



Республиканская физическая олимпиада 2022 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач 9 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!

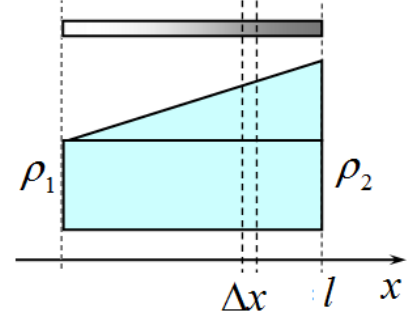


Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 9-1. Неоднородная разминка.

Задача 1.1

Для определения центра масс неоднородного стержня рассмотрим однородную трапецию с длинами оснований численно равными $C\rho_1$ и $C\rho_2$ и высотой l . Если мы выделим малый участок (полоску) шириной Δx , то масса этой полоски будет равна (точнее, пропорциональна) массе такого же отрезка рассматриваемого неоднородного стержня. Поэтому координаты x_c центров масс стержня и трапециевидной пластинки будут одинаковы. Рассчитать координату центра масс пластинки можно традиционным способом.



Разобьем трапецию на прямоугольник и треугольник. Масса

прямоугольника равна $m_1 = C\rho_1 l$, координата его центра масс $x_1 = \frac{l}{2}$. Масса треугольника

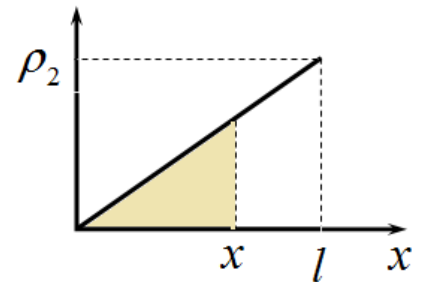
$m_2 = \frac{C}{2}(\rho_2 - \rho_1)l$, координата его центра масс $x_2 = \frac{l}{3}$. Тогда координата центра масс трапеции задается формулой

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{\rho_2 + 2\rho_1}{3(\rho_2 + \rho_1)} l.$$

Задача 1.2

На рисунке показана зависимость удельного сопротивления стержня от координаты x . Эта зависимость описывается функцией:

$$\rho(x) = \rho_0 \frac{x}{l}. \quad (1)$$



Понятно, что площадь под графиком этой зависимости пропорциональна электрическому сопротивлению участка стержня. Поэтому сопротивление участка стержня от нуля до некоторой точки с координатой x будет равно:

$$R(x) = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{x^2}{lS}. \quad (2)$$

Где S - постоянная площадь поперечного сечения стержня.

Сопротивление всего стержня равно

$$R_0 = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 l}{S}. \quad (3)$$

Поэтому сила тока, протекающего по стержню равна

$$I = \frac{U_0}{R_0} = \frac{2S}{\rho_0 l} U_0. \quad (4)$$

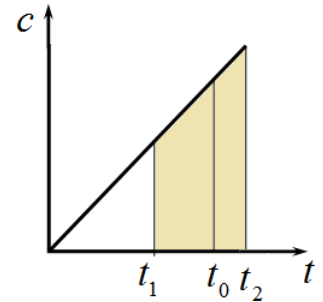
Следовательно, искомое напряжение будет описываться формулой:

$$U(x) = I_0 R(x) = U_0 \frac{x^2}{l^2}. \quad (5)$$

Задача 1.3

Построим график зависимости удельной теплоемкости стержня от координаты.

Площадь под этим графиком в интервале температур Δt пропорциональна количеству теплоты, которое требуется, чтобы нагреть брусок на величину Δt в том же диапазоне температур. Так как теплообмен между брусками происходит без потерь, то для нахождения установившейся температуры необходимо трапецию между значениями t_1 и t_2 разбить на две равновеликие части. Легко заметить, что площадь треугольника под данным графиком в диапазоне от нуля до произвольного значения t пропорциональна t^2 . Это позволяет сразу найти значение t_0 , разбивающее трапецию на две части равных площадей:



$$t_0^2 - t_1^2 = t_2^2 - t_0^2 \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}} = 15,8^\circ\text{C}.$$

Задание 9-2. Земная невесомость.

Часть 1. «Идеальная невесомость»

1.1 Вес тела \vec{P} – сила, с которой тело действует на опору или растягивает подвес. В отличие от силы тяжести, вес, приложенный к опоре или подвесу, зависит от состояния движения опоры или подвеса.

Рассмотрим (для определенности) брусок на горизонтальной поверхности (Рис. 1), которая может двигаться вверх или вниз с различными скоростями и ускорениями.

При равномерном движении опоры в любом направлении вес \vec{P} тела не изменится, поскольку эта система отсчета инерциальная (ИСО).

Если же опора будет иметь ускорение, направленное, например, вверх (см. Рис. 1), то вес тела увеличится (следует из второго закона Ньютона)

$$P_1 = m(\mathbf{g} + \mathbf{a}). \quad (1)$$

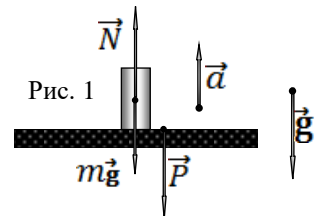
Заметим, что (1) никак не зависит от направления скорости – тело может двигаться как вверх, так и вниз, важно направление именно ускорения. Таким образом, при направлении ускорения лифта «вверх» получить состояние невесомости ($P = 0$) никак не получится.

При направлении ускорения лифта «вниз» ситуация меняется

$$P_1 = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}). \quad (2)$$

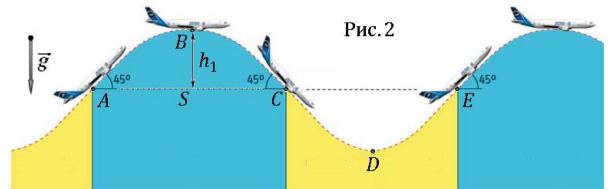
Следовательно, при движении лифта вниз с ускорением $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ будет наступать состояние невесомости

$$P_1 = m(\mathbf{g} - \mathbf{g}) = 0. \quad (3)$$



Как следует из (3) лифт может двигаться в любом направлении (опускаться, ускоряясь или подниматься, замедляясь), но с ускорением $a_1 = g$, направленным вниз. При этом его пассажиры испытают кратковременную невесомость. Простейший вариант – свободное падение на небольшом промежутке времени (не более нескольких секунд!).

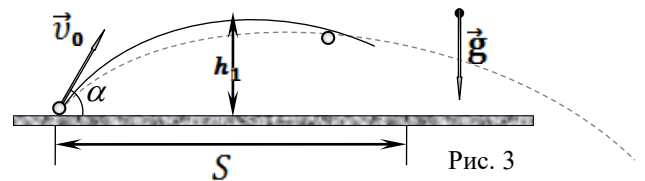
1.2 Как следует из решения пункта 1.1 при движении тела с ускорением свободного падения $a_1 = g$, оно находится в состоянии невесомости. Поскольку при движении в поле тяжести земли это условие выполнено, то приходим к выводу, что при движении по параболе (под действием одной силы тяжести $m\vec{g}$) тело будет в состоянии невесомости.



1.3 Поскольку на участке ABC самолет выключает двигатели (Рис. 2) и переходит на параболическую траекторию, то его движение ничем не отличается от движения камешка, брошенного под углом к горизонту (Рис. 3).

Соответственно, для нахождения времени невесомости t_n можно воспользоваться известной формулой для времени полета тела, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0

$$t_n = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 26,0 \text{ с}.$$



(4)

Хотя полученное значение t_n и не очень большое, но это время «в десятки раз» превышает время «лифтовой невесомости».

1.4 В верхней точке траектории скорость самолёта v_1 будет равна проекции его начальной скорости на горизонтальное направление

$$v_1 = v_{0x} = v_0 \cos \alpha = 460 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = 128 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

(5)

Вычислим также радиус R кривизны параболы в верхней точке траектории, предполагая, что самолет движется по дуге окружности радиуса R с ускорением

(6)

1.5 Для вычисления высоты h_1 максимального подъёма (см. Рис. 3) самолёта над уровнем AC воспользуемся формулой для максимальной высоты подъёма тела, брошенного под углом к горизонту

$$h_1 = \frac{v_0^2 (\sin \alpha)^2}{2g} = 835 \text{ м}.$$

(7)

1.6 Поскольку парабола CDE по условию симметрична параболе ABC , то её прогиб h_1 и радиус R кривизны такие же, как и в ранее рассмотренных пунктах.

Соответственно, в нижней точке D траектории (см. Рис. 2) по закону сохранения энергии скорость самолёта вырастет до значения

$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1}.$$

(8)

Следовательно, центростремительное ускорение самолета будет направлено вверх и равно

$$a_2 = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_0^2 + 2gh_1}{v_1^2} g = 29,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2} = 3,00 g, \quad (9)$$

где R – радиус (б) кривизны параболы в нижней точке траектории (такой же, как и в верхней точке).

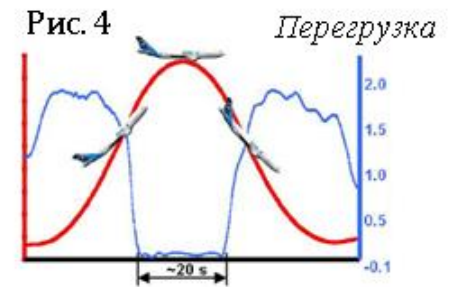
Таким образом, ответ в данном пункте принимает вид

$$\eta = \frac{a_2}{g} = 3,00 \quad (10)$$

Для справки на Рис. 4 приведены показания приборов, измеряющих перегрузку в реальной ситуации. Как видим из рисунка, показания самописцев в районе точки D дают для перегрузки значение

$$\eta = \frac{a_2}{g} = 2,00$$

Таким образом, наша оценка представляется вполне адекватной и реальной.



Часть 2. «Реальная невесомость»

2.1 При учете силы сопротивления воздуха (т.е. в реальной ситуации) пилоты не выключают двигатели полностью, поскольку для возникновения невесомости необходимо силой тяги двигателей F_T постоянно компенсировать действующую на самолёт силу сопротивления воздуха $F_c = -\beta v^2$.

Для этого (помимо высокого лётного мастерства!) необходима мгновенная мощность

$$P_{\text{д}}(t) = F_T \cdot v = F_c \cdot v = \beta v^3 \quad (11)$$

При движении по параболе скорость тела меняется (сначала уменьшается, а потом увеличивается) от времени по закону

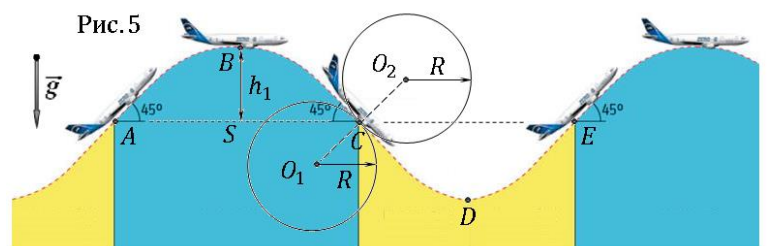
$$v(t) = \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2}, \quad (12)$$

Соответственно, искомая мощность

$$P_{\text{д}}(t) = \beta \sqrt{v_{0x}^2 + (v_{0y} - gt)^2}^3 = \beta \left(\sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha gt + g^2 t^2} \right)^3 \quad (13)$$

Все необходимые вычисления следует проводить с учетом правила сохранения трёх значащих цифр (столько задано в условии).

2.2 При движении вблизи точки C происходит «смена» парабол и, соответственно, мгновенный перенос центров кривизны различных участков траекторий из точки O_1 в точку O_2 (Рис. 5). Это приводит к резкому изменению направления центростремительного ускорения на угол примерно в 180 градусов

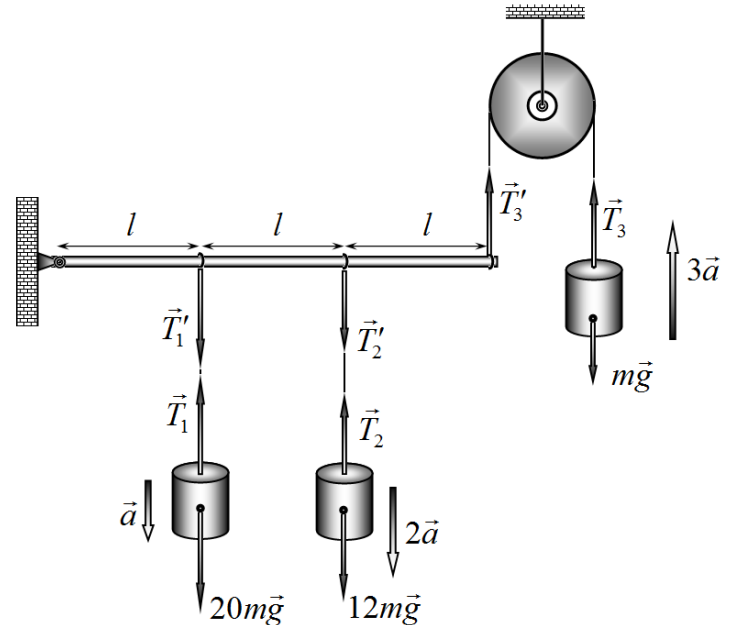


(было направление CO_1 , а «через мгновение» стало CO_2). Такое изменение действующих сил и ускорений внутри самолёта воспринимается как действие больших сил инерции, что и «чувствуют» на себе пассажиры. Данное явление, правда, в меньших масштабах, можно наблюдать при двойном повороте трамвая или троллейбуса, если внимательно проследить за синхронными «качаниями голов» сидящих пассажиров.

Задание 3. Три груза.

Действующие в системе силы изображены на рисунке. Т.к. стержень жёсткий, а нити нерастяжимые, ускорения грузов относятся как 1:2:3. Сумма моментов сил, действующих на невесомый стержень, равна нулю. Эти два условия вместе с уравнениями 2-го закона Ньютона для всех грузов дают систему уравнений

$$\begin{cases} 20ma = 20mg - T_1 \\ 12m \cdot 2a = 12mg - T_2 \\ m \cdot 3a = T_3 - mg \\ T_1 l + T_2 \cdot 2l = T_3 \cdot 3l \end{cases} \quad (1)$$



из которой находим

$$a = \frac{41}{77} g . \quad (2)$$

Однако, найденное значение ускорения второго груза $a = \frac{82}{77} g$ получается больше ускорения свободного падения. Это означает, что нить второго груза не будет натянутой, а его ускорение равно g . Также можно показать, что формально из системы уравнений (1) следует, что $T_2 < 0$, чего для нити быть не может. Следовательно, нить, к которой подвешен второй груз, на стержень не действует. Поэтому система уравнений (1) неверно описывает рассматриваемое устройство. Для расчета ускорений стержня и остальных грузов второй груз следует исключить.

Правильные значения ускорений первого и третьего грузов находятся из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} 20ma = 20mg - T_1 \\ m \cdot 3a = T_3 - mg \\ T_1 l = T_3 \cdot 3l \end{cases} . \quad (3)$$

Решая эту систему уравнений, окончательно получаем

$$a = \frac{17}{29} g .$$

$$a_1 = \frac{17}{29} g , \quad a_2 = g , \quad a_3 = \frac{51}{29} g . \quad (4)$$



Республиканская физическая олимпиада 2022 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач 10 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задание 1. Архимедова разминка.

Данная задача состоит из двух не связанных между собой задач.

Задача 1.1 Шар на дне сосуда.

1.1.1 Рассчитать непосредственно силу давления воды на половину шара достаточно сложная математическая задача: давление зависит от глубины, направление силы давления также изменяется от точки к точке.

Поэтому для расчета искомой силы можно применить простой искусственный прием. Мысленно разрежем шар по диаметру и уберем нижнюю половину. После такой «операции» искомая сила давления на верхнюю половину поверхности шара \vec{F} не изменится. Но легко можно найти силу давления на «срез» шара:

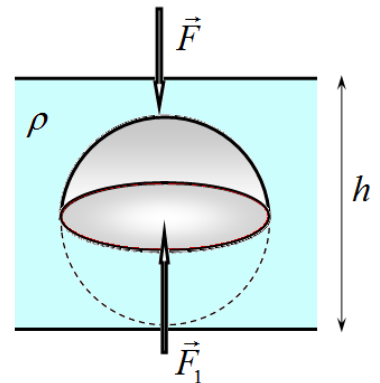
$$F_1 = PS = \rho g(4R - R) \cdot \pi R^2 = 3\pi R^3 \rho g. \quad (1)$$

Векторная сумма сил давления на верхнюю половину и на нижний «срез» равна силе Архимеда, действующей на половину шара, поэтому

$$F_A = F_1 - F. \quad (2)$$

Из этого уравнения с учетом формулы для силы Архимеда находим:

$$F = F_1 - F_A = 3\pi R^3 \rho g - \frac{2}{3} \pi R^3 \rho g = \frac{7}{3} \pi R^3 \rho g. \quad (3)$$



Задача 1.2 Однородный стержень в неоднородной жидкости.

1.2.1 – 1.2.2 Так как искомая зависимость плотности от глубины погружения является линейной, то она описывается формулой

$$\rho(z) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{l} z. \quad (1)$$

Чтобы тело плавало, необходимо, что сила Архимеда могла уравновесить силу тяжести. Сила тяжести, действующая на стержень равна

$$mg = \rho_0 l S g, \quad (2)$$

где S - площадь поперечного сечения стержня.

Сила Архимеда равна силе тяжести, действующей на вытесненный объем воды. Так плотность воды изменяется по линейному закону, то при расчете массы столбика вытесненной воды можно использовать ее среднюю плотность, равную среднему арифметическому плотностей на ее краях, или равной ей плотности на середине столбика. Поэтому при погружении нижнего конца стержня на глубину z , действующая на него сила Архимеда будет равна

$$F_A = \frac{\rho_1 + \rho(z)}{2} z S g = \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} z \right) z S g. \quad (3)$$

Из условия плавания следует уравнение для определения глубины погружения:

Теоретический тур. Вариант 1.

10 класс. Решения задач. Бланк для жюри.

$$\rho_0 l = \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} z \right) z. \quad (4)$$

Предельным случаем плавания является $z = l$. Поэтому условием плавания является выполнение очевидного условия:

$$\rho_0 l < \left(\rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2l} l \right) l = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} l. \quad (5)$$

Или

$$\rho_0 < \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}. \quad (6)$$

Для определения глубины погружения необходимо решить уравнение (4), из которого следует, что

$$z = l \frac{\sqrt{\rho_1^2 + 2\rho_0(\rho_2 - \rho_1)} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (7)$$

1.2.3 Что бы вертикальное плавание было устойчиво, необходимо, чтобы центр масс стержня находился глубже, чем центр масс вытесненного столбика воды. При полном погружении стержня его центр масс погружается на глубину $\frac{l}{2}$. Чтобы центр масс вытесненной воды находился выше этой точки необходимо, чтобы плотность жидкости у поверхности была больше, чем плотность жидкости у дна, т.е.

$$\rho_2 < \rho_1. \quad (8)$$

В этом случае жидкость в поле тяжести станет неустойчивой, начнется ее перемешивание, поэтому реализовать такой эксперимент нельзя.

Задание 2. Знаете ли Вы МКТ?

Часть 1. Всего один шарик.

При расчете сил давления следует использовать следующую основную идею: средняя сила равна отношению импульса, полученного телом, к промежутку времени, в течение которого этот импульс был получен:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}. \quad (1)$$

1.1 При выполнении условия $v_0^2 < 2gh$ шарик не будет ударяться о крышку сосуда. В момент каждого удара о дно сосуда он будет передавать дну импульс

$$\Delta p = 2mv_0 \quad (2)$$

При равноускоренном движении в поле тяжести земли зависимость вертикальной координаты шарика имеет вид

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (3)$$

Поэтому время между двумя последовательными ударами можно легко найти из выражения (2), полагая $z = 0$. Тогда время между ударами оказывается равным

$$\Delta t = \frac{2v_0}{g}. \quad (4)$$

А средняя сила давления шарика на дно сосуда равна (как ни странно!?):

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mg. \quad (5)$$

1.2 Если скорость шарика у дна $v_0 > \sqrt{2gh}$, то он будет ударяться и о верхнюю крышку сосуда. Скорость шарика при ударе о крышку рассчитывается по формуле

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}. \quad (6)$$

Так как движение шарика между ударами является равноускоренным, то время подъема шарика и равное ему время падения оказывается равным

$$\tau = \frac{h}{\frac{1}{2}(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh})} = \frac{2h}{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}. \quad (7)$$

Тогда средняя сила давления шарика на дно равна

$$F_1 = \frac{2mv_0}{2\tau} = \frac{mv_0}{2h}(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}). \quad (8)$$

Сила давления на крышку рассчитывается аналогично:

$$F_2 = \frac{2mv_1}{2\tau} = \frac{m\sqrt{v_0^2 - 2gh}}{2h}(v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}). \quad (9)$$

Разность этих сил опять равна

$$F_2 - F_1 = mg. \quad (10)$$

Часть 2. Очень много молекул.

2.1 Средняя квадратичная скорость молекул рассчитывается по известной формуле

$$\langle v_{кв.} \rangle = \sqrt{3 \frac{RT}{M}} \quad (11)$$

Так как все направления в пространстве равноправны, то

$$\langle v_{кв.x} \rangle = \langle v_{кв.y} \rangle = \langle v_{кв.z} \rangle.$$

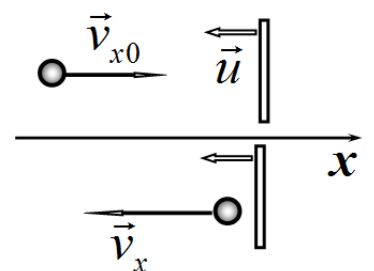
Кроме того,

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2.$$

Поэтому

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle \Rightarrow \langle v_{кв.x} \rangle = \sqrt{\frac{RT}{M}}. \quad (12)$$

2.2 При ударе молекулы о поршень изменяется только та проекция вектора скорости, которая перпендикулярна плоскости поршня. Поэтому направим ось x перпендикулярно поршню, вдоль оси сосуда. Рассмотрим молекулу, которая налетает на поршень, имея компоненту скорости, перпендикулярную пластине v_{x0} . Если скорость поршня равна u и направлена



Теоретический тур. Вариант 1.

10 класс. Решения задач. Бланк для жюри.

навстречу налетающей молекуле, то после абсолютно упругого удара проекция скорости молекулы станет равной

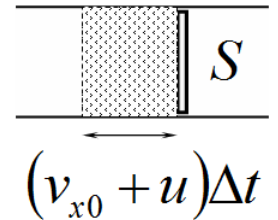
$$v_x = -v_{x0} - 2u \quad (13)$$

Это соотношение легко доказать, рассматривая упругий удар в системе отсчета, связанной с поршнем, а затем вернувшись в систему отсчета, связанную с сосудом.

Изменение проекции импульса молекулы при ударе равно (m - масса одной молекулы)

$$\Delta p_x = -m(v_{x0} + 2u) - mv_{x0} = -2m(v_{x0} + u). \quad (14)$$

Такой же по модулю, но противоположно направленный импульс получит поршень. Предположим, что у всех молекул модуль проекции скорости на ось равен v_{x0} . Тогда за малый промежуток времени Δt до поршня долетят те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем, чем $(v_{x0} + u)\Delta t$.



Число этих молекул равно

$$\Delta N = \frac{1}{2} nS(v_{x0} + u)\Delta t. \quad (15)$$

Здесь n - концентрация молекул, также учтено, что в направлении стенки летят половина молекул. Эти молекулы передадут стенке импульс, равный

$$\Delta p_\Sigma = \frac{1}{2} nS(v_{x0} + u)\Delta t \cdot 2m(v_{x0} + u) = mn(v_{x0} + u)^2 S\Delta t. \quad (16)$$

Теперь можно провести усреднение по скоростям молекул:

$$\Delta p_\Sigma = \langle mn(v_{x0} + u)^2 \rangle = mn(\langle v_{x0}^2 \rangle + 2\langle v_{x0} \rangle u + u^2) S\Delta t. \quad (17)$$

В соответствии с общим подходом, средняя сила, действующая на поршень с одной стороны, равна

$$F_1 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn(\langle v_{x0}^2 \rangle + 2\langle v_{x0} \rangle u + u^2) S. \quad (18)$$

Понятно, что для вычисления силы, действующей на вторую сторону поршня достаточно в формуле (18) заменить знак скорости u :

$$F_2 = \frac{\Delta p_\Sigma}{\Delta t} = mn(\langle v_{x0}^2 \rangle - 2\langle v_{x0} \rangle u + u^2) S. \quad (19)$$

Разность этих сил и есть сила, действующая на поршень со стороны газа:

$$F = F_1 - F_2 = 4mn\langle v_{x0} \rangle u S. \quad (20)$$

Осталось выразить величины, входящие в эту формулу, через величины, заданные в условии задачи:

$$m = \frac{M}{N_A}; \quad n = \frac{P_0}{kT_0}; \quad \langle v_x \rangle = \sqrt{\frac{RT_0}{M}}. \quad (21)$$

В итоге получаем:

$$F = 4mn\langle v_{x0} \rangle u S = 4 \frac{M}{N_A} \frac{P_0}{kT_0} \sqrt{\frac{RT_0}{M}} Su = 4P_0 \sqrt{\frac{M}{RT_0}} Su. \quad (22)$$

2.3 Используя формулу (13), найдем изменение кинетической энергии молекулы при ударе (слагаемое пропорциональное u^2 можно опустить):

$$\Delta E_1 = \frac{m}{2}(v_{x0} + u)^2 - \frac{m}{2}v_{x0}^2 = mv_{x0}u \quad (23)$$

Тогда за малый промежуток времени Δt изменение энергии всего газа равно (усреднение проводим сразу):

$$\Delta E_{\Sigma} = \left\langle \frac{1}{2} n S v_{x0} \Delta t \cdot m v_{x0} u \right\rangle = \frac{1}{2} m n \langle v_{x0}^2 \rangle u S \Delta t = \frac{1}{2} m n \langle v_{x0}^2 \rangle S \Delta x = \frac{1}{2} P_0 \cdot S \Delta x. \quad (24)$$

Это же изменение энергии можно выразить через изменение абсолютной температуры газа:

$$\Delta E = \frac{3}{2} R \Delta T. \quad (25)$$

Приравнивая эти выражения, находим изменение температуры газа:

$$\Delta T = \frac{1}{3} \frac{P_0 \cdot S \Delta x}{R}. \quad (26)$$

Задача 3. Электромобиль.

Часть 1. Движение по твердой горизонтальной поверхности.

1.1 Запишем уравнения, описывающие движение электромобиля в установившемся режиме.

Первое. При движении с постоянной скоростью сила тяги, развиваемая двигателем, точно уравновешивает силу сопротивления воздуха, поэтому

$$kI = \beta v^2. \quad (1)$$

Второе. Так как при работе двигателя в его обмотке возникает неизвестная (или трудно рассчитываемая) ЭДС самоиндукции, то использовать закон Ома для определения силы тока в цепи невозможно. Поэтому вместо этого закона следует воспользоваться законом сохранения энергии: энергия, выдаваемая источником тока $U_0 I$, расходуется на теплоту, выделяющейся на резисторе $I^2 R$ и на работу по преодолению сил сопротивления $F_c v = \beta v^3$, следовательно:

$$U_0 I = I^2 R + \beta v^3. \quad (2)$$

Для того, чтобы получить систему уравнений в «безразмерном» виде, перепишем уравнения (1) – (2) для двух крайних случаев, описанных в условии задачи. При застопоренном двигателе скорость автомобиля равна нулю. В этом случае сила тока будет минимальна при максимальном сопротивлении резистора. Поэтому

$$I_1 = \frac{U_0}{R_{\max}} \Rightarrow R_{\max} = \frac{U_0}{I_1}. \quad (3)$$

Скорость электромобиля будет максимальна при нулевом сопротивлении резистора, в этом случае

$$\begin{aligned} U_0 I_0 &= \beta v_{\max}^3 \\ k I_0 &= \beta v_{\max}^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Выразим значения сопротивления резистора, скорости электромобиля и силы тока в цепи через указанные в условии безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} R &= x R_{\max} \\ v &= y v_{\max} \\ I &= z I_0 \end{aligned} \quad (5)$$

и подставим их в исходные уравнения. Тогда из уравнения (1) следует

$$kI = \beta v^2 \Rightarrow k I_0 z = \beta v_{\max}^2 y^2. \quad (6)$$

Тогда с учетом (4), получим

Теоретический тур. Вариант 1.

10 класс. Решения задач. Бланк для жюри.

$$z = y^2. \quad (7)$$

Подстановка (5) в уравнение (2) дает

$$U_0 I = I^2 R + \beta v^3 \Rightarrow U_0 I_0 z = I_0^2 R_{\max} z^2 x + \beta v_{\max}^3 y^3 \Rightarrow U_0 I_0 z = I_0^2 \frac{U_0}{I_1} z^2 x + \beta v_{\max}^3 y^3.$$

При учете соотношения (4), получаем окончательно

$$z = \frac{I_0}{I_1} z^2 x + y^3 \Rightarrow z^2 x + \gamma y^3 - \gamma z = 0 \quad (8)$$

Таким образом, уравнения (7) и (8) образуют искомую систему для расчета требуемых зависимостей.

1.2 Найти решение полученной системы довольно просто. Подставим значение z из уравнения (7) в уравнение (8):

$$y^4 x + \gamma y^3 - \gamma y^2 = 0 \quad (9)$$

После сокращения, получаем квадратное уравнение

$$y^2 x + \gamma y - \gamma = 0 \quad (10)$$

Положительный корень, которого равен:

$$y(x) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x}. \quad (11)$$

Заметим, что при $x \rightarrow 0$ $y \rightarrow 1$.

1.3 Зависимость $z(x)$ следует из уравнения (7):

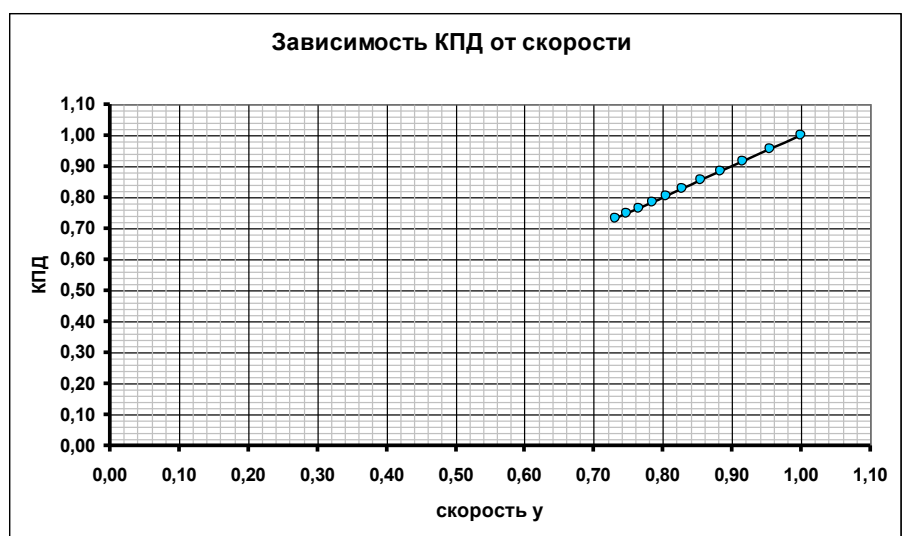
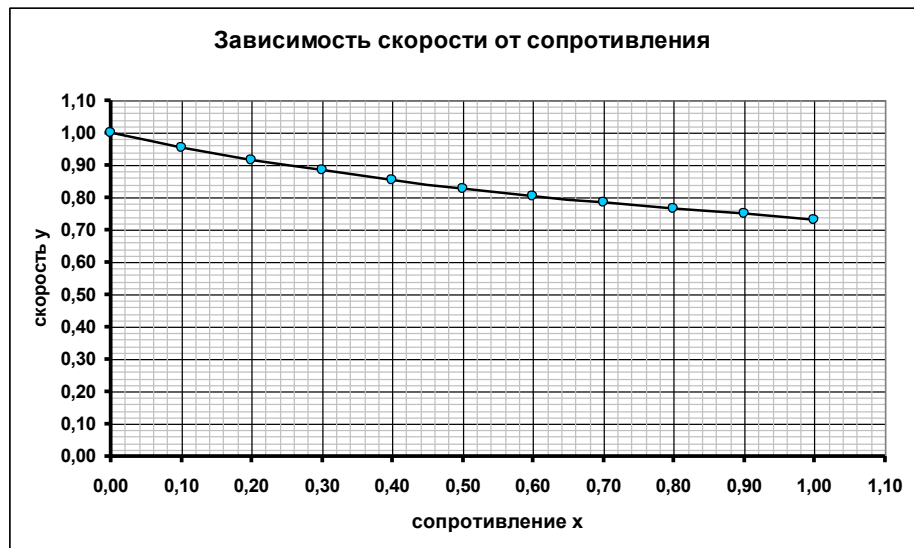
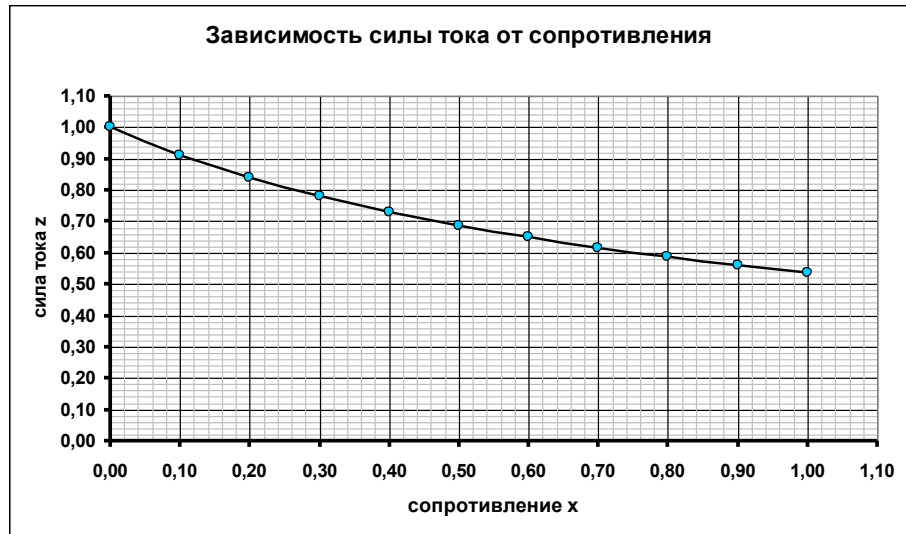
$$z(x) = y^2 = \left(\frac{\sqrt{\gamma^2 + 4\gamma x} - \gamma}{2x} \right)^2 \quad (12)$$

1.4 В данном случае под КПД следует понимать отношение мощности двигателя к мощности, развиваемой источником тока, поэтому

$$\eta = \frac{\beta v^3}{U_0 I} = \frac{\beta v_{\max}^3 y^3}{U_0 I_0 z} = \frac{y^3}{z} = y. \quad (13)$$

1.5 Необходимые расчеты по полученным формулам приведены в таблице, по которой построены требуемые графики.

Сопротивление, x	Скорость y	Сила тока, z	КПД, η
0,00	1,00	1,00	1,00
0,10	0,95	0,91	0,95
0,20	0,92	0,84	0,92
0,30	0,88	0,78	0,88
0,40	0,85	0,73	0,85
0,50	0,83	0,69	0,83
0,60	0,81	0,65	0,81
0,70	0,78	0,62	0,78
0,80	0,77	0,59	0,77
0,90	0,75	0,56	0,75
1,00	0,73	0,54	0,73



Часть 2. Движение электромобиля по ковру.

2.1 При появлении постоянной силы трения качения исходные уравнения преобразуются следующим очевидным образом:

$$kI = F_{mp.} + \beta v^2. \quad (14)$$

$$U_0 I = I^2 R + F_{mp.} v + \beta v^3. \quad (15)$$

Учитывая, что по условию $F_{mp.} = \varepsilon \beta v_{max}^2$, и проведя аналогичный переход к безразмерным уравнениям, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} z = \varepsilon + y^2 \\ z = \frac{1}{\gamma} z^2 x + \varepsilon y + y^3 \end{cases} \quad (16)$$

Когда электромобиль только начинает двигаться, его скорость еще равна нулю, поэтому и $y = 0$. Тогда из системы уравнений (16) легко найти:

$$\begin{cases} z = \varepsilon \\ z = \frac{1}{\gamma} z^2 x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\gamma}{\varepsilon} = 20 \quad (17)$$

Найденное значение больше максимального значения сопротивления резистора. Поэтому электромобиль сдвинется при любом возможном значении сопротивления резистора.

2.2 Как и ранее, максимальная скорость автомобиля будет достигаться при нулевом сопротивлении переменного резистора, т.е. при $x = 0$. В этом случае система (16) преобразуется к виду

$$\begin{cases} z = \varepsilon + y^2 \\ z = \varepsilon y + y^3 \end{cases} \Rightarrow \varepsilon + y^2 = \varepsilon y + y^3 \Rightarrow y = 1 \quad (18)$$

То есть максимальная скорость движения электромобиля при появлении силы трения качения не изменится.



Республиканская физическая олимпиада 2022 года (Заключительный этап)

Теоретический тур

Решения задач 11 класс (для жюри)

Уважаемые члены жюри!

Задачи, предложенные школьникам для решения на олимпиаде, не стандартные и достаточно сложные. Предложенные здесь варианты путей решений не являются единственно возможными. Участники олимпиады могут предложить свои способы решения. Если эти способы приводят к правильным ответам и физически обоснованы, то задача (или ее отдельные пункты) должны оцениваться максимальными баллами.

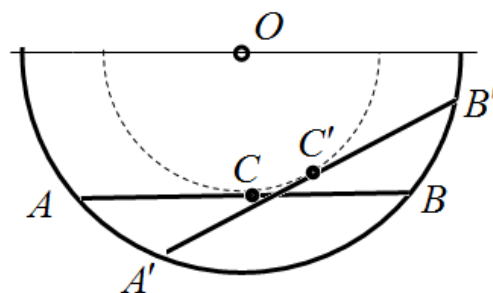
Не забывайте, что Вы должны оценивать не только конечные ответы, но и отдельные правильные шаги в ходе решения!



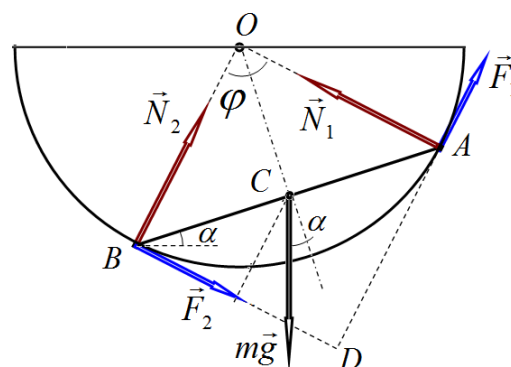
Не жалейте баллов (если, конечно, есть за что!) для наших замечательных школьников!

Задача 1. Иголka в сферическом бокале.

1. При смещении концов стержня по поверхности сферы центр стержня (он же центр масс) движется по дуге окружности, центр которой совпадает с центром сферической чаши. Следовательно, при горизонтальном расположении стержня его центр масс находится в нижнем положении, поэтому в этом случае потенциальная энергия стержня минимальна. Поэтому горизонтальное положение стержня есть положение устойчивого равновесия.



2. При отклонении стержня от горизонтального положения он стремится вернуться к положению равновесия. Это рассуждение позволяет определить направления сил трения \vec{F}_1 и \vec{F}_2 , действующих на концы стержня (см. рисунок). Направления сил реакции \vec{N}_1 и \vec{N}_2 однозначны: они направлены радиально и направлены к центру полусферы. Условия равновесия стержня традиционны: векторная сумма сил, действующих на стержень, равна нулю; сумма моментов этих сил также равна нулю.



Заметим, что все силы, действующие на стержень, лежат в одной плоскости. Поэтому можно записать только два независимых уравнения для суммы проекций сил, действующих на стержень. Так как сумма сил, действующих на стержень, равна нулю, то сумма моментов этих сил (которая равна нулю) не зависит от того, относительно какой точки рассматриваются эти силы. Поэтому можно записать только три независимых скалярных уравнения для определения действующих сил. Кроме того, в положении равновесия, когда стержень неподвижен, нельзя однозначно выразить силу трения через соответствующую силу нормальной реакции, так как в этом случае сила трения есть сила трения покоя. Поэтому связь между этими силами выражается неравенством:

$$F_{тр.} \leq \mu N. \quad (1)$$

Следовательно, все силы не определяются однозначно – их значения зависят от того, как способом стержень привели в положение равновесия. Таким образом, данная задача является недоопределенной: значения сил реакции и трения не определяются однозначно.

В такой ситуации мы можем определить только диапазоны, в которых могут лежать значения рассматриваемых сил. Для этого три из четырех неизвестных сил (две силы реакции и две силы трения) выразить через одну из них, а после этого, используя два неравенства (1) найти диапазоны изменения сил. Так как в вопросе 2, требуется определить пределы возможного изменения силы N_1 , то имеет смысл выразить остальные силы именно через модуль силы N_1 .

Как следует из рисунка, задача сильно упрощается благодаря тому, что угол $\varphi = 90^\circ$: силы реакции и силы трения направлены вдоль сторон квадрата $OADB$, длина стороны которого равна радиусу чаши. Для упрощения алгебраических выкладок будем записывать такие уравнения, в которые входят только \vec{N}_1 и одна из оставшихся неизвестных сил.

1) Запишем сумму моментов сил (и приравняем ее к нулю) относительно точки B :

Теоретический тур. Вариант 1.

11 класс. Решения задач. Бланк для жюри.

$$F_1 R + N_1 R - mg \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 \quad (2)$$

Выбор этого уравнения обусловлен тем, что в него входят только силы F_1 и N_1 , что позволяет сразу получить зависимость $F_1(N_1)$:

$$F_1 = mg \frac{l}{2R} \cos \alpha - N_1 = mg \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2}} - N_1. \quad (3)$$

2) Для установления связи между F_2 и N_1 спроецируем все силы на направление BD (сумма этих проекций также равна нулю)

$$F_2 + mg \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - N_1 = 0. \quad (4)$$

Из этого уравнения находим:

$$F_2 = N_1 - mg \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = N_1 - \frac{mg}{\sqrt{2}}(\cos \alpha - \sin \alpha). \quad (5)$$

3) Наконец, для определения силы реакции $N_2(N_1)$, запишем (и приравняем к нулю) сумму моментов сил относительно точки D :

$$N_2 R - N_1 R - mg \sin \alpha \frac{R}{\sqrt{2}} = 0. \quad (6)$$

В этом уравнении $\frac{R}{\sqrt{2}}$ - длина половины диагонали квадрата CD . Из уравнения (6) находим искомое соотношение

$$N_2 = N_1 + \frac{mg}{\sqrt{2}} \sin \alpha. \quad (7)$$

Как следует из полученных формул, все рассмотренные силы пропорциональны силе тяжести, поэтому дальнейший анализ удобно (но не обязательно) проводить, считая единицей измерения силы величину $\frac{mg}{\sqrt{2}}$. В этом случае введем относительные величины сил:

$$f_1 = \frac{F_1 \sqrt{2}}{mg} = \cos \alpha - n_1$$
$$f_2 = \frac{F_2 \sqrt{2}}{mg} = n_1 - (\cos \alpha - \sin \alpha). \quad (8)$$

$$n_2 = n_1 + \sin \alpha$$

Вспользуемся теперь неравенствами (2), устанавливающими связь между силами трения и нормальной реакции. При равновесии в верхней точке A выполняется соотношение

$$f_1 < \mu n_1 \quad (9)$$

Из которого с учетом выражений (8) следует:

$$\cos \alpha - n_1 < \mu n_1 \Rightarrow n_1 > \frac{\cos \alpha}{1 + \mu} \quad (10)$$

Аналогично для нижней точки стержня B :

$$f_2 < \mu n_2 \quad (11)$$

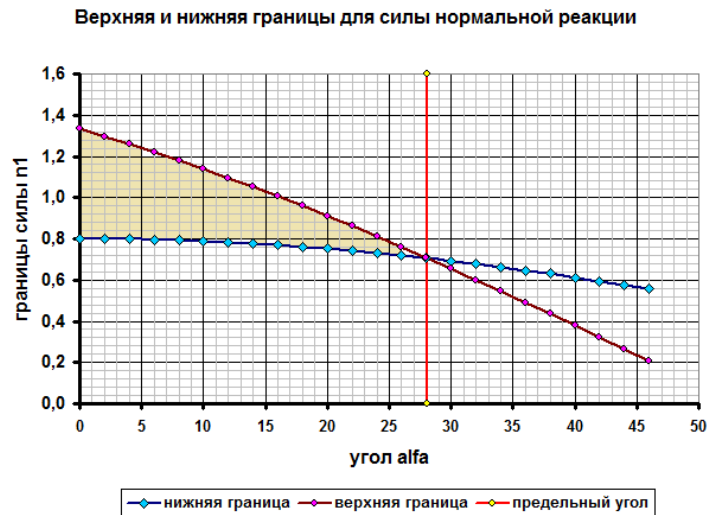
Откуда следует:

$$n_1 - (\cos \alpha - \sin \alpha) < \mu(n_1 + \sin \alpha) \Rightarrow n_1 < \frac{\cos \alpha}{1 - \mu} - \sin \alpha. \quad (12)$$

Таким образом, в положении равновесия сила нормальной реакции может лежать в интервале

$$\frac{mg \cos \alpha}{\sqrt{2} (1 + \mu)} \leq N_1 \leq \frac{mg}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos \alpha}{1 - \mu} - \sin \alpha \right). \quad (13)$$

На рисунке показаны графики зависимостей верхней и нижней границ возможных значений силы нормальной реакции n_1 (определяемые формулами (10) и (12)) от угла α . На этом графике выделена область возможных значений силы нормальной реакции. Из этого рисунка следует, что существует точка пересечения графиков границ, которая и соответствует максимально возможному углу наклона стержня в положении равновесия.



3. Для определения максимального угла следует решить уравнение:

$$\frac{\cos \alpha}{1 - \mu} - \sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \mu}. \quad (14)$$

Из этого уравнения находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\mu}{1 - \mu^2} \approx 0,53. \quad (15)$$

Или $\alpha = 28^\circ$. Таким образом стержень может находиться в состоянии равновесия при $\alpha < 28^\circ$. (16)

Задача 2. Гитарная струна.

Часть 1. Бегущие и стоячие волны на струне.

1.1 Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, описывающие волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении оси x , имеют вид

$$\begin{aligned}u_1(x, t) &= U_0 \cos(\omega t - kx) \\ u_2(x, t) &= U_0 \cos(\omega t + kx),\end{aligned}\quad (1)$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число.

1.2 Результатом сложения этих волн является волна, описываемая функцией

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t - kx) + U_0 \cos(\omega t + kx) = 2U_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right). \quad (2)$$

Эта функция описывает стоячую волну.

1.3 Скорость волны может быть представлена в виде

$$c = \lambda v = \frac{\lambda \omega}{2\pi}. \quad (3)$$

Часть 2. Колебания закрепленной струны.

2.1 Функция, описывающая данный тип колебаний имеет вид

$$u(x, t) = U_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right). \quad (4)$$

2.2 Если зависимость смещения точек струны от времени имеет вид (4), то зависимость их скоростей от времени задается функцией

$$v(x, t) = -U_0 \omega \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right) = v_0 \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right). \quad (5)$$

Выделим на струне небольшой участок длиной Δx , положение которого определяется координатой x . Кинетическая энергия этой малой части струны равна

$$\Delta E = \frac{\rho \Delta x}{2} v^2(x) = \frac{\rho \Delta x}{2} v_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2a} x\right). \quad (6)$$

Кинетическая энергия всей струны рассчитывается как сумма кинетических энергий всех ее участков:

$$E = \sum_i \frac{\rho \Delta x}{2} v_0^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2a} x_i\right) = \frac{\rho v_0^2}{2} \sum_i \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(2 \frac{\pi}{2a} x_i\right)\right) \Delta x = \frac{\rho v_0^2}{2} a. \quad (7)$$

При вычислении суммы учтено, что сумма длин всех участков равна длине струны $\sum_i \Delta x = 2a$. Второе слагаемое обращается в ноль, так как в рассматриваемом интервале x косинус принимает как положительные, так и отрицательные значения.

2.3 Так как сила изменением силы натяжения струны рекомендовано пренебречь, то потенциальная энергия изогнутой струны равна работе по растяжению струны:

$$W = T\Delta l = T. \quad (8)$$

Используя формулу для длины струны, приведенную в «Математической подсказке», получаем выражение для потенциальной энергии струны

$$W = T\Delta l = \frac{\pi^2 T}{8a} u_0^2. \quad (9)$$

2.4 Запишем уравнения закона сохранения механической энергии для всей струны

$$\frac{\rho a}{2} v_0^2 + \frac{\pi^2 T}{8a} u_0^2 = const. \quad (10)$$

Это уравнение есть уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{\frac{\pi^2 T}{8a}}{\frac{\rho a}{2}}} = \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (11)$$

2.5 Рассматриваемое колебание можно рассматривать как стоячую волну, описываемую функцией (4). Сравнивая эту функцию с функцией (2), находим, что данное колебание есть сумма двух бегущих волн с длиной волны

$$\lambda = 4a. \quad (12)$$

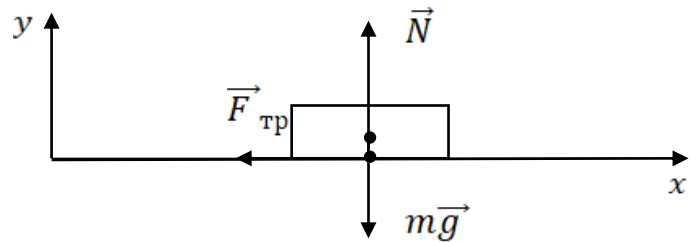
Поэтому можно использовать формулу (3) для скорости бегущей волны, в результате чего получим

$$c = \frac{\lambda \omega}{2\pi} = \frac{4a \cdot \frac{\pi}{2a} \sqrt{\frac{T}{\rho}}}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (13)$$

Задание 3. «Блинчики» на воде.

Часть 1. Отскок от земли

1.1. При ударе на камень действуют три силы: тяжести $m\vec{g}$, нормальной реакции \vec{N} и трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Сила трения в данном случае является силой трения скольжения и определяется по закону Кулона-Амонтона: $F_{\text{тр}} = \mu N$.



На основании второго закона Ньютона для процесса соударения можем записать следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta p_y}{\Delta t} &= N - mg \\ \frac{\Delta p_x}{\Delta t} &= -\mu N \end{aligned} \quad (1)$$

Учитывая упругость удара и пренебрегая импульсом силы тяжести перепишем (1) в виде

$$\begin{aligned} 2mv_0 \sin \alpha &= N\Delta t \\ m(v_0 \cos \alpha - v'_x) &= \mu N\Delta t \end{aligned} \quad (2)$$

где v' – скорость тела после удара. Избавляясь от $N\Delta t$, получим $v'_x = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha)$. Теперь не составляет труда найти модуль конечной скорости и угол β :

$$\begin{aligned} v' &= \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha) \\ \beta &= \arctg\left(\frac{v'_y}{v'_x}\right) = \arctg\left(\frac{\text{tg} \alpha}{1 - 2\mu \text{tg} \alpha}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что при $\mu > \frac{\text{ctg} \alpha}{2}$ шарик отскочит вертикально ($\beta = \frac{\pi}{2}$) с конечной скоростью $v' = v_0 \sin \alpha$.

Часть 2. Отскок от воды

2.1. Проекция результирующей силы на ось Z , действующей на камень, определяется соотношением

$$F_z = -Mg + \rho v^2 S (C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta). \quad (4)$$

Воспользуемся приближениями, указанными в условии задачи. Поскольку скорость камня меняется незначительно, в (4) заменим v на v_0 . Для удобства введём обозначение

$C_z = C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta$. Площадь поверхности камня, соприкасающаяся с водой, с учётом указанного в условии приближения, определяется уравнением

$$S = a|z|. \quad (5)$$

С учётом указанных замечаний перепишем (4) в виде (6):

$$F_z = -Mg + \rho C_z v_0^2 a |z|. \quad (6)$$

Воспользовавшись вторым законом Ньютона, получим

$$Ma_z = -Mg + \rho C_z v_0^2 a |z|. \quad (7)$$

Раскрыв модуль ($|z| = -z$) и разделив уравнение (7) на массу камня, получим уравнение движения

$$a_z = -g - \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M} z. \quad (8)$$

Проекция результирующей силы на ось X, действующей на камень, определяется соотношением

$$F_x = -\rho v^2 S (C_n \sin \beta + C_\tau \cos \alpha). \quad (9)$$

Сделав пренебрежения, аналогичные п. 2.1 и введя обозначение $C_x = C_n \sin \beta + C_\tau \cos \beta$, пользуясь формулой (5) получим

$$Ma_x = \rho C_x v_0^2 a z. \quad (10)$$

2.2. Сравнивая проекции сил сопротивления воды в (7) и (10), получим $F_{Bx} = -\frac{C_x}{C_z} F_{Bz}$. Таким образом

$$\mu = \frac{C_x}{C_z} = \frac{C_n \sin \beta + C_\tau \cos \beta}{C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta}.$$

2.3. Перепишем уравнение (8) в виде

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 z = -g, \quad (11)$$

где $\omega_0^2 = \frac{\rho C_z v_0^2 a}{M}$. Очевидно (11) – уравнение гармонических колебаний с циклической частотой ω_0 , при этом положение равновесия смещено относительно $z = 0$.

Будем искать решение уравнения (11) в виде (12):

$$z(t) = z_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (12)$$

где z_0 имеет смысл координаты положения равновесия, а A – амплитуды колебаний.

Первая и вторая производные по времени от (12) имеют смысл вертикальных компонент скорости и ускорения камня соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)\end{aligned}$$

Подставим $z(t)$ в виде (12) в уравнение (11):

$$-A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_0\omega_0^2 + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -g,$$

откуда $z_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$.

Для нахождения амплитуды и начальной фазы колебаний воспользуемся начальными условиями: $z(0) = 0$, $\frac{dz}{dt}|_{t=0} = -v_0 \sin \alpha$:

$$\begin{aligned}0 &= -\frac{g}{\omega_0^2} + A \cos \varphi, \\ -v_0 \sin \alpha &= -A\omega_0 \sin \varphi\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}A &= \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}}, \\ \varphi &= \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right).\end{aligned}\tag{13}$$

Окончательно

$$z(t) = -\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \cos \left(\omega_0 t + \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \right).\tag{14}$$

2.4. Время соударения t_0 является корнем уравнения $z(t_0) = 0$. Одним из корней данного уравнения является начальный момент времени $t = 0$, при котором фаза колебаний равна начальной фазе φ . Ясно, что и в момент времени t_0 косинус в выражении (14) будет принимать то же значение, что и в начальный момент. Тогда фаза колебаний в момент времени t_0 равна $2\pi - \varphi$:

$$\omega_0 t_0 + \varphi = 2\pi - \varphi$$

Из последнего уравнения находим выражение для времени соударения:

$$t_0 = \frac{2\pi - 2\varphi}{\omega_0}.\tag{15}$$

2.5. Для указанных в условии параметров $\omega_0 \approx 4,93 \cdot 10^2 \text{ с}^{-1}$, $\varphi \approx 89,3^\circ$. Близость начальной фазе к 90° позволяет нам утверждать, что $z_0 \ll A$ и движение камня в воде происходит приблизительно половину периода колебаний, т.е.

$$t_0 \approx \frac{\pi}{\omega_0} \approx 6,4 \text{ мс.} \quad (16)$$

Расстояние l_0 с учётом малого изменения скорости камня находится как

$$l_0 \approx v_0 \cos \alpha t_0 \approx 6,3 \text{ см.} \quad (17)$$

2.6. Проекция результирующей силы на ось X, действующей на камень, определяется соотношением (10). Подставляя сюда зависимость $z(t)$ из (12), получим

$$F_x = \rho v_0^2 a C_x \left(-\frac{g}{\omega_0^2} + \frac{g}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \cos \left(\omega_0 t + \arctg \left(\frac{\omega_0 v_0 \sin \alpha}{g} \right) \right) \right). \quad (18)$$

Заметим, что для указанных параметров $z_0 \ll A$ и $\varphi \approx 90^\circ$, поэтому

$$F_x = -\frac{\rho g v_0^2 a C_x}{\omega_0^2} \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \sin \omega_0 t.$$

Тогда уравнение движения камня вдоль оси X с учётом выражения для ω_0 имеет вид

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{C_x}{C_z} Mg \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \sin \omega_0 t. \quad (19)$$

Для вычисления средней силы воспользуемся подсказкой в условии:

$$\langle F_x \rangle = -\frac{C_x}{C_z} Mg \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \langle \sin \omega_0 t \rangle_{t \in [0, \frac{\pi}{\omega_0}]} = -\frac{2C_x}{\pi C_z} Mg \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2}} \approx -77,8 \text{ Н.}$$

2.7. Камень может не отскочить от воды по двум причинам: в процессе соударения камень полностью опустится под воду, после чего наша модель перестает адекватно описывать процесс соударения. Камень при этом утонет. Вторая причина – полная потеря горизонтальной компоненты импульса в процессе удара. Запишем данные условия в виде уравнений:

$$\begin{aligned} |z_{\max}| &< \frac{S_0}{a} \\ \langle F_x \rangle t_0 &< M v_0 \cos \alpha \end{aligned} \quad (20)$$

Для параметров, приведенных в условии $|z_{\min}| = 3,5 \text{ мм}$, $\frac{S_0}{a} = 1,7 \text{ см}$, $|\langle F_x \rangle| t_0 = 0,50 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$,

$Mv_0 \cos \alpha = 0,98 \text{ кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Таким образом, оба условия выполняются и камень отскакивает от воды.

Горизонтальную компоненту скорости после определяется как

$$v'_x = \frac{Mv_0 \cos \alpha + \langle F_x \rangle t_0}{M} \approx 4,89 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Поскольку вертикальная компонента скорости не меняется по модулю, нетрудно найти конечную скорость и угол отскока γ :

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v_x'^2 + (v_0 \sin \alpha)^2} \approx 5,19 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$
$$\gamma = \arctg\left(\frac{v_0 \sin \alpha}{v'_x}\right) \approx 19,6^\circ \quad (21)$$

2.8. Вычислим коэффициент μ из п. 2.2. и подставим в формулу (3), определяющую конечную скорость и угол отскока тела от твёрдой поверхности:

$$\mu = \frac{C_n \sin \beta + C_\tau \cos \beta}{C_n \cos \beta - C_\tau \sin \beta} \approx 1,43,$$

$$v' = v_0(1 - 2\mu \sin \alpha) \approx 5,03 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$
$$\gamma = \arctg\left(\frac{\text{tg} \alpha}{1 - 2\mu \text{tg} \alpha}\right) \approx 19,6^\circ \quad (22)$$

Сравнивая значения (21) и (22) можно заключить, что в данной модели вода действительно ведёт себя как твёрдое тело.