколько уменьшает внутреннее сопротивление источника.

3.1 При параллельном соединении различных источников ЭДС следует записать закон Ома для каждого из контуров, образованного двумя источниками, через каждый из которых течет свой ток.

Далее несложно показать, что ЭДС эквивалентно источника в этом случае рассчитывается по формуле

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 r_2 + \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}. \quad (1)$$

Внутреннее сопротивление источника в данном случае рассчитывается по законам параллельного сопротивления

$$r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Далее по стандартной схеме

$$P(R) = I^2 \cdot R = \left(\frac{\varepsilon}{R + r} \right)^2 R.$$

3.2 При перепутывании полярности следует взять знак «минус» в формуле (1) для вычисления ЭДС эквивалентного источника тока

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2}. \quad (2)$$

Соответственно, полезная мощность станет равной нулю при условии, что ЭДС эквивалентного источника станет равна нулю. В этом случае не будет тока во внешней цепи – он будет циркулировать только в контуре, образованном источниками.

Правила подсчета внутреннего сопротивления и полезной мощности аналогичны правилам предыдущего пункта

$$P(R) = I^2 \cdot R = \left(\frac{\varepsilon}{R + r} \right)^2 R.$$

Приравнивая (2) к нулю, получаем требуемое условие

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_1}{r_1 + r_2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\varepsilon_1}{r_1} = \frac{\varepsilon_2}{r_2}.$$

Задача 2 «Полукольцо»

1.1 Закон сохранения механической энергии при движении груза по горизонтальной поверхности имеет вид

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \tag{1}$$

где υ – значение мгновенной скорости движения груза, а x – значение абсолютной деформации пружины (смещение груза от положения равновесия).

1.2 Разделив обе части (1) на массу груза m, получим

$$\frac{\upsilon^2}{2} + \frac{k}{m}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{E}{m} = const. \tag{2}$$

Из (2) следует, что для горизонтального пружинного маятника

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Соответственно, период таких колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{3}$$

2.1 При рассмотрении математического маятника удобно ввести в качестве координаты угол α его отклонения от вертикали. Тогда кинетическая энергия движения материальной точки может быть представлена в виде

$$E^K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2R^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения математического маятника, а радиус окружности равен длине его подвеса $R = l$.

При отклонении маятника на угол α от вертикали его потенциальная энергия возрастет на величину

$$E^{П} = mgh = mgl(1-\cos\alpha).$$

2.2 Используя приведенное в условии соотношение для малых колебаний математического маятника, получим

$$E^{П} = mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

Теперь уравнения закона сохранения энергии принимает вид

$$E = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{k\alpha^2}{2} = const, \tag{4}$$

где $k = \dfrac{mg}{l}$.

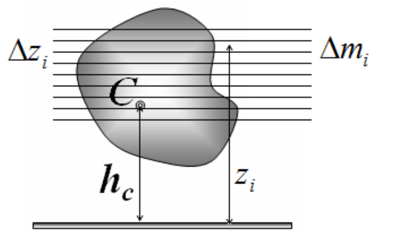
Преобразовывая выражение (4) к уравнению гармонических колебаний, получаем

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{k}{m}\cdot\frac{\alpha^2}{2} = \frac{E}{mR^2} = const.$$

Соответственно, для периода колебаний математического маятника получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5}$$

3.1 Мысленно разобьем тело на тонкие горизонтальные слои толщиной Δz. Массу каждого слоя обозначим Δm_i, а его высоту z_i. Тогда потенциальная энергия всего тела может быть представлена в виде суммы



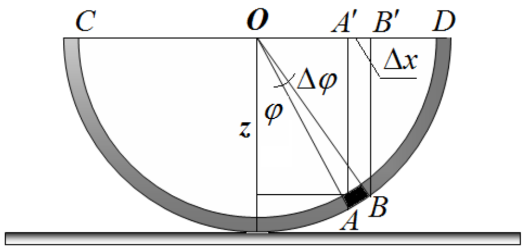
$$U = \sum_i \Delta m_i g z_i = g \sum_i \Delta m_i z_i \, .$$

Сумма стоящая в этом выражении определяет положение центра масс

$$\sum_i \Delta m_i z_i = m h_c \, .$$

Откуда и следует требуемое выражение для потенциальной энергии тела.

4.1 Мысленно разобьем кольцо на малые участки, видимые из центра кольца под малым углом $\Delta\varphi$. Рассмотрим на кольце малый участок AB, положение которого задается углом φ от вертикали. Длина этого участка кольца равна $\Delta l = |AB| = R\Delta\varphi$, а масса (учитывая, что вся масса m равномерно распределена в пределах угла $\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$) $\Delta m = \dfrac{m}{\pi}\Delta\varphi$. Вертикальная координата (отсчитываемая от центра кольца O) выделенного участка равна $z = R\cos\varphi$.



Теперь можно записать выражение для определения координаты h_C центра масс кольца

$$m h_C = \sum_i \Delta m_i \, z_i \, , \tag{6}$$

где суммирование ведется по всем элементам кольца. Подставим полученные выше выражения для параметров отдельных элементов кольца

$$m h_C = \sum_i \Delta m_i \, z_i = \sum_i \frac{m}{\pi}\Delta\varphi_i \cdot R\cos\varphi_i = \frac{m}{\pi}\sum_i \Delta\varphi_i \cdot R\cos\varphi_i = \frac{m}{\pi}\sum_i \Delta l_i \cos\varphi_i \, , \tag{7}$$

Полученная сумма легко вычисляется, если обратить внимание, что $\Delta l_i \cos\varphi_i = |A'B'|$, то есть равна длине проекции выделенного отрезка на горизонтальное направление, сумма этих длин проекций равна длине отрезка CD, очевидно, равной диаметру кольца. Таким образом получаем

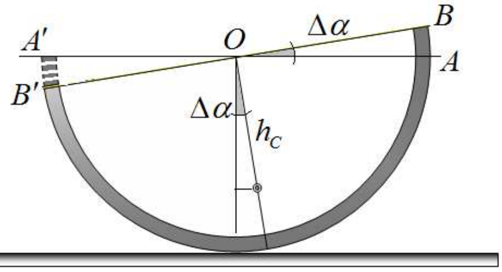
$$m h_C = \frac{m}{\pi}\sum_i \Delta l_i \cos\varphi_i = \frac{m}{\pi}\cdot 2R \, , \tag{8}$$

Откуда и следует искомое выражение

$$h_C = \frac{2}{\pi} R \, , \tag{9}$$

Альтернативный вариант 1.

Повернем полукольцо на малый угол $\Delta\alpha$. При этом его потенциальная энергия увеличится (за счет того, что отрезок $A'B'$ «переместился» в положение AB)



$$\Delta U = \Delta m g \cdot \Delta h = \frac{m}{\pi}\Delta\alpha \cdot R\Delta\alpha \tag{1}$$

С другой стороны это же изменение

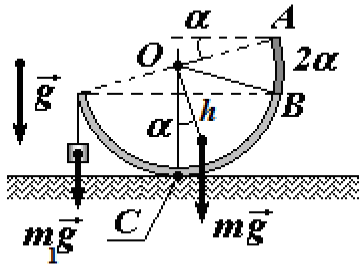
потенциальной энергии можно выразить через изменение высоты центра масс

$$\Delta U = mg\left(h_C - h_C \cos\Delta\alpha\right) \approx mgh_C \frac{(\Delta\alpha)^2}{2},$$

на последнем шаге использовалась приближенная формула для косинуса малого угла. Приравнивая полученные выражения для изменения потенциальной энергии, получим требуемую формулу для центра масс.

Альтернативный вариант 2.

Подвесим к краю полукольца груз малой массы m_1. Рассмотрим моменты сил, действующих на систему в состоянии равновесия, относительно оси, проходящей через точку касания полукольца и плоскости (точку *C*). При малом угле [1] α момент веса груза



$$M_1 = mgR\cos\alpha \approx mgR$$

Момент силы тяжести полукольца можно записать двумя способами: через смещение центра масс полукольца

$$M_2 = mgh_C \sin\alpha \approx mgh_C\alpha$$

или как момент веса некомпенсированной части *AB* полукольца

$$M_2 \approx \frac{2\alpha}{\pi} mgh_C$$

Приравнивая между собой выражения для M_2, найдем искомое расстояние r от точки *O* до центра масс полукольца.

Возможны и другие варианты решения.

4.2 При колебаниях полукольца вокруг его центра *O* все его точки движутся с одинаковыми скоростями $v = \omega R$, где $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ - угловая скорость вращения кольца, α - угол отклонения в данный момент времени. Поэтому кинетическая энергия кольца выражается формулой

$$E^K = \frac{m\omega^2 R^2}{2} \qquad (10)$$

Изменение потенциальной энергии кольца при отклонении на малый угол α равно

$$\Delta U = mgh_C\left(1 - \cos\alpha\right) \approx mgh_C \frac{\alpha^2}{2}. \qquad (11)$$

Используя формулы (10)-(11), запишем уравнения закона сохранения механической энергии

$$\frac{m\omega^2 R^2}{2} + mgh_C \frac{\alpha^2}{2} = E = const \qquad (12)$$

из которого следует уравнение гармонических колебаний

$$\omega^2 + \frac{gh_C}{R^2}\alpha^2 = const, \qquad (13)$$

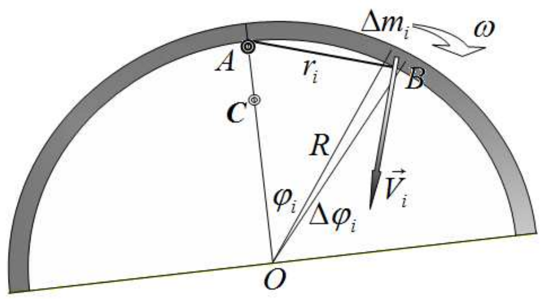
Период которых равен

---

[1] При малом угле ($\alpha \to 0$) с одинаковой точностью справедливы равенства $\sin\alpha \approx \alpha;\ \cos\alpha \approx 1$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{gh_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{g\frac{2}{\pi}R}} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{R}{g}}\ . \tag{14}$$

Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).



4.3 В этом случае разные части полукольца будут иметь разные линейные скорости, но одинаковую угловую скорость $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ (α - угол отклонения в данный момент времени). Поэтому для вычисления кинетической энергии необходимо его разбивать на малые участки. Рассмотрим один из таких участков, видимый из центра под малым углом $\Delta\varphi$, и отстоящий от оси симметрии полукольца на угол φ. Модуль его линейной скорости равен $V_i = \omega r_i$, где r_i - расстояние от выделенного участка кольца до оси вращения BA. Квадрат этого расстояния можно выразить по теореме косинусов для треугольника OAB

$$r_i^2 = 2R^2(1-\cos\varphi_i). \tag{15}$$

Подсчитаем кинетическую энергию кольца, как сумму энергий всех его малых частей

$$E^K = \sum_i \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{1}{2}\frac{m}{\pi}\Delta\varphi_i \cdot (r_i\omega)^2 = \frac{m\omega^2}{2\pi}\sum_i 2R^2(1-\cos\varphi_i)\Delta\varphi_i = \\ = \frac{m\omega^2}{\pi}\left(R^2\sum_i\Delta\varphi_i - R\sum_i R\cos\varphi_i\Delta\varphi_i\right).$$

Первая сумма в этом выражении равна π, вторую мы вычисляли при расчете положения центра масс, она равна $2R$. Поэтому выражение для кинетической энергии полукольца имеет вид

$$E^K = \frac{m\omega^2}{\pi}\left(R^2\sum_i\Delta\varphi_i + R\sum_i R\cos\varphi_i\Delta\varphi_i\right) = \frac{m\omega^2R^2}{\pi}(\pi-2) = m\omega^2R^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) \tag{16}$$

Не сложно получить и выражение для потенциальной энергии кольца при его отклонении на малый угол α. Для этого достаточно в формуле (11) заменить h_C на расстояние от оси вращения до центра масс в этом «перевернутом» случае ($h_C \to R - h_C$

$$\Delta U = mg(R-h_C)(1-\cos\alpha) \approx mg(R-h_C)\frac{\alpha^2}{2} = mgR\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\alpha^2}{2}. \tag{17}$$

Теперь мы можем записать уравнение закона сохранения энергии при движении кольца

$$m\omega^2R^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + mgR\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{\alpha^2}{2} = E \tag{18}$$

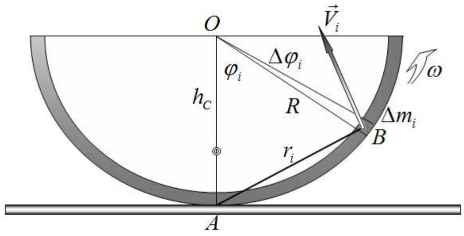
и привести его к виду уравнения гармонических колебаний

$$\omega^2 + \frac{g}{2R}\alpha^2 = const\ . \tag{19}$$

Из этого уравнения определяем период колебаний

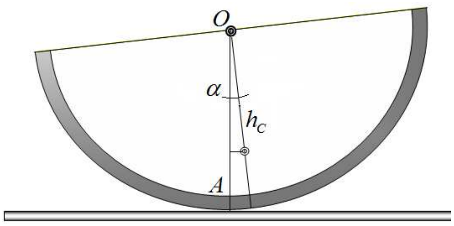
$$T = 2\pi\sqrt{2\frac{R}{g}}\ . \qquad (20)$$

Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).



4.4 Расчет кинетической энергии в данном случае ничем не отличается от проведенного в предыдущем разделе 4.3, потому, что в указанном в подсказке положении мгновенным центром вращения является вершина полукольца. Поэтому можно воспользоваться формулой (16).

$$E^K = m\omega^2 R^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) \qquad (21)$$



А для определения изменения потенциальной энергии можно воспользоваться соответствующей формулой (11) из пункта 4.2, потому, что в обоих случаях высота центра полукольца остается неизменной, поэтому

$$\Delta U = mgh_C\frac{\alpha^2}{2} = mgR\frac{2}{\pi}\frac{\alpha^2}{2} = mgR\frac{\alpha^2}{\pi}\ . \qquad (22)$$

Дальнейший путь решения уже изъезжен нами. Записываем закон сохранения энергии

$$m\omega^2 R^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + mgR\frac{\alpha^2}{\pi} = E\ , \qquad (23)$$

приводим его к виду уравнения гармонических колебаний

$$\omega^2 + \frac{g}{(\pi-2)R}\alpha^2 = const\ , \qquad (24)$$

Записываем формулу для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{(\pi-2)\frac{R}{g}}\ . \qquad (25)$$

Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).

Задача 3. «Электрический дрейф»

Часть 0.

0.1 Радиус окружности:

$$R = \frac{mv_0}{qB} \qquad (1)$$

0.2 Угловая скорость вращения:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{m} \qquad (2).$$

0.3 Период вращения:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (3)$$

Часть 1.

1.1 Радиус верхней и нижней полуокружностей равен:

$$R_В = \frac{mv_В}{qB} \quad и \quad R_Н = \frac{mv_Н}{qB} \quad (4).$$

Время движения по двум полуокружностям равно:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (5).$$

Скорость дрейфа выражается следующим образом:

$$v_Д = 2\frac{(R_В - R_Н)}{T} \quad (6).$$

Подставляя значения радиусов (4) и времени (5), получим:

$$v_Д = \frac{1}{\pi}(v_В - v_Н) \quad (7).$$

Разность скоростей определим из теоремы о кинетической энергии:

$$\frac{mv_В^2}{2} - \frac{mv_Н^2}{2} = qE(R_В + R_Н) \quad (8).$$

Используя выражения (4), получим:

$$\frac{m}{2}(v_В^2 - v_Н^2) = \frac{mE}{B}(v_В + v_Н) \quad (9).$$

Следовательно, разность скоростей равна:

$$v_В - v_Н = 2\frac{E}{B} \quad (10).$$

Тогда скорость дрейфа:

$$v_Д = \frac{2}{\pi}\frac{E}{B} \quad (11).$$

Часть 2.

2.1 Второй закон Ньютона в проекциях на оси OX и OY имеет вид:

$$\begin{aligned} OX: &\quad qBv_Y = ma_X \\ OY: &\quad qE - qBv_X = ma_Y \end{aligned} \quad (12).$$

Проекции ускорений равны:

$$\begin{aligned} a_X &= \frac{qB}{m}v_Y \\ a_Y &= -\frac{qB}{m}v_X + \frac{qE}{m} \end{aligned} \quad (13).$$

2.2 Проекции скорости на оси:

$$\begin{aligned} v_x &= u + \omega R\sin\varphi \\ v_y &= -\omega R\cos\varphi \end{aligned} \quad (14),$$

где

$$\omega = \frac{u}{r} \quad (15).$$

2.3 Проекции центростремительного ускорения:

$$a_x = -\omega^2 R\cos\varphi$$
$$a_y = -\omega^2 R\sin\varphi \qquad (16).$$

2.4 Выразим из уравнений (14) синус и косинус угла φ:

$$\sin\varphi = \frac{v_x - u}{\omega R}$$
$$\cos\varphi = -\frac{v_y}{\omega R} \qquad (17).$$

Подставляя в уравнения (16), получим:

$$a_x = \omega v_y$$
$$a_y = -\omega v_x + \omega u \qquad (18).$$

2.5 При подстановке в систему (13) выражения для угловой скорости (2) получим:

$$a_x = \omega v_y$$
$$a_y = -\omega v_x + \omega \frac{E}{B} \qquad (19),$$

что аналогично системе (18).

Величина $\frac{E}{B}$ соответствует скорости u.

Таким образом, скорость дрейфа равна:

$$v_Д = \frac{E}{B} \qquad (20).$$