

Решения задач.

9 класс.

Задание 1. «Плодотворная дебютная идея»

Задача 1.1

Отличие Минска от Лондона заключается в нумерации этажей. В Беларуси она начинается с первого этажа, поэтому, когда бабушка поднялась на второй этаж, она преодолела подъем в один этаж. Для подъема на 4 этаж ей надо преодолеть 3 этажа, на что потребуется время – 3 минуты. В Англии нумерация начинается с нулевого этажа (нижний – *ground floor*). Поэтому, поднявшись на второй этаж, бабушка поднялась на два этажа за одну минуту, а для того, чтобы подняться на 4 этаж, ей надо подняться на 4 этажа, на что потребуется времени в два раза больше, т.е. 2 минуты.

Задача 1.2

Если масса вынутого грунта будет равна массе здания, то нижележащие слои не будут испытывать никакой дополнительной нагрузки при возведении здания. Из этого условия легко определить:

$$m = \rho Sh \Rightarrow h = \frac{m}{\rho S}. \quad (1)$$

Задача 1.3

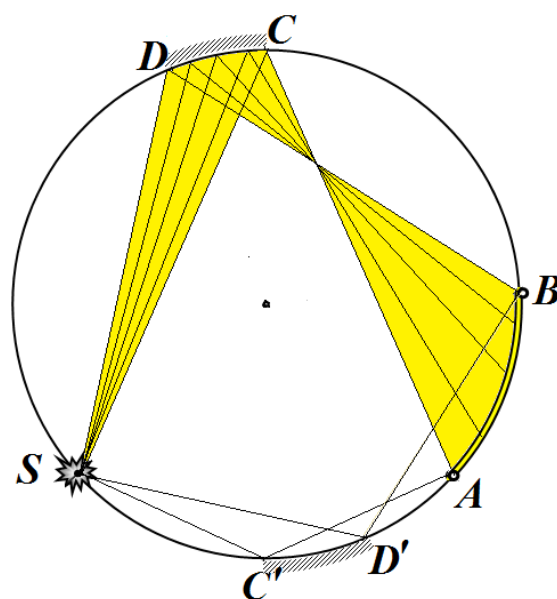
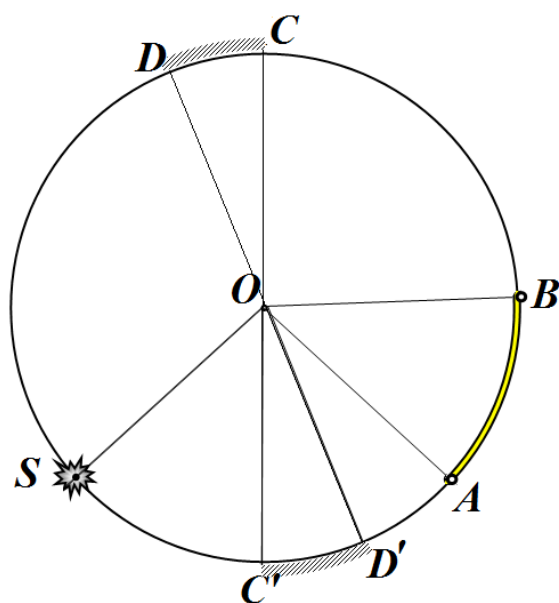
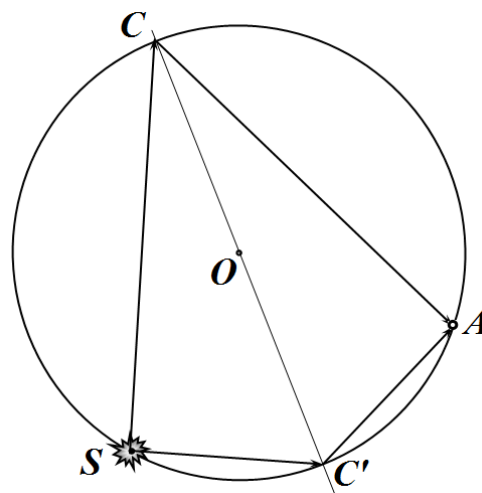
Легко сообразить, что величина обратная времени между регистрациями $\frac{1}{\tau}$ имеет смысл среднего числа частиц, попадающих в счетчик за единицу времени (интенсивность потока). Понятно, что именно интенсивности потоков необходимо складывать: если первый источник посылает в единицу времени $\frac{1}{\tau_1}$ частиц, а второй – $\frac{1}{\tau_2}$ частиц, то вместе они посылают $\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}$ частиц. Поэтому среднее время между частицами в этом случае будет определяться по формуле

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \Rightarrow \tau = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} = 6,0 \text{мс} \quad (2)$$

Можно предложить еще одно наглядное решение этой задачи. Вместо частиц рассмотрим автобусы: автобусы одного маршрута следуют со средним интервалом 10 минут, второго с интервалом 15 минут. Чему равен средний интервал между автобусами двух маршрутов? Решение: за одну минуту приходит 1/10 автобуса первого маршрута и 1/15 автобуса второго. Всего за минуту приходит $1/10 + 1/15 = 5/30 = 1/6$ часть автобуса. Следовательно, чтобы пришел «целый» автобус необходимо ждать 6 минут.

Задача 1.4

Сначала разберемся с ходом световых лучей при отражении от зеркала. Пусть луч от источника S попадает в точку C (в области зеркала), отражается от нее и попадает на стенку в точке A . По закону отражения света угол падения равен углу отражения. Нормалью к точке падения является радиус, поэтому углы $\angle SCO$ и $\angle OCA$ равны. Следовательно, точка, в которой произошло отражение, делит дугу SA на две равные части. Заметим, что в точку A луч может попасть, отразившись и в точке C' симметричной точке C . Поэтому данная задача имеет два решения!



Края освещенной части соответствуют лучам, отраженным от краев зеркальной части. Это позволяет найти края зеркала: делим дуги SA пополам, находим точки C и C' ; делим дуги SB - находим точки D и D' . Эти точки являются краями зеркал DC и $D'C'$ - который являются двумя возможными решениями данной задачи. На левом рисунке показан ход лучей от верхнего зеркала, важно отметить, что все отраженные лучи пересекаются в одной точке.

Задача 9-2. Полоса препятствий.

Часть 1. Полоса неподвижна.

1.1 При движении шайбы по шероховатой полосе на нее действует сила трения, модуль которой равен

$$F = \mu mg, \quad (1)$$

и направленная противоположно вектору скорости.

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (2)$$

Модуль ускорения шайбы постоянен и равен

$$a = \mu g. \quad (3)$$

Так сила трения направлена вдоль той же прямой, что вектор скорости движение шайбы будет прямолинейным, а так как ускорение постоянно, то движение будет равноускоренным. При минимальной начальной скорости, при которой шайба преодолет полосу, шайба остановится на противоположном краю полосы. Для расчета значения этой скорости можно воспользоваться известной кинематической формулой

$$S = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow d = \frac{v_{0\min}^2}{2\mu g}. \quad (4)$$

Из которой находим

$$v_{0\min} = \sqrt{2\mu g d} = 4,4 \frac{M}{c}. \quad (5)$$

Этот же результат может быть получен из теоремы о кинетической энергии (изменение энергии равно работе внешних сил):

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgd \quad (4^*)$$

1.2 Так как шайба движется прямолинейно и с постоянным ускорением, то при движении по полосе закон ее движения имеет вид

$$x = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2. \quad (6)$$

Если начальная скорость шайбы меньше найденной скорости $v_{0\min}$, то в некоторый момент времени t_1 шайба остановится. Этот момент времени легко найти с помощью выражения для скорости шайбы при равноускоренном движении

$$v = v_0 - \mu g t \quad (7)$$

Полагая $v = 0$, находим

$$0 = v_0 - \mu g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{\mu g} \quad (8)$$

Координату шайбы в момент остановки можно определить по формуле

$$x_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (9)$$

Таким образом, в этом случае ($v < v_{0\min}$) закон движения шайбы имеет вид:

$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2, & t < \frac{v_0}{\mu g} \\ x = \frac{v_0^2}{2\mu g}, & t < \frac{v_0}{\mu g} \end{cases} \quad (10)$$

Если скорость шайбы превышает $v_{0\min}$, то шайба преодолет шероховатую полосу. На этой полосе закон движения шайбы также будет иметь вид (6). Но в этом случае после преодоления шероховатой полосы шайба будет иметь скорость, определяемую по формуле

$$S = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow d = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2\mu g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} \quad (11)$$

Шайба выедет с полосы в момент времени t_1 , который легко найти из закона изменения скорости шайбы (7):

$$v_1 = v_0 - \mu g t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0 - v_1}{\mu g} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d}}{\mu g} \quad (12)$$

Эту же формулу можно получить как решение квадратного уравнения, следующего из закона движения шайбы (6), только при таком подходе необходимо правильно выбрать меньший корень.

Далее шайба будет двигаться равномерно со скоростью v_1 .

Полностью закон движения шайбы описывается выражениями

$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{\mu g}{2} t^2, & t < t_1 \\ x = v_1 (t - t_1), & t > t_1 \end{cases} \quad (13)$$

Где значения величин t_1 и v_1 определяются формулами (11) и (12).

Шайба достигнет края гладкой полосы в момент времени

$$t_2 = t_1 + \frac{d}{v_1} \quad (14)$$

1.3 При начальной скорости $v_0 = 5,0 \frac{M}{c}$ шайба достигнет края шероховатой полосы, поэтому

закон движения шайбы описывается формулами (13).

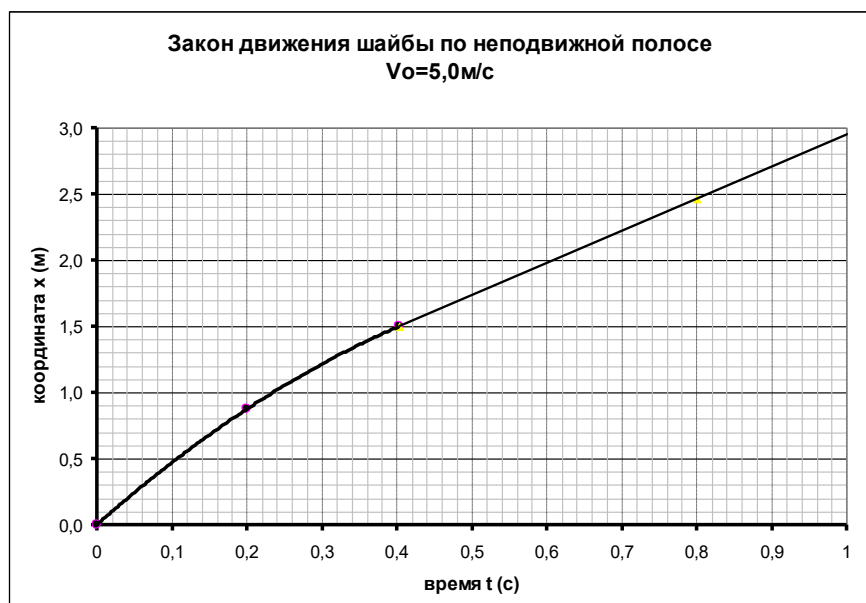
Численный расчет параметров этой зависимости дает следующие значения:

- шайба достигнет края шероховатой полосы в момент времени $t_1 = 0,40 c$;

- скорость шайбы в этот момент времени $v_1 = 2,4 \frac{M}{c}$;

- достигнет края гладкой полосы в момент времени $t_2 = 1,0 c$.

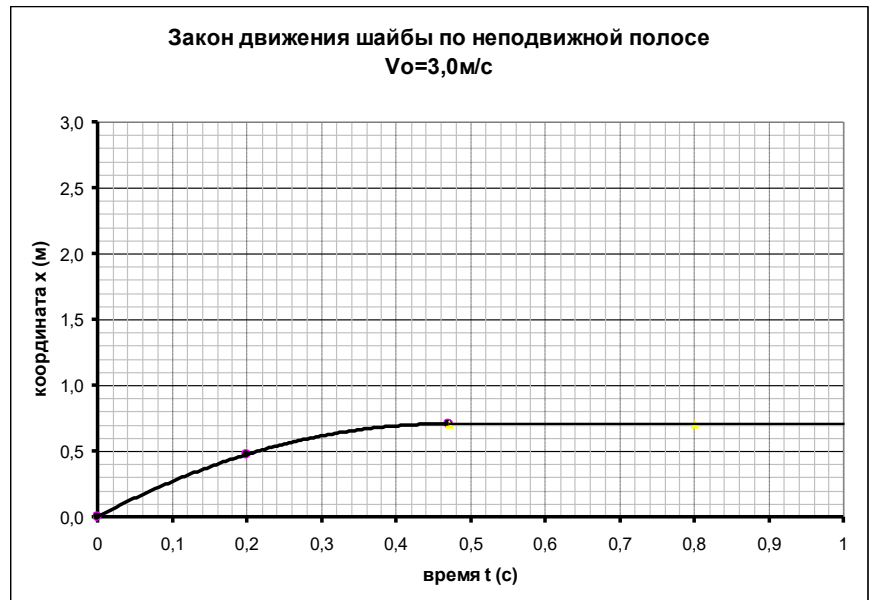
График этой зависимости показан на рисунке.



При начальной скорости $v_0 = 3,0 \frac{M}{c}$

- шайба остановится на шероховатой полосе в точке с координатой $x_1 = 0,71M$;
- это произойдет в момент времени $t_1 = 0,47c$,
- далее шайба будет покоиться.

График этой зависимости также показан на рисунке.



Часть 2. Движущаяся полоса.

2.1 Сила трения направлена в сторону противоположную скорости относительно движущейся полосы. Эта относительная скорость равна

$$\vec{V} = \vec{v}_0 - \vec{u}. \quad (15)$$

Этот вектор направлен под углом α к оси x . Угол α легко находится из очевидного соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0}{u}. \quad (16)$$

Вектор ускорения направлен противоположно вектору \vec{V} , его модуль, как и ранее, равен $a = \mu g$. Проще всего описать движение шайбы в системе отсчета, связанной с лентой. В этой системе отчета шайба движется по прямой, направленной вдоль вектора \vec{V} . Чтобы шайба преодолела шероховатую полосу, для начальной скорости должно выполняться условие

$$\frac{d}{\cos \alpha} = \frac{V^2}{2\mu g} \quad (17)$$

Из этого соотношения следует уравнение для определения минимальной начальной скорости шайбы:

$$\frac{d\sqrt{v_0^2 + u^2}}{v_0} = \frac{v_0^2 + u^2}{2\mu g} \quad (18)$$

Это уравнение приводится к биквадратному уравнению:

$$v_0 \sqrt{v_0^2 + u^2} = 2\mu g d \Rightarrow v_0^4 + v_0^2 u^2 - (2\mu g d)^2 = 0 \Rightarrow v_0^2 = \frac{-u^2 + \sqrt{u^4 + 4(2\mu g d)^2}}{2} \Rightarrow v_{0\min} = \sqrt{\frac{\sqrt{u^4 + 4(2\mu g d)^2} - u^2}{2}} = 4,0 \frac{M}{c} \quad (19)$$

2.2 В неподвижной системе отсчета движение шайбы является равноускоренным, закон движения шайбы имеет вид

$$\begin{cases} x = v_0 t - \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t^2 \\ y = \frac{\mu g \sin \alpha}{2} t^2 \end{cases} \quad (20)$$

При начальной скорости $v_0 = 5,0 \frac{м}{с}$ шайба преодолет шероховатую полосу.

При этом значении начальной скорости угол $\alpha \approx 27^\circ$. $\sin \alpha = 0,45$ $\cos \alpha = 0,89$

Шайба достигнет края полосы в момент времени t_1 , который можно найти из уравнения

$$\begin{aligned} d = v_0 t_1 - \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t_1^2 &\Rightarrow \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t_1^2 - v_0 t_1 + d = 0 \\ t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2d\mu g \cos \alpha}}{\mu g \cos \alpha} &= 0,38с \end{aligned} \quad (21)$$

Далее шайба будет двигаться прямолинейно.

В этот момент времени координаты шайбы будут равны

$$\begin{cases} x_1 = d = 1,5м \\ y_1 = \frac{\mu g \sin \alpha}{2} t_1^2 = 0,21м \end{cases} \quad (22)$$

Проекции скорости шайбы на оси координат в момент пересечения полосы будут равны (эти формулы следуют из закона движения (20)):

$$\begin{cases} v_x = v_0 - \mu g \cos \alpha \cdot t_1 = 2,8м/с \\ v_y = \mu g \sin \alpha \cdot t_1 = 1,1м/с \end{cases} \quad (23)$$

Далее шайба будет двигаться прямолинейно, закон ее движения будет описываться формулами

$$\begin{cases} x = x_1 + v_x (t - t_1) \\ y = y_1 + v_y (t - t_1) \end{cases}$$

Траектория шайбы в этом случае показана на рисунке.



При начальной скорости $v_0 = 3,0 \frac{м}{с}$ шайба не пересечет шероховатую полосу.

В этом случае $\alpha \approx 40^\circ$. $\sin \alpha = 0,64$ $\cos \alpha = 0,77$

При движении по ленте ее закон движения также описывается функциями (20).

Шайба прекратит скольжение по ленте, когда ее компонента скорости v_x обратится в нуль.

Это произойдет в момент времени

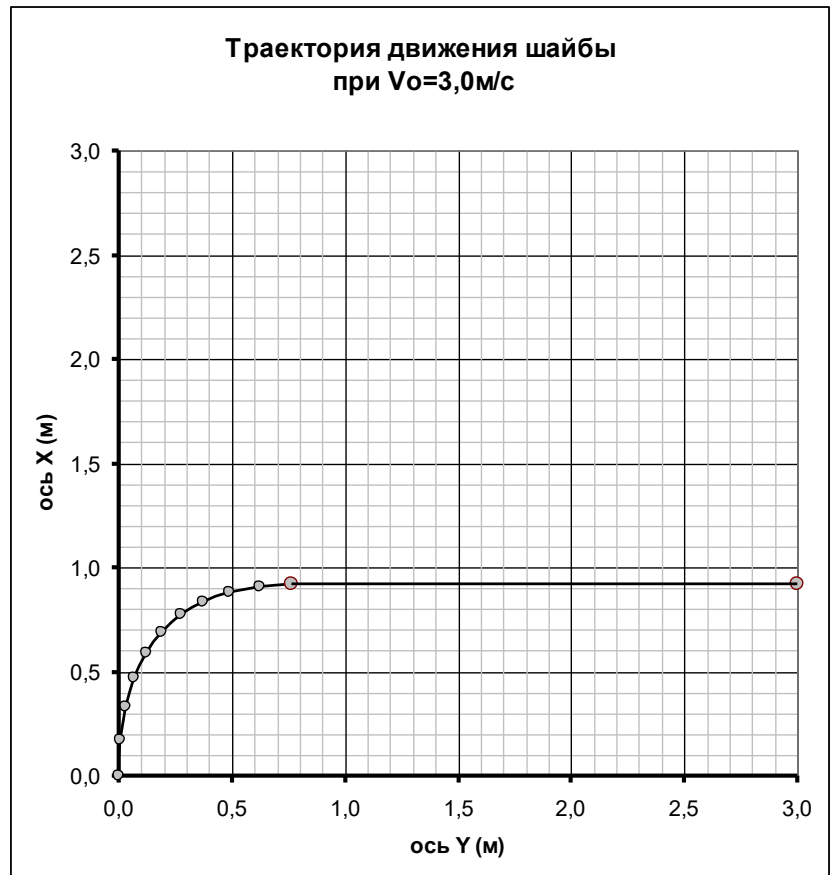
$$v_x = v_0 - \mu g \cos \alpha \cdot t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{\mu g \cos \alpha} = 0,61c.$$

В этот момент координаты шайбы будут равны

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1 - \frac{\mu g \cos \alpha}{2} t_1^2 = 0,92m \\ y_1 = \frac{\mu g \sin \alpha}{2} t_1^2 = 0,77m \end{cases}$$

Далее шайба будет двигаться вдоль оси y со скоростью ленты.

Траектория шайбы в этом случае показана на рисунке.



Задача 9-3 Напряжения

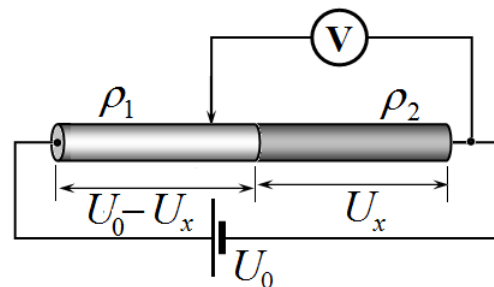
Часть 1. Электрическое напряжение.

1.1 Так как сила тока в любом поперечном сечении стержня постоянна, то напряжение будет изменяться по линейному закону. Причем при $x = 0$ напряжение равно напряжению источника U_0 , при $x = L$ напряжение становится равным нулю. Этим условиям удовлетворяет линейная функция

$$U = U_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (1)$$

1.2 В пределах каждого стержня напряжение меняется по линейному закону. Поэтому для построения графика необходимо найти напряжение на втором стержне, которое мы обозначим U_x . Тогда напряжение на первом стержне будет равно $(U_0 - U_x)$. Значения сил токов в обоих стержнях одинаковы, что выражается уравнением

$$\frac{U_0 - U_x}{\rho_1 \frac{L}{2} S} = \frac{U_x}{\rho_2 \frac{L}{2} S}. \quad (2)$$

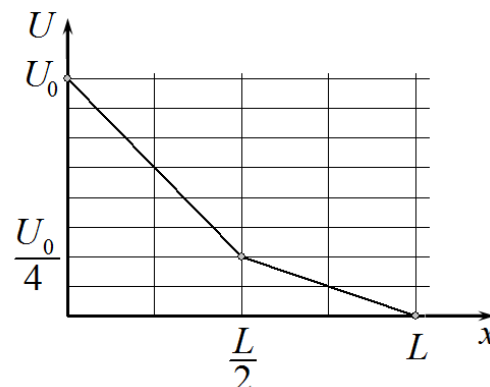


Принимая во внимание отношение между удельными сопротивлениями стержней, из уравнения (2) получаем

$$U_0 - U_x = \frac{\rho_1}{\rho_2} U_x = 3U_x \Rightarrow U_x = \frac{U_0}{4}. \quad (2)$$

Таким образом, на участке $x \in \left[0, \frac{L}{2} \right]$ напряжение линейно уменьшается от U_0 до $\frac{U_0}{4}$, а на участке

$x \in \left[\frac{L}{2}, L \right]$ падает до нуля. График этой функции показан на рисунке.



Часть 2. «Температурное» напряжение.

Решение этой части задачи полностью аналогично решению части 1.

2.1 В установившемся режиме поток теплоты через любое поперечное сечение стержня постоянен, поэтому зависимость температуры стержня от координаты линейна и описывается функцией

$$t = t_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right). \quad (3)$$

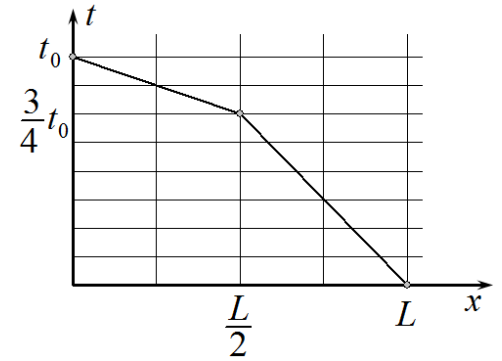
2.2 В пределах каждого цилиндра температура изменяется по линейному закону. Для определения температуры на стыке цилиндров запишем условие равенства потоков в обоих цилиндрах

$$\gamma_1 \frac{t_0 - t_x}{L/2} S = \gamma_2 \frac{t_x}{L/2} S. \quad (4)$$

Из этого уравнения находим

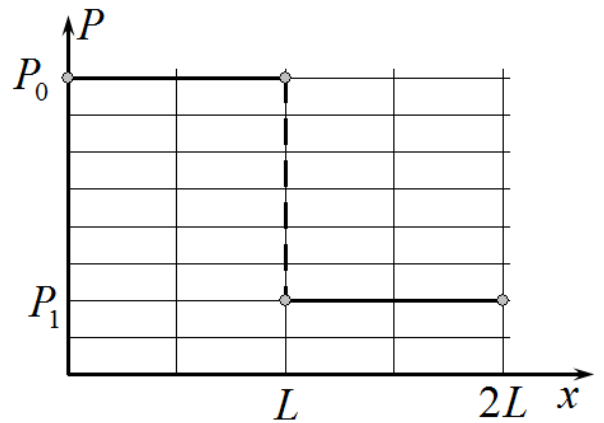
$$t_0 - t_x = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} t_x = \frac{1}{3} t_x \Rightarrow t_x = \frac{3}{4} t_0. \quad (5)$$

График зависимости температуры от координаты показан на рисунке.



Часть 3. «Жидкое» напряжение.

3.1 При движении идеальной жидкости отсутствуют силы вязкого трения, поэтому при ее движении по трубе постоянного сечения нет необходимости прикладывать к жидкости внешнюю силу. Следовательно, в этом случае давление жидкости в трубе является постоянным. Однако, при перетекании жидкости из трубы одного сечения в трубу другого сечения изменяется скорость течения жидкости. Таким образом, на участке переменного сечения должна действовать сила давления, которая сообщает жидкости ускорение и изменяет ее скорость. Эта сила создается скачком давления на стыке труб. Из этих рассуждений следует, что в левой части трубы давление равно P_0 , а во второй - P_1 . График такой зависимости показан на рисунке.



Для того, чтобы найти расход жидкости необходимо связать скачок давления со скоростями жидкости. Для установления этой связи проще всего рассмотреть изменение энергии жидкости при ее перетекании из одной трубы в другую.

Мысленно выделим два сечения в обеих частях трубы. Пусть в левой части трубы это сечение сместилось на расстояние Δx_1 , а в правой части - Δx_2 . Так как жидкость не сжимаема, то эти смещения связаны очевидным соотношением (условие постоянства объема):

$$S_1 \Delta x_1 = S_2 \Delta x_2. \quad (6)$$

Если разделить данное соотношение на интервал времени, в течение которого произошло рассматриваемое смещение, получим аналогичное соотношение для скоростей жидкости в обеих частях трубы

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (7)$$

При смещении жидкости силы давления совершили работу

$$A_p = P_0 S_1 \Delta x_1 - P_1 S_2 \Delta x_2 = (P_0 - P_1) S_1 \Delta x_1 \quad (8)$$

При этом масса жидкости, равная $\Delta m = \rho S_1 \Delta x_1$, изменила свою скорость от v_1 до v_2 . Изменение кинетической энергии этой жидкости равно работе сил давления, поэтому

$$\frac{\rho S_1 \Delta x_1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = (P_0 - P_1) S_1 \Delta x_1 \Rightarrow \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = (P_0 - P_1) \quad (9)$$

Отметим, что полученное соотношение называется уравнением Бернулли.

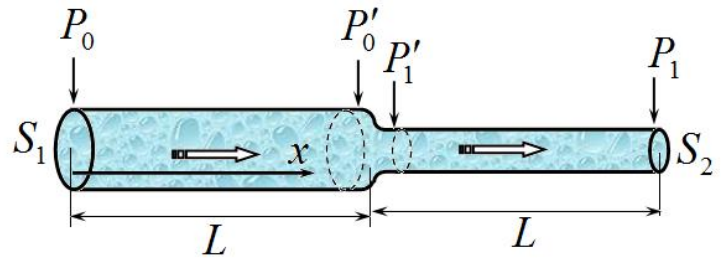
Из соотношения (7) следует, что $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1 = 2v_1$. Теперь не сложно определить скорость жидкости в левой части трубы:

$$\frac{\rho}{2}(4v_1^2 - v_1^2) = (P_0 - P_1) \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_0 - P_1}{\rho}}. \quad (10)$$

Тогда расход жидкости через трубу оказывается равным

$$q = S_1 v_1 = 2S_0 v_1 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{P_0 - P_1}{\rho}}. \quad (11)$$

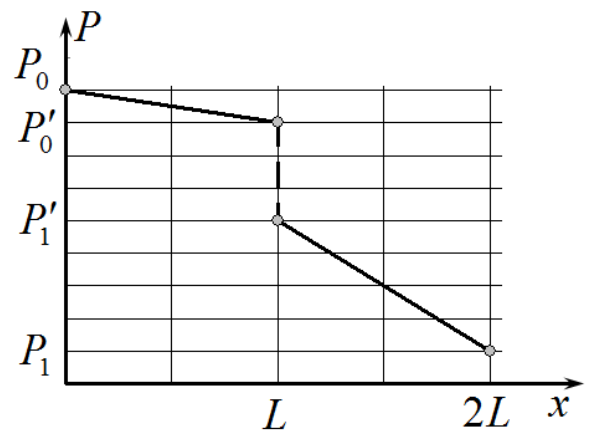
3.2 Для того, чтобы вязкая жидкость протекала по трубе постоянного сечения, к концам трубы необходимо прикладывать разность давлений, чтобы преодолеть силы вязкого трения. Поэтому при стационарном течении в трубе должно установиться следующее распределение давлений (см. рис.).



В пределах левой части трубы давление падает по линейному закону от P_0 до некоторого значения P'_0 . Разность этих давлений обусловлена необходимостью преодоления сил вязкого трения в этой части трубы. В области стыка должна существовать разность давлений $(P'_0 - P'_1)$, обеспечивающая увеличение скорости течения жидкости. Наконец, на правом участке давление линейно уменьшается от P'_1 до значения P_1 . Из формулы Пуазейля следует, что расход жидкости пропорционален разности давлений и квадрату (!) площади поперечного сечения. Так как расход жидкости в любом сечении постоянен, а площадь правой части в 2 раза меньше площади левой части, то разность давлений на правой части трубы должна быть в 4 раза больше, чем на левой части трубы.

$$(P'_1 - P_1) = 4(P'_0 - P_0). \quad (12)$$

Расчет скачка давлений может быть произведен аналогично тому. Как это было сделано для идеальной жидкости. Однако, этот расчет требует учета того, что при течении вязкой жидкости скорость ее течения не постоянна по поперечному сечению. Схематический вид зависимости давления в жидкости от координаты показан на рисунке. Существенно, что коэффициент наклона графика на втором участке в 4 раза больше, чем на первом.



Задание 10-1 Разминка

Задача 1.1

Ускорение свободного падения на расстоянии r от центра рассчитывается по формуле

$$g = G \frac{m(r)}{r^2}, \quad (1)$$

где $m(r)$ - масса части планеты, находящейся внутри шара радиуса r . Чтобы ускорение свободного падения не зависело от r , необходимо, чтобы масса указанной части планеты удовлетворяла условию

$$m(r) = \frac{g_0}{G} r^2. \quad (2)$$

Запишем выражение для массы части планеты для радиуса $(r + \Delta r)$, где $\Delta r \ll r$

$$m(r + \Delta r) = m(r) + 4\pi r^2 \Delta r \rho. \quad (3)$$

Здесь $4\pi r^2 \Delta r \rho$ - масса части планеты, находящейся внутри шарового слоя радиуса r и малой толщины Δr . С другой стороны, из формулы (2) следует, что

$$m(r + \Delta r) = \frac{g_0}{G} (r + \Delta r)^2 \approx \frac{g_0}{G} r^2 + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r = m(r) + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r \quad (4)$$

Приравняв выражения (3) и (4), получим ответ данной задачи

$$m(r) + 2 \frac{g_0}{G} r \Delta r = m(r) + 4\pi r^2 \Delta r \rho \Rightarrow \rho(r) = \frac{g_0}{2\pi G r} \quad (5)$$

Задача 1.2

Известна формула для сопротивления длинного проводника

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (1)$$

Но она применима к проводнику постоянного поперечного сечения. В данном случае площадь поперечного сечения проволоки переменна, поэтому для расчета ее сопротивления проволоку следует мысленно разбить на малые участки длиной Δx и просуммировать сопротивления этих участков (отметим, что они соединены последовательно). Итак, сопротивление всей проволоки можно представить в виде суммы

$$R = \sum_k \Delta R_k = \sum_k \rho \frac{\Delta x_k}{\pi r_k^2} = \frac{\rho}{\pi} \sum_k \frac{\Delta x_k}{r_k^2} \quad (2)$$

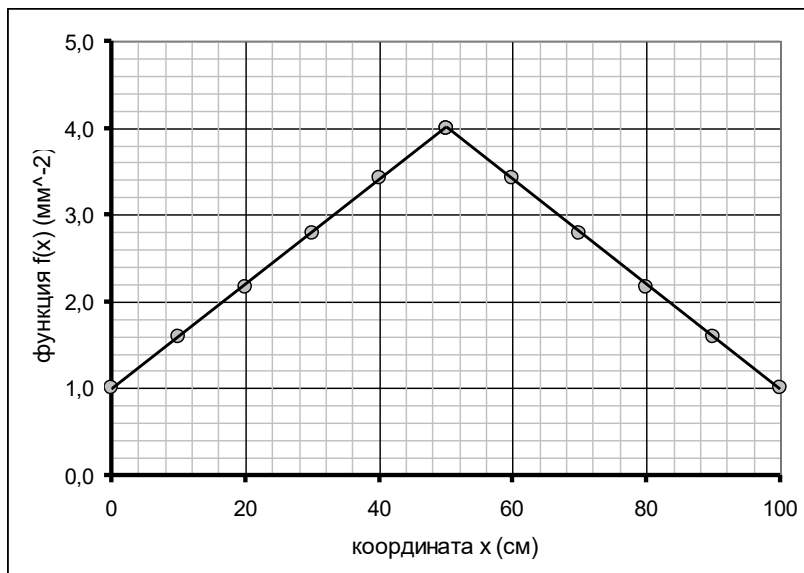
Для вычисления этой суммы можно построить график функции $f(x) = \frac{1}{(r(x))^2}$, тогда площадь

под этим графиком численно будет равна сумме, входящей в формулу (2).

По заданному графику зависимости $r(x)$ найдем значения радиуса в некоторых точках и построим график функции $f(x)$. Снятые с графика значения $r(x_k)$ и рассчитанные значения $f(x_k)$ приведены в таблице, рядом построен график функции $f(x)$.

Таблица.

x , см	r , мм	r^{-2} , мм ⁻²
0	1,00	1,00
10	0,79	1,60
20	0,68	2,16
30	0,60	2,78
40	0,54	3,43
50	0,50	4,00



Проведенные расчеты показывают, что полученная зависимость $f(x)$ состоит из двух симметричных частей, причем каждая из них является линейной. Поэтому не представляет труда вычислить площадь под графиком построенной функции

$$s = 2 \left(\frac{1+4}{2} \right) \cdot 10^6 \text{ м}^{-2} \cdot 0,50 \text{ м} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} \quad (3)$$

Тогда сопротивление проволоки равно

$$R = \frac{\rho}{\pi} \sum_k \frac{\Delta x_k}{r_k^2} = \frac{\rho}{\pi} s = \frac{1,2 \cdot 10^{-7} \text{ Ом} \cdot \text{м}}{\pi} 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^{-1} = 0,095 \text{ Ом}. \quad (4)$$

Задача 1.3

Проводимость газа пропорциональна концентрации n свободных носителей тока (ионов и электронов), т.е.

$$\frac{1}{\rho} = An, \quad (1)$$

где A - некоторая константа.

Ионы в газе появляются вследствие ионизации. т.е. число ионов, появляющихся в единицу времени, пропорционально интенсивности внешнего воздействия (плотности потока ионизирующих частиц)

$$\Delta n_+ = \alpha I \Delta t. \quad (2)$$

Исчезают же ионы вследствие рекомбинации (т.е. встрече двух ионов¹ противоположного знака). Т.к. как концентрации ионов противоположного знака одинаковы, то скорость рекомбинации пропорциональна квадрату концентрации ионов

$$\Delta n_- = \beta n^2 \Delta t. \quad (3)$$

В установившемся режиме скорость ионизации равна скорости рекомбинации. Из этого условия устанавливается связь между интенсивностью потока ионизирующих частиц и концентрацией ионов в газе

$$\alpha I = \beta n^2. \quad (4)$$

При воздействии каждого из источников устанавливаются концентрации, удовлетворяющие условиям

¹ Свободный электрон также будем называть «ионом».

$$\alpha I_1 = \beta n_1^2 \quad (5)$$

$$\alpha I_2 = \beta n_2^2$$

При воздействии двух источников условие стационарности концентраций имеет вид

$$\alpha(I_1 + I_2) = \beta n_s^2. \quad (6)$$

Из этих соотношений следует, что концентрация ионов при воздействии двух источников определяется по «теореме Пифагора»

$$n_s = \sqrt{n_1^2 + n_2^2}. \quad (7)$$

Наконец, используя соотношение (1), получим формулу, связывающую удельные сопротивления

$$\frac{1}{\rho_s} = \sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}}. \quad (8)$$

Из которой следует окончательный результат

$$\rho_s = \frac{\rho_1 \rho_2}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}. \quad (9)$$

Задача 10-2 Короткий толчок

Часть 1. Постоянная сила.

1.1 Сил, действующая на частицу, во время включения поля, равна

$$F = qE \quad (1)$$

Так как начальная скорость частицы равна нулю, поэтому уравнение теоремы об изменении импульса имеет вид

$$mv_0 = qE\tau. \quad (2)$$

Из этого уравнения находим скорость частицы

$$v_0 = \frac{qE}{m}\tau. \quad (3)$$

График этой зависимости показан на рисунке.



1.2 Уравнение теоремы о кинетической энергии имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{2} = qEx. \quad (4)$$

Так как движение тела является равноускоренным, то смещение тела за время действия поля τ равно

$$x_0 = \frac{qE}{2m}\tau^2. \quad (5)$$

Подставляя это выражение в формулу (4), получаем значение скорости

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{qE}{m} \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 \right)} = \frac{qE}{m} \tau \quad (6)$$

График зависимости скорости от координаты показан на рисунке.



1.2 Полученные формулы полностью совпадают.

Примечание. Формулы совпадают, так обе получены безо всяких приближений.

Часть 2. Сила упругости.

2.1 Пренебрежение смещением частицы за время действия поля равносильно пренебрежением силы упругости. Поэтому в этом приближении скорость частицы описывается тоже формулой, что и в Части 1:

$$\tilde{v}_0 = \frac{qE}{m}\tau. \quad (7)$$

2.2 В начальный момент времени ускорение частицы определяется только электрическим полем, поэтому в используемом приближении закон движения частицы описывается формулой

$$x = \frac{qE}{2m}t^2 \quad (8)$$

Тогда уравнение (1) в указанном приближении сводится к виду

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = qE - kx \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{qE}{m} - \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 \right). \quad (9)$$

Используя математическую подсказку, легко получить выражение для скорости частицы сразу после выключения поля:

$$v_0 = \frac{qE}{m} \tau - \frac{kqE}{6m^2} \tau^3 = \frac{qE}{m} \tau \left(1 - \frac{1}{6} \frac{k}{m} \tau^2 \right) \quad (10)$$

2.3 Относительная погрешность значения скорости, найденного в первом приближении, равна

$$\varepsilon_v = \frac{v_0 - \tilde{v}_0}{\tilde{v}_0} = -\frac{1}{6} \frac{k}{m} \tau^2. \quad (11)$$

2.4 Запишем уравнение, следующее из теоремы о кинетической энергии, выразим из него значение искомой скорости

$$\frac{mv_0^2}{2} = qEx - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \frac{qE}{m} x - \frac{k}{m} x^2} \quad (12)$$

Подставляя значение координаты в момент выключения поля (8), получим

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{qE}{m} x - \frac{k}{m} x^2} = \sqrt{2 \frac{qE}{m} \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 \right) - \frac{k}{m} \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 \right)^2} = \frac{qE}{m} \tau \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{k}{m} \tau^2}. \quad (13)$$

2.5 Наконец, используем приближенную формулу (для корня $\gamma = \frac{1}{2}$):

$$v_0 = \frac{qE}{m} \tau \sqrt{1 - \frac{1}{4} \frac{k}{m} \tau^2} \approx \frac{qE}{m} \tau \left(1 - \frac{1}{8} \frac{k}{m} \tau^2 \right). \quad (14)$$

2.6 Полученные формулы (10) и (14) имеют одинаковую структуру, но отличаются коэффициентом относительной погрешности. Можно показать, что правильной формулой является формула (10). Для этого достаточно проанализировать порядок малых поправок. Поправка к скорости, учитывающая смещение тела, равна 3 (т.е. пропорциональна τ^3), поэтому поправка к смещению должна быть пропорциональна τ^4 . Следовательно, в формуле (13) величина x должна быть рассчитана с точностью до 4 порядка.

Примечания для скептиков.

1. Докажем последнее утверждение. Если зависимость скорости от времени имеет вид (10):

$$v_0 = \frac{qE}{m} \tau - \frac{kqE}{6m^2} \tau^3;$$

то смещение, рассчитанное в рамках того же приближения, равно

$$x = \frac{qE}{2m} \tau^2 - \frac{kqE}{24m^2} \tau^4.$$

Подставим это выражение в формулу (13) и проведем разложение (оставляя все слагаемые 4 порядка), в результате чего получим

$$\begin{aligned} v_0 &= \sqrt{2 \frac{qE}{m} x - \frac{k}{m} x^2} = \sqrt{2 \frac{qE}{m} \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 - \frac{kqE}{24m^2} \tau^4 \right) - \frac{k}{m} \left(\frac{qE}{2m} \tau^2 \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{qE}{m} \tau \right)^2 - \frac{1}{12} \left(\frac{qE}{m} \tau \right)^2 \left(\frac{k}{m} \tau^2 \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{qE}{m} \tau \right)^2 \left(\frac{k}{m} \tau^2 \right)} = \\ &= \frac{qE}{m} \tau \sqrt{1 - \frac{1}{3} \left(\frac{k}{m} \tau^2 \right)} \approx \frac{qE}{m} \tau \left(1 - \frac{1}{6} \left(\frac{k}{m} \tau^2 \right) \right) \end{aligned}$$

А эта формула полностью совпадает с выражением (10).

2. Уравнение (10) имеет точное решение (так является уравнением гармонических колебаний). С учетом начальных условий это решение задается функцией

$$ma = qE - kx \Rightarrow x(t) = \frac{qE}{k}(1 - \cos \omega t),$$

Где обозначено $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ - круговая частота гармонических колебаний частицы на пружине.

Используя разложение косинуса $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$, эта функция представляется в виде

$$x(t) = \frac{qE}{k}(1 - \cos \omega t) \approx \frac{qE}{k} \left(\frac{1}{2}(\omega t)^2 - \frac{1}{24}(\omega t)^4 \right)$$

Что полностью совпадает с решением, полученным приближенным методом.

Из уравнения (10) следует, что зависимость скорости от времени во втором приближении имеет вид

$$v = \frac{qE}{m}t - \frac{kqE}{6m^2}t^3 \quad (10^*)$$

Тогда в соответствии с математической подсказкой зависимость координаты от времени будет описываться функцией

$$x = \frac{qE}{m} \frac{t^2}{2} - \frac{kqE}{6m^2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{qE}{2m} t^2 \left(1 - \frac{1}{12} \frac{k}{m} t^2 \right) \quad (11^*)$$

2.7 Отсюда следует, что смещение в первом приближении равно

$$\tilde{x} = \frac{qE}{2m} \tau^2 \quad (12^*)$$

2.8 Относительная поправка во втором приближении задается формулой

$$\varepsilon = -\frac{1}{12} \frac{k}{m} \tau^2. \quad (13^*)$$

Часть 3. Кулоновская сила.

3.1 Напряженность поля необходимо выразить через заданное значение напряжения (разности потенциалов) U_0 . Электрическое поле между обкладками сферического конденсатора эквивалентно полю точечного заряда, помещенного в центр сфер. Поэтому разность потенциалов и напряженность поля описываются формулами

$$U_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_2 \cdot r_1} \quad (15)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Из которых не сложно получить зависимость напряженности поля от расстояния r

$$E(r) = U \frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1} \frac{1}{r^2}. \quad (16)$$

Напряженность поля у поверхности внутренней сферы равна

$$E_0 = E(r = r_1) = U \frac{r_2 \cdot r_1}{r_2 - r_1} \frac{1}{r_1^2} = \frac{U}{r_1} \frac{r_2}{r_2 - r_1}. \quad (17)$$

3.2 Наконец выражение для напряженности поля в произвольной точке имеет вид

$$E(r) = E_0 \frac{r_1^2}{r^2}. \quad (18)$$

3.3 Так как поле включают на малый промежуток времени τ , то и смещение частицы за этот промежуток времени будет мало. Поэтому представим $r = r_1 + x$, причем $x \ll r_1$. Тогда вблизи поверхности внутренней сферы напряженность поля может быть описана приближенной формулой

$$E(r) = E_0 \frac{r_1^2}{(r_1 + x)^2} = E_0 \left(1 + \frac{x}{r_1}\right)^{-2} \approx E_0 \left(1 - 2 \frac{x}{r_1}\right). \quad (19)$$

Тогда уравнение движения тела в течение промежутка времени τ имеет вид

$$ma = qE = qE_0 - \frac{2qE_0}{r_1} x. \quad (20)$$

Это уравнение полностью совпадает с рассмотренным уравнением (9), в котором следует положить $k = \frac{2qE_0}{r_1}$. Скорость, которую приобретает тело за время включения поля, описывается формулой (10)

$$v_0 = \frac{qE_0}{m} \tau \left(1 - \frac{1}{6} \frac{k}{m} \tau^2\right) = \frac{qE_0}{m} \tau \left(1 - \frac{1}{3} \frac{qE_0}{mr_1} \tau^2\right) \quad (20)$$

В первом приближении время движения частицы между обкладками описывается формулой

$$\tilde{T} = \frac{r_2 - r_1}{\tilde{v}_0} = \frac{m(r_2 - r_1)}{qE_0 \tau}. \quad (21)$$

Для определения порядка погрешности обозначим $\frac{qE_0}{m} = a$ - ускорение, с которым разгонялась частица. Тогда время движения во втором приближении можно записать в виде:

$$T = \tau + \frac{(r_2 - r_1) - \frac{a}{2} \tau^2}{a \tau \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a}{r_1} \tau^2\right)}. \quad (22)$$

Упростим эту формулу, учитывая малость времени τ :

$$\begin{aligned} T &= \tau + \frac{(r_2 - r_1) - \frac{a}{2} \tau^2}{a \tau \left(1 - \frac{1}{3} \frac{a}{r_1} \tau^2\right)} = \frac{(r_2 - r_1)}{a \tau} \frac{1 - \frac{a}{2(r_2 - r_1)} \tau^2}{1 - \frac{1}{3} \frac{a}{r_1} \tau^2} + \tau \approx \\ &\approx \frac{(r_2 - r_1)}{a \tau} \left(1 - \frac{a}{2(r_2 - r_1)} \tau^2 + \frac{1}{3} \frac{a}{r_1} \tau^2\right) + \tau = \tilde{T} + \beta \tau \end{aligned} \quad (23)$$

Из этого выражения видно, что порядок поправки – первый, т.е. $n = 1$.

Этот же результат можно получить из простых рассуждений. Во втором приближении все относительные поправки имеют второй порядок, поэтому и относительная погрешность формулы для расчета времени движения также имеет второй порядок. Так как время движения обратно пропорционально τ , то абсолютная погрешность должна иметь первый порядок:

$$\frac{\Delta T}{\tilde{T}} \propto \tau^2 \Rightarrow \Delta T \propto \tilde{T} \tau^2 = \frac{\Delta r}{a \tau} \tau^2 \propto \tau. \quad (24)$$

Задача 10-3 Насос

Часть 1. Накачивание воздуха.

1.1 В начальном состоянии положении (точка 1) поршень находится в крайнем правом положении, объем газа - v_0 , давление P_0 .

Поршень начинает двигаться влево, сжимая газ в камере. Пока давление газа в камере насоса не достигнет давления газа в сосуде, оба клапана будут закрыты, поэтому процесс сжатия будет описываться уравнением

$$P_0 v_0 = P v \Rightarrow P = \frac{P_0 v_0}{v}. \quad (1)$$

Давление газа в камере достигнет значения давления в сосуде P_k , когда объем уменьшится до значения v' (точка 2), которое определяется выражением

$$P_k = \frac{P_0 v_0}{v'} \Rightarrow v' = \frac{P_0 v_0}{P_k}. \quad (2)$$

После этого откроется клапан 1 и газ начнет поступать в сосуд.

На этом участке происходит сжатие газа в объеме сосуда и камеры насоса, поэтому описывается уравнением

$$P_k (V + v') = P (V + v) \Rightarrow P = P_k \frac{V + v'}{V + v}. \quad (3)$$

Такое сжатие будет продолжаться до тех пор, пока поршень не достигнет крайнего левого положения (точка 3), в котором объем газа в камере насоса равен v_1 , давление достигнет значения

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + \frac{P_k v'}{V + v_1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + P_0 \frac{v_0}{V + v_1}. \quad (4)$$

Это же давление будет и в сосуде, на остальных участках цикла оно изменяться не будет.

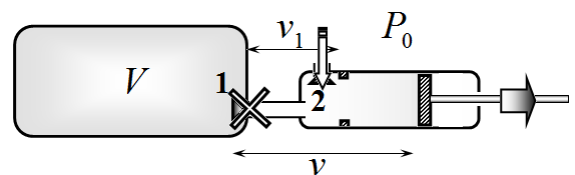
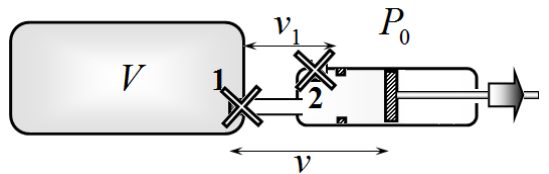
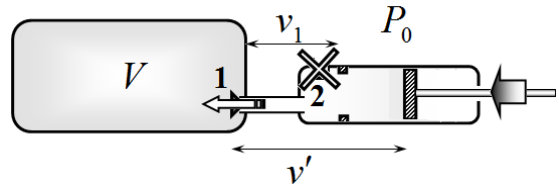
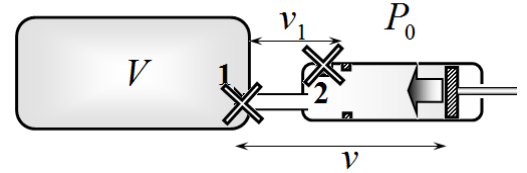
На следующем этапе поршень начинает обратное движение (вправо), при этом оба клапана опять оказываются закрытыми, пока давление в камере насоса не опустится до атмосферного давления. На этом участке уравнение процесса имеет вид

$$P_{k+1} v_1 = P v \Rightarrow P = \frac{P_{k+1} v_1}{v}. \quad (5)$$

Давление в камере насоса станет равным атмосферному, когда объем газа увеличится до значения v'' , которое определяется формулой

$$P_0 = \frac{P_{k+1} v_1}{v''} \Rightarrow v'' = \frac{P_{k+1} v_1}{P_0}. \quad (6)$$

При дальнейшем смещении поршня откроется клапан 2 и атмосферный воздух будет поступать в камеру насоса, при этом давление воздуха в камере насоса будет оставаться равным атмосферному $P = P_0$.



Для наглядности все характеристики цикла сведены в таблицу и показаны на графике.

Цикл накачки.

Процесс	Начальное состояние		Уравнение процесса	Конечное состояние	
	Объем	Давление		Объем	Давление
1-2	v_0	P_0	$P = \frac{P_0 v_0}{v}$	$v' = \frac{P_0 v_0}{P_k}$	P_k
2-3	v'	P_k	$P = P_k \frac{V + v'}{V + v}$	v_1	$P_{k+1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + \frac{P_0 v_0}{V + v_1}$
3-4	v_1	P_{k+1}	$P = \frac{P_{k+1} v_1}{v}$	$v'' = \frac{P_{k+1} v_1}{P_0}$	P_0
4-1	v''	P_0	$P = P_0$	v_0	P_0

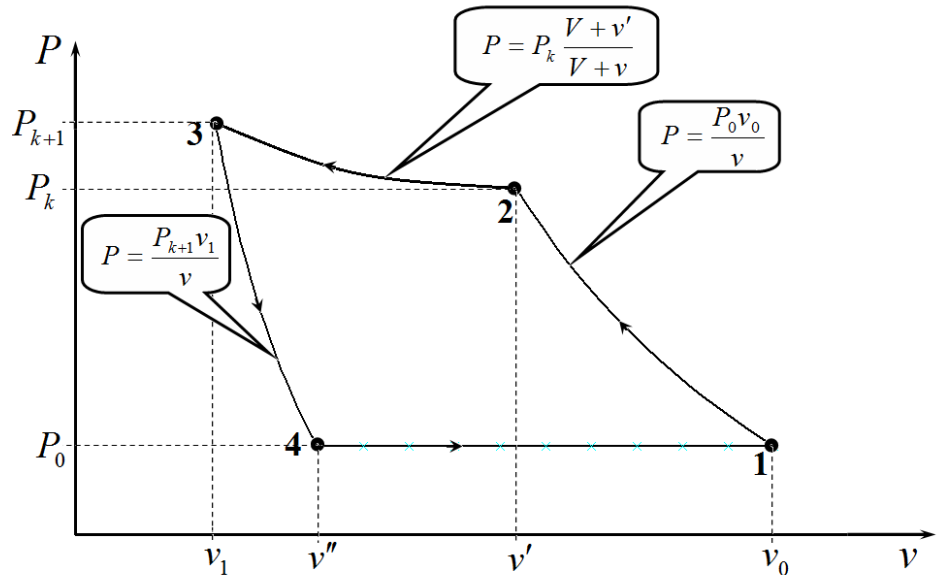


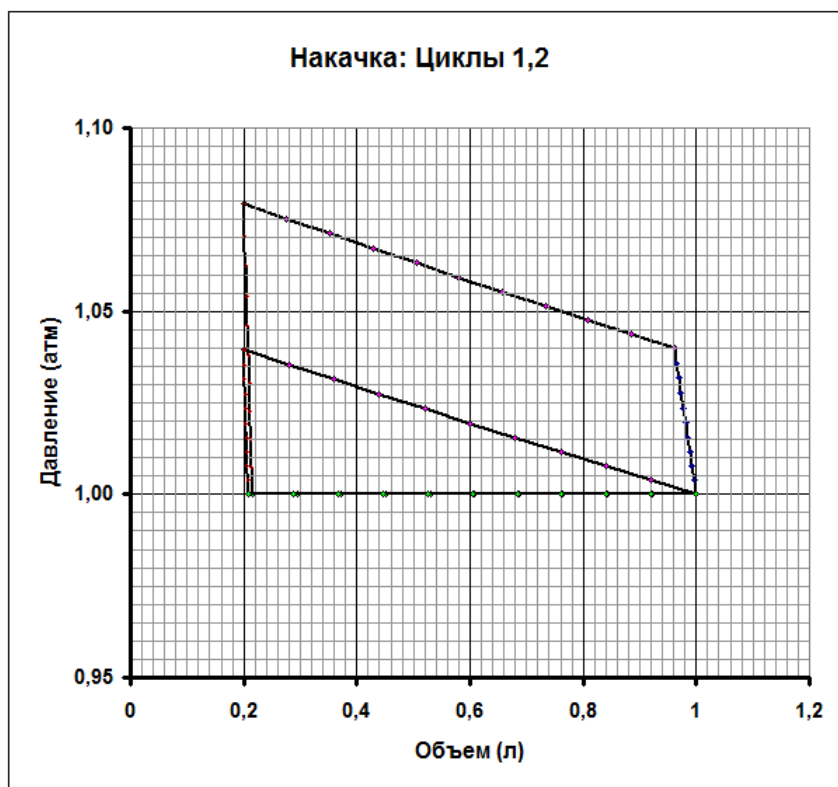
Диаграмма цикла накачки.

1.2 – 1.3 Расчеты параметров требуемых циклов, проведенные по формулам таблицы 1 приведены в соответствующих таблицах и на графиках.

Циклы 1, 2

Таблица состояний.

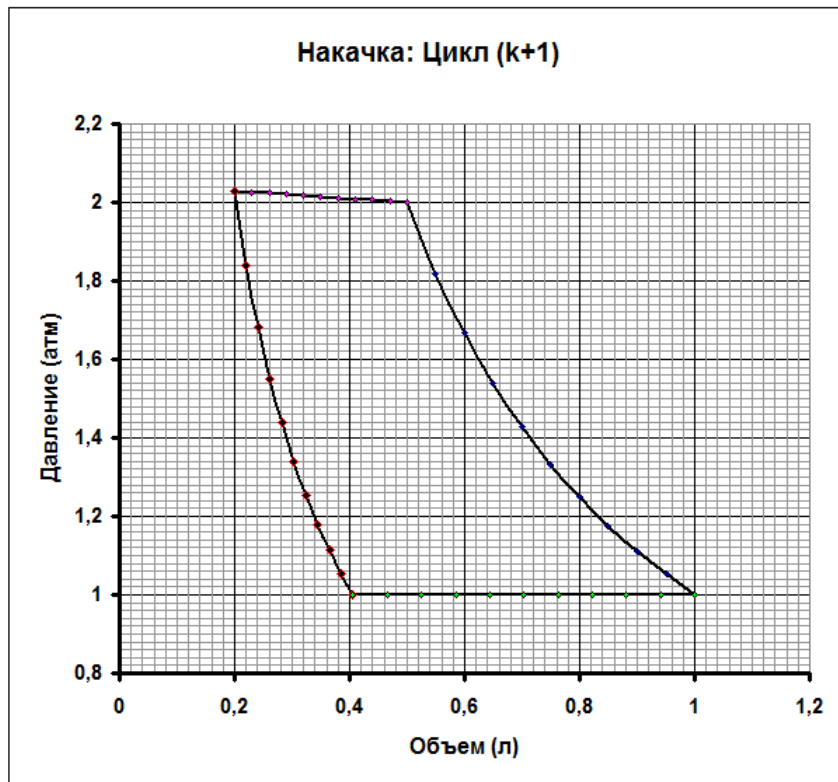
Точка	Объем v (л)	Давление P (атм.)
Цикл 1		
1	1,00	1,00
2	1,00	1,00
3	0,20	1,04
4	0,21	1,00
Цикл 2		
1	1,00	1,00
2	0,96	1,04
3	0,20	1,08
4	0,22	1,00



Цикл $(k+1)$

Таблица состояний.

Точка	Объем v (л)	Давление P (атм.)
1	1,00	1,00
2	0,50	2,00
3	0,20	2,03
4	0,41	1,00



1.4 Фактически требуемая формула получена в пункте 1.1 – формула (4):

$$P_{k+1} = P_k \frac{V}{V + v_1} + P_0 \frac{v_0}{V + v_1}. \quad (4')$$

Из сравнения с формулой, приведенной в условии ($P_k = \gamma P_{k-1} + a$), следует, что ее параметры задаются формулами

$$\gamma = \frac{V}{V + v_1} \quad (7)$$

$$a = P_0 \frac{v_0}{V + v_1} \quad (8)$$

1.5 Предельное давление может быть найдено как путем чисто физических рассуждений, так и формально математически.

Физические рассуждения. Максимально возможное сжатие воздуха в камере насоса достигается, когда поршень приходит в крайнее левое положение, а при этом клапан сосуда еще не открывается

В этом случае из выражения (1) следует формула для максимального давления

$$\bar{P} = P_0 \frac{v_0}{v_1}. \quad (9)$$

Формально математически этот же результат можно получить из рекуррентной формулы, полагая в ней, что давление перестало изменяться, т.е. $P_{k+1} = P_k = \bar{P}$. В этом случае получаем

$$\bar{P} = \gamma \bar{P} + a \Rightarrow \bar{P} = \frac{a}{1 - \gamma} = P_0 \frac{v_0}{v_1}. \quad (9')$$

1.6 Из обозначения $\delta_k = \bar{P} - P_k$ выразим значение давления $P_k = \bar{P} - \delta_k$ и подставим в рекуррентную формулу

$$\bar{P} - \delta_k = \gamma(\bar{P} - \delta_{k-1}) + a. \quad (10)$$

С учетом выражения (9'), получаем, что

$$\delta_k = \gamma \delta_{k-1} \quad (11)$$

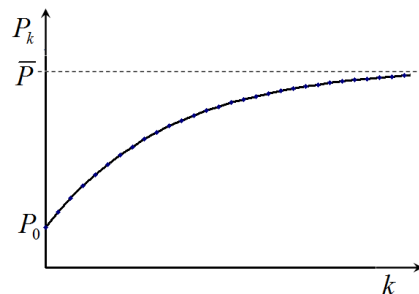
1.7 Формула (11), указывает, что величины δ_k образуют геометрическую прогрессию, поэтому

$$\delta_k = \delta_0 \gamma^k \quad (12)$$

С помощью обратной подстановки $P_k = \bar{P} - \delta_k$ получим

$$P_k = \bar{P} - \delta_0 \gamma^k = P_0 \frac{v_0}{v_1} - \left(P_0 \frac{v_0}{v_1} - P_0 \right) \left(\frac{V}{V + v_1} \right)^k. \quad (13)$$

График этой зависимости имеет вид кривой, монотонно стремящейся к предельному значению.



1.8 для расчета числа циклов удобно воспользоваться формулой (12). Проведем численный расчет ее параметров:

- знаменатель прогрессии $\gamma = \frac{V}{V + v_1} = \frac{20,00}{20,20} = 0,990$;

- максимальное давление $\bar{P} = P_0 \frac{v_0}{v_1} = 5,00 P_0$;

- начальное отклонение $\delta_0 = \bar{P} - P_0 = 4,00 P_0$;

- конечное отклонение $\delta_k = \bar{P} - 0,95\bar{P} = 0,25P_0$.

Теперь из формулы (12) найдем

$$\delta_k = \delta_0 \gamma^k \Rightarrow k = \frac{\ln \frac{\delta_k}{\delta_0}}{\ln \gamma} = 276 \approx 280. \quad (14)$$

Часть 2. Откачка.

2.1 Решение этой части полностью аналогично решению первой части задачи, поэтому приведем его кратко.

Цикл откачки также состоит из четырех этапов. В соответствии с условием начнем с состояния, когда поршень находится в крайнем левом положении (давление в этом состоянии равно атмосферному) и начинает двигаться вправо. При этом оба клапана закрыты: газ в камере насоса расширяется, давление падает. Когда давление в камере становится равным давлению в сосуде, открывается клапан 1 и газ частично начинает выходить из сосуда. Поршень смещается в крайнее правое положение и начинает возвращаться обратно, при этом клапан 1 закрывается. Давление в камере растет и когда достигает атмосферного открывается клапан 2 и газ частично выбрасывается в атмосферу. Эти стадии показаны на рисунке, начальные, конечные значения параметров газа в камере насоса и уравнения процессов приведены в Таблице 2. Схематическая диаграмма цикла показана на рисунке.

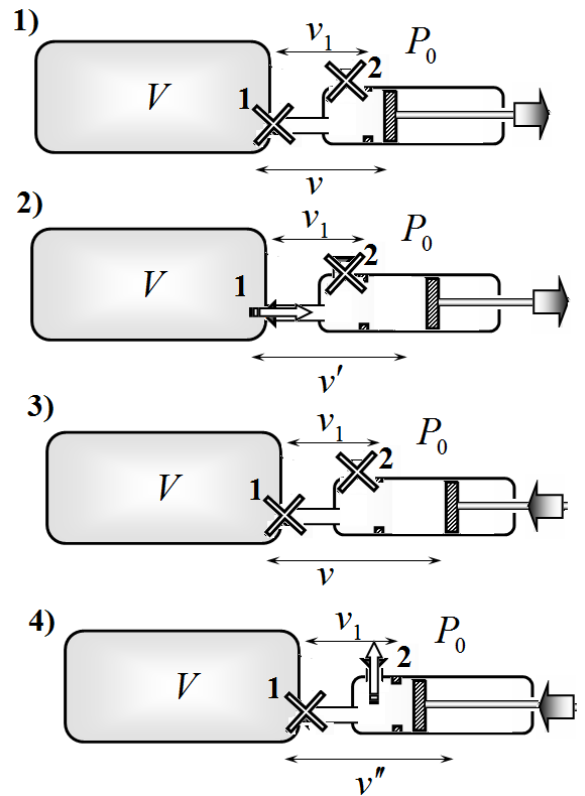


Таблица 2. Цикл откачки.

Процесс	Начальное состояние		Уравнение процесса	Конечное состояние	
	Объем	Давление		Объем	Давление
1-2	v_1	P_0	$P = \frac{P_0 v_1}{v}$	$v' = \frac{P_0 v_1}{P_k}$	P_k
2-3	v'	P_k	$P = P_k \frac{V + v'}{V + v}$	v_0	$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0}$
3-4	v_0	P_{k+1}	$P = \frac{P_{k+1} v_0}{v}$	$v'' = \frac{P_{k+1} v_0}{P_0}$	P_0
4-1	v''	P_0	$P = P_0$	v_1	P_0

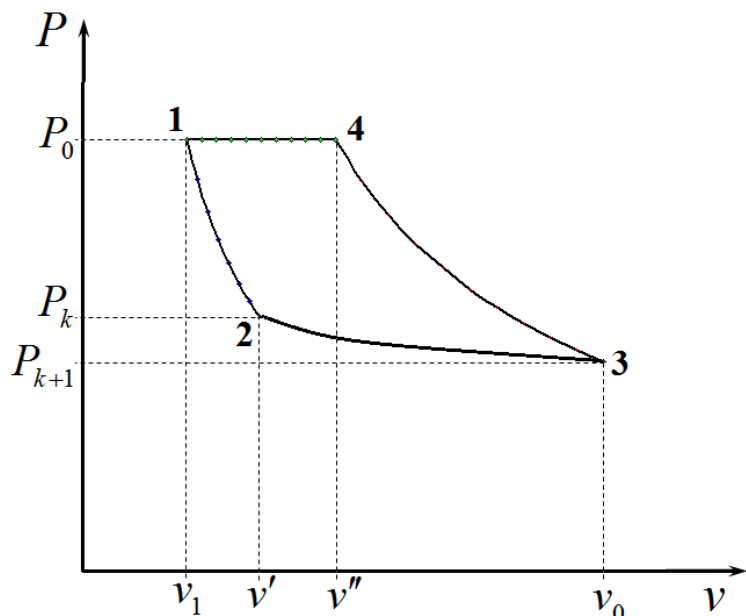


Диаграмма цикла откачки.

2.2 Уменьшение давления в сосуде происходит на 3 этапе цикла откачки, уравнение процесса на этом этапе позволяет получить рекуррентное соотношение, связывающее давления до и после очередного цикла

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0}. \quad (15)$$

Подставляя значения для объема v' (при котором начинается выход газа из сосуда), получим

$$P_{k+1} = P_k \frac{V + v'}{V + v_0} = P_k \frac{V + \frac{P_0 v_1}{P_k}}{V + v_0} = P_k \frac{V}{V + v_0} + P_0 \frac{v_1}{V + v_0}. \quad (16)$$

Это соотношение полностью аналогично соотношению (4'), проанализированному в первой части задачи. Поэтому можно переписать полученные ранее решения, только при этом надо поменять местами значения объемов v_0 и v_1 . Тогда зависимость давления в камере от числа проведенных циклов опишется формулой, аналогичной формуле (13):

$$P_k = P_0 \frac{v_1}{v_0} - P_0 \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^k \quad (17)$$

2.3 Подстановка численных значений параметров в эту формулу и последующий расчет дает значение давления в камере после 50 циклов откачки:

$$P_{50} = P_0 \left(\frac{v_1}{v_0} - \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \left(\frac{V}{V + v_0} \right)^k \right) = P_0 \left(0,20 + 0,80 \cdot \left(\frac{20}{21} \right)^{50} \right) = 0,27 \text{ атм}. \quad (18)$$

2.4 Предельное минимальное значение давления воздуха в сосуде равно.

$$P_k = P_0 \frac{v_1}{v_0} = 0,20 \text{ атм}. \quad (19)$$

Задача 11- 1. Разминка.

Задача 1.1.

Сила взаимодействия между частицами центральная, то есть зависит только от расстояния между частицами и направлена вдоль прямой, соединяющей центры этих частиц.

Вращение частиц происходит вокруг их центра масс, который остается неподвижным, так как внешние силы отсутствуют. Полная энергия системы является суммой кинетической энергии частиц и потенциальной энергии их взаимодействия.

Кинетическая энергия частиц описывается формулой

$$E_k = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{2}. \quad (1)$$

Где r_1, r_2 - радиусы орбит частиц, или расстояния от соответствующей частицы до центра масс.

В формуле (1) кинетическая энергия выражена через угловую скорость, так как она одинакова для обеих частиц, кроме того, она задана в условии задачи.

Фигурирующие в формуле (1) расстояния удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= r \\ m_1 r_1 &= m_2 r_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Второе уравнение следует из определения центра масс двух частиц.

Из уравнений (2) следует, что

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \\ r_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} r \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя эти выражения в формулу для кинетической энергии (1), получим

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m_1 r_1^2 \omega^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \left(m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} r \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega^2 \end{aligned} \quad (4)$$

В данной задаче силами взаимодействия могут быть сила кулоновского электростатического взаимодействия и сила гравитационного взаимодействия (в условии не оговорено, что ею следует пренебречь). Для этих взаимодействий выполняется простое соотношение между модулем силы $F(r)$ и потенциальной энергией взаимодействия $U(r)$:

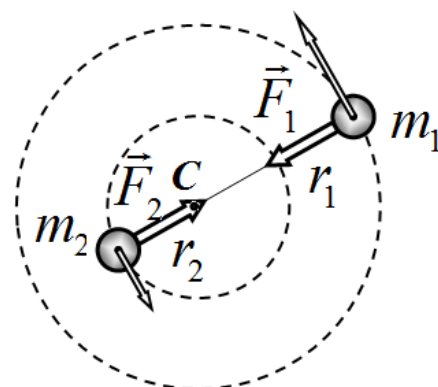
$$U(r) = -rF(r). \quad (5)$$

Знак минус в этой формуле возникает из-за того, что результирующая сила взаимодействия есть сила притяжения (иначе бы описанное движение было невозможно!).

Для расчета потенциальной энергии запишем уравнение второго закона Ньютона для одной из частиц

$$m_1 r_1 \omega^2 = F(r) \quad (6)$$

И умножим его на r , в результате чего получим:



$$rF(r) = m_1 r_1 \omega^2 r = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right) \omega^2 r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega^2 \quad (7)$$

При выводе использована формула (3) для расстояния r_1 .

Из полученного выражения следует (с учетом формул (4) и (5)), что потенциальная энергия взаимодействия отрицательна и по модулю в два раза больше энергии кинетической:

$$U = -2E_k \quad (8)$$

Таким образом, полная энергия рассматриваемой системы оказывается равной:

$$E = U + E_k = -E_k = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega^2. \quad (9)$$

Если масса одной из частиц значительно превышает массу второй ($m_2 \gg m_1$), то в формулу (9) можно записать в виде

$$E = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 \omega^2 \approx -\frac{1}{2} m_1 r^2 \omega^2. \quad (10)$$

В этом приближении можно считать, что более тяжелая частица покоится, а более легкая вращается вокруг нее.

Также отметим, что формула (9) обычно интерпретируется следующим образом: «задача двух тел», всегда может быть сведена к задаче движения одного тела с приведенной массой

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (11)$$

вокруг неподвижного центра.

Задача 1.2

Приведенная в учебнике формула получена в приближении, что электрон в атоме водорода вращается вокруг неподвижного ядра (как водорода, так и дейтерия). Однако взаимодействующие частицы движутся вокруг общего центра масс.

В предыдущей задаче было показано, что учет этого обстоятельства приводит к тому, что в формуле для энергии вместо массы легкой частицы (в этой задаче – электрона) следует подставлять значение приведенной массы. Именно учет этой поправки приводит к тому, что энергии уровней, а, следовательно, и спектры этих изотопов различаются.

Рассчитаем приведенные массы для водорода и дейтерия (учитывая малость отношения массы электрона к массе протона)

Для водорода:

$$\mu_H = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{m_p}} \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p} \right) = m_e (1 - \beta); \quad (1)$$

для дейтерия

$$\mu_D = \frac{2m_p m_e}{2m_p + m_e} = \frac{m_e}{1 + \frac{m_e}{2m_p}} \approx m_e \left(1 - \frac{m_e}{2m_p} \right) = m_e \left(1 - \frac{\beta}{2} \right). \quad (2)$$

Не сложно получить формулу для длины волны перехода, однако для расчета относительного сдвига это не требуется. Достаточно заметить, что рассматриваемая длина волны обратно пропорциональна приведенной массе. Действительно, энергия излучаемого фотона равна разности энергий уровней (которая пропорциональна приведенной массе).

Следовательно, частота излучения также пропорциональна приведенной массе, поэтому длина волны обратно пропорциональна ей. Итак,

$$\lambda = \frac{C}{\mu}. \quad (3)$$

Так как различие в приведенных массах мало, то и различие между длинами волн также мало, поэтому можно записать приближенное выражение

$$\Delta\lambda = -\frac{C}{\mu^2} \Delta\mu. \quad (4)$$

А для относительных величин

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta\mu}{\mu}. \quad (5)$$

Подставляя найденные значения приведенных масс, получим требуемый результат:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_D - \lambda_H}{\lambda_H} = -\frac{\mu_D - \mu_H}{\mu_H} = -\frac{m_e \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) - m_e(1 - \beta)}{m_e(1 - \beta)} \approx -\frac{\beta}{2} = -2,7 \cdot 10^{-4} \quad (6)$$

То есть все длины волн в спектре дейтерия оказываются примерно на три сотых процента меньше длин волн в спектре обычного водорода: и этот изотопический сдвиг точно измерен!

Задача 11-2 Фотоэлектронный умножитель (ФЭУ)

1. Развитие электронной лавины.

1.1 Число электронов, попадающих на анод, будет максимально, если на каждом диноде коэффициент размножения будет максимальным. Из графика зависимости коэффициента вторичной эмиссии от энергии падающих электронов следует, что его максимальное значение достигается при энергии падающих электронов равной 80 эВ. Большая часть вторичных электронов имеют энергию 4 эВ, поэтому оптимальным значением напряжения между соседними динодами является

$$\Delta U = 76B \quad (1)$$

Если пренебречь начальной энергией вторичных электронов, то оптимальным значением напряжения следует считать $\Delta U = 80B$. Отметим, что разность между этими значениями меньше 10%.

1.2 Максимально значение коэффициента вторичной эмиссии равно $\sigma_{\max} = 3,7$ (и может считаться постоянным при изменении энергии первичных электронов на величину порядка $\pm 10\text{эВ}$). Следовательно, среднее число электронов после прохождения 10 этапов размножения равно

$$N = \sigma^{10} \approx 4,8 \cdot 10^5 . \quad (2)$$

1.3 В условии задачи оговорено, что движение электронов между соседними электродами можно считать равноускоренным. В этом приближении средняя скорость движения равна среднеарифметическому значению скоростей на границах рассматриваемого интервала времени, т.е.

$$\langle v \rangle = \frac{v_0 + v_k}{2}, \quad (3)$$

Где v_0, v_k - начальные и конечные скорости электронов при их движении между соседними электродами ФЭУ. Эти скорости выражаются через энергии электронов E (в электрон-вольтах) следующей формулой

$$\frac{mv^2}{2} = eE \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eE}{m}} \quad (4)$$

Рассчитаем времена пролета между соседними электродами, используя эту формулу.

Энергия фотона, попадающего на фотокатод, равна $E_\phi = \frac{hc}{\lambda} \approx 2,8\text{эВ}$. Поэтому, с учетом работы выхода электрона при фотоэффекте, скорость электронов на выходе из фотокатода можно считать равной нулю. Поэтому время пролета от катода до первого динода примерно равно

$$t_{k-d} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{2eE}{m}}} = 1,13 \cdot 10^{-8} c \quad (5)$$

Время пролета между соседними динодами, получим, полагая начальную энергию равной $E_0 \approx 4\text{эВ}$ (средняя энергия вторичных электронов), $E \approx 80\text{эВ}$ (энергия при которой коэффициент вторичной эмиссии максимален)

Поэтому времена пролета между соседними динодами будет равно ($E_0 \approx 4\text{эВ}$, $E \approx 80\text{эВ}$)

$$t_{d-d} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{2eE_0}{m}} + \sqrt{\frac{2eE}{m}}} = 9,25 \cdot 10^{-9} \text{ с}. \quad (6)$$

Наконец, время пролета от последнего динода до анода ($E_0 \approx 4\text{эВ}$, $E_A = 24\text{эВ}$)

$$t_{d-a} = \frac{2l}{\sqrt{\frac{2eE_0}{m}} + \sqrt{\frac{2eE_A}{m}}} = 1,47 \cdot 10^{-8} \text{ с} \quad (7)$$

Итого, среднее время пролета равно

$$\bar{T} = t_{k-d} + 9t_{d-d} + t_{d-a} \approx 1,09 \cdot 10^{-7} \text{ с}. \quad (8)$$

1.4 Длительность импульса определяется разностью времен прохождения через весь ФЭУ самых «медленных» и самых «быстрых» электронов. В свою очередь разброс в скоростях электронов определяется разбросом начальных энергий вторичных электронов (возникших в результате вторичной электронной эмиссии). Из приведенного графика распределения энергии вторичных электронов следует, что их энергии (по полувысоте функции распределения) лежат в диапазоне от $E_{\min} \approx 1,5\text{эВ}$ до $E_{\max} \approx 7,5\text{эВ}$.

Проведем расчеты времен пролета различных участков ФЭУ для этих значений энергии.

Время пролета от катода до первого динода одинаково для всех электронов, поэтому при расчете длительности импульса (разности времен пролета) не учитывается.

Будем считать, что напряжение между динодами установлено в оптимальном режиме $\Delta U = 76 \text{ В}$.

Средняя скорость при движении между динодами для самых «медленных» электронов

$$\bar{v}_{\min} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2eE_{\min}}{m}} + \sqrt{\frac{2e(E_{\min} + \Delta U)}{m}} \right) \approx 2,97 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (9)$$

Средняя скорость при движении между динодами для самых «быстрых» электронов

$$\bar{v}_{\max} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2eE_{\max}}{m}} + \sqrt{\frac{2e(E_{\max} + \Delta U)}{m}} \right) \approx 3,52 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (10)$$

Разность времен пролета

$$\Delta t_{d-d} = \frac{l}{\bar{v}_{\min}} - \frac{l}{\bar{v}_{\max}} \approx 1,57 \cdot 10^{-9} \text{ с} \quad (11)$$

Аналогично рассчитаем разность времен между последним динодом и анодом (здесь $\Delta U = 20 \text{ В}$)

$$\Delta t_{d-a} \approx 4,59 \cdot 10^{-9} \text{ с}. \quad (12)$$

Общая разность времен пролета (т.е. длительность импульса) оказывается равной

$$\tau = 9\Delta t_{d-d} + \Delta t_{d-a} \approx 1,87 \cdot 10^{-8} \text{ с}. \quad (13)$$

Если считать, что напряжение между динодами установлено равным 80 В (без учета начальной энергии вторичных электронов), то значения времен пролета оказываются равными $t_{d-d} = 9,07 \cdot 10^{-9} \text{ с}$; разброс времени движения $\Delta t_{d-d} \approx 1,50 \cdot 10^{-9} \text{ с}$.

Тогда время пролета и длительность

$$\begin{aligned} \bar{T} &= t_{k-d} + 9t_{d-d} + t_{d-a} \approx 1,08 \cdot 10^{-7} \text{ с} \\ \tau &= 9\Delta t_{d-d} + \Delta t_{d-a} \approx 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ с} \end{aligned}$$

Различия между результатами оказываются меньше допустимых 10%.

1.5 Среднее значение силы тока в импульсе рассчитывается «по определению»

$$\bar{I} = \frac{e\bar{N}}{\tau} \approx 4,1 \cdot 10^{-6} \text{ A.} \quad (14)$$

1.6 Темновые импульсы с максимальной амплитудой будут инициированы электронами, испущенными с первого динода. Но и для них средний коэффициент размножения будет в σ раз меньше (т.е. примерно в 3 раза). Поэтому разумно установить пороговое значение в 2 раза меньшее среднего значения импульсов, которые появляются благодаря регистрации фотона

$$I_{\text{пор.}} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ A.} \quad (15)$$

1.7 В режиме счета фотонов импульсы тока, поступающие на вход счетного устройства, не должны перекрываться. Максимальная интенсивность падающего потока определяется именно этим условием. Итак, среднее время между появлениями электронов из фотокатода должно быть меньше длительности импульса:

$$\Delta t_{\phi_3} \approx \tau \quad (16)$$

Тогда среднее время между попаданиями фотонов на катод должно быть меньше, чем

$$\Delta t_{\phi_{\text{ом}}} \approx \frac{\Delta t_{\phi_3}}{\eta} = \frac{\tau}{\eta}. \quad (17)$$

Число фотонов, попадающих на катод в этом в единицу времени при выполнении условия (24), будет равно

$$\frac{\Delta N_{\phi}}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t_{\phi_{\text{ом}}}} = \frac{\eta}{\tau}. \quad (18)$$

Интенсивность света при этом будет равна (здесь $S = \frac{\pi d^2}{4}$ - площадь катода):

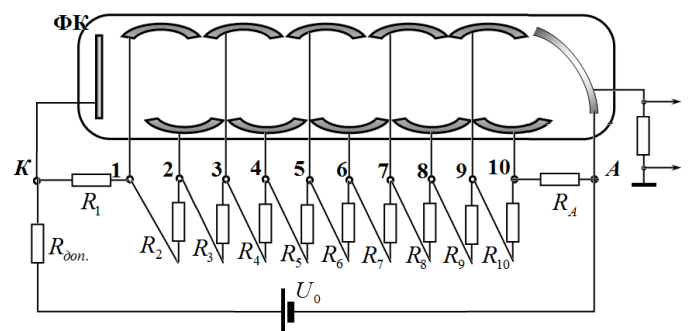
$$I = \frac{h\nu}{S} \frac{\Delta N_{\phi}}{\Delta t} = \frac{hc\eta}{\lambda S \tau}. \quad (19)$$

Численное значение этой величины

$$I = \frac{hc\eta}{\lambda S \tau} \approx 1,9 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \quad (20)$$

2. Схема питания ФЭУ в режиме счета фотонов.

Напряжение имеющегося источника U_0 необходимо «разделить» между имеющимися электродами. Для этого проще всего использовать делитель напряжения, состоящий из последовательно соединенных резисторов (см. рис.). В такой схеме напряжение между соседними электродами будет пропорционально сопротивлению резистора. ФЭУ



содержит катод, 10 динодов и анод. Для оптимального режима работы ФЭУ напряжения должны быть следующими:

- напряжение динод-анод – 20 В;
- напряжения между соседними динодами можно положить равными 80 В (точнее 76 в – но это различие лежит в пределах допустимой погрешности);
- напряжение катод-динод 80 В.

Итого, для питания ФЭУ требуется общее напряжение $U = 10U_{d-d} + U_{d-a} \approx 820 \text{ В}$. Поэтому излишние $1000 - 820 = 180 \text{ В}$ необходимо «посадить» на дополнительном резисторе. Таким образом, получаем, что сопротивления резисторов в цепочке делителя должны быть равными:

$$\begin{aligned}
R_A &= 20r_0 \\
R_1 = R_2 = \dots R_{10} &= 80r_0 \\
R_{дон} &= 180r_0
\end{aligned}
\tag{21}$$

Где r_0 - сопротивление, которое следует определить из дополнительных условий.

2.2 Общее сопротивление цепи питания равно $1000r_0$, поэтому сила тока в этой цепи равна

$$I_{num.} = \frac{U_0}{1000r_0} . \tag{22}$$

Согласно первому условию, это значение должно быть больше, чем $10\bar{I}$, т.е.

$$\frac{U_0}{1000r_0} > 10\bar{I} \Rightarrow r_0 < \frac{U_0}{10^4\bar{I}} = \frac{1,0 \cdot 10^3 B}{10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-6} A} \approx 25 \text{кОм} . \tag{23}$$

2.3 Емкость конденсатора можно оценить по формуле для емкости плоского конденсатора

$$C \approx \frac{\epsilon_0 S}{l} \approx 6 \cdot 10^{-14} \Phi . \tag{24}$$

2.4 Характерное время зарядки можно оценить по формуле

$$\tau_C \approx RC . \tag{25}$$

В этой формуле $R = 80r_0$ - сопротивление между диодами. Выполнение второго условия

описывается неравенством $\tau_C < \frac{\tau}{2}$, или

$$80r_0 C < \frac{\tau}{2} \Rightarrow r_0 < \frac{\tau}{160C} \approx 2 \text{кОм} . \tag{26}$$

2.5 Чтобы удовлетворить обоим условиям необходимо выбрать меньшее из значений (23) и (26), т.е. выбрать значение $r_0 \approx 2 \text{кОм}$. В этом случае значения сопротивлений резисторов в цепи питания должны быть равными

$$\begin{aligned}
R_A &= 40 \text{кОм} \\
R_1 = R_2 = \dots R_{10} &= 160 \text{кОм} . \\
R_{дон} &= 360 \text{кОм}
\end{aligned}
\tag{27}$$

Задача 11-3 Преломление... звука

Часть 1. Скорость звука в воздухе.

1.1 Подставим размерности величин, входящих в формулу для скорости звука

$$c = AP^\alpha \rho^\beta \quad (1)$$

И запишем условия совпадения размерностей:

$$[M \cdot c^{-1}] = \left[\frac{KZ \cdot M}{c^2 \cdot M^2} \right]^\alpha \left[\frac{KZ}{M^3} \right]^\beta = [KZ]^{\alpha+\beta} [M]^{-\alpha-3\beta} [c]^{-2\alpha} \quad (2)$$

$$\alpha + \beta = 0$$

$$-\alpha - 3\beta = 1 \quad (3)$$

$$-2\alpha = -1$$

Решение этой системы имеет вид

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = -\alpha = -\frac{1}{2}. \quad (4)$$

Следовательно, формула для скорости звука следующая:

$$c = A \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (5)$$

1.2 Из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M} RT \quad (6)$$

следует, что

$$\frac{P}{\rho} = \frac{R}{M} T. \quad (7)$$

Поэтому зависимость скорости звука от температуры описывается формулой

$$c = A \sqrt{\frac{P}{\rho}} = A \sqrt{\frac{R}{M} T}. \quad (8)$$

1.3 Подставим указанное выражение для температуры и преобразуем его

$$c = A \sqrt{\frac{R}{M} T} = A \sqrt{\frac{R}{M} (T_0 + \Delta T)} = A \sqrt{\frac{R}{M} T_0} \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T_0}} = c_0 \sqrt{1 + \frac{\Delta T}{T_0}}. \quad (9)$$

Здесь $c_0 = A \sqrt{\frac{R}{M} T_0}$ - скорость звука при температуре T_0 .

Часть 2. Распространение звука в неоднородно нагретой атмосфере.

2.1 Если температура воздуха изменяется с высотой, то соответственно изменяется и скорость звука, причем эта зависимость описывается формулой

$$T = T_0 + \gamma z \Rightarrow c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0} z} \quad (10)$$

Известный закон преломления света является следствием его волновых свойств, поэтому его можно обобщить на любые волновые процессы. Это можно доказать, например, используя принцип Гюйгенса. Изменение скорости распространения волны в оптике принято описывать, вводя показатель преломления среды. По аналогии со светом можно ввести «звуковой» показатель преломления.

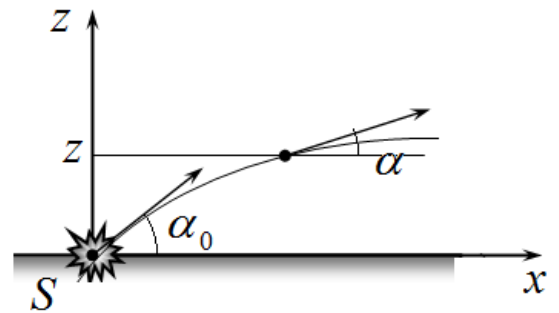
При температуре T_0 показатель преломления будем считать равным 1, тогда зависимость показателя преломления от высоты имеет вид

$$n = \frac{c_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0} z}} \quad (11)$$

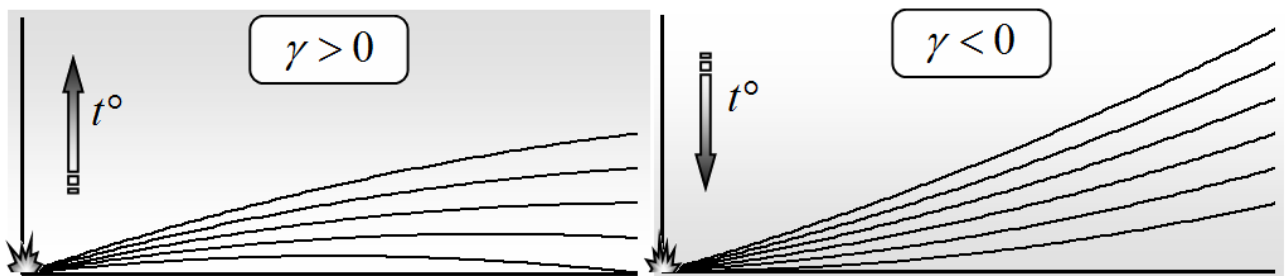
При заданном определении показателя преломления, закон преломления звука будет иметь вид

$$n \cos \alpha = \cos \alpha_0. \quad (12)$$

Здесь α - угол между звуковым лучом и горизонтом.



Используя этот закон и выражение (11) для зависимости показателя преломления от высоты, можно указать качественное поведение звуковых лучей. Если температура воздуха возрастает с высотой ($\gamma > 0$), то показатель преломления убывает – в этом случае звуковые лучи, преломляясь, изгибаются вниз. Некоторые из них даже могут достичь поверхности земли (см. рис). В противном случае ($\gamma < 0$) – лучи изгибаются вверх. Отметим, что именно эта ситуация чаще встречается в атмосфере.



2.2 При заданных условиях зависимость скорости звука от высоты имеет вид

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{T_0} z} = c_0 \sqrt{1 + \beta z} \quad (12)$$

Численные значения параметров в этой формуле равны

$$c_0 = 340 \frac{m}{c}. \quad (13)$$

$\gamma = \frac{\Delta T}{\Delta z} = \frac{-1,0K}{100m} = -1,0 \cdot 10^{-2} \frac{K}{m}$, следовательно.

$$\beta = \frac{\gamma}{T_0} = -1,0 \cdot 10^{-2} \frac{K}{m} \frac{1}{293K} = -3,4 \cdot 10^{-5} m^{-1}. \quad (14)$$

2.3 Уравнение параболы, проходящей через начало координат, в общем виде задается функцией

$$z = ax^2 + bx. \quad (15)$$

2.4 Производная от функции (15) равна

$$z' = 2ax + b \quad (16)$$

В это выражение следует подставить значение x , выраженное через z . Для зависимости $z(x)$ надо решить уравнение

$$ax^2 + bx - z = 0. \quad (17)$$

Из которого следует, что

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4az}}{2a} \quad (18)$$

Подставляя это выражение в формулу (16), получим

$$z' = \pm \sqrt{b^2 + 4az} . \quad (19)$$

Два значения производной соответствуют двум ветвям параболы, т.е. при $x > 0$ следует брать положительный корень, при $x < 0$ - отрицательный. Таким образом, если производная от функции описывается уравнением (19), то его решение при нулевых начальных условиях есть функция (15)

2.5 Для расчета траектории луча $z(x)$ воспользуемся законом преломления

$$n \cos \alpha = \cos \alpha_0 \quad (20)$$

В котором зависимость показателя преломления от высоты задается функцией

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta z}} \quad (21)$$

Согласно определению угла α , его тангенс равен производной от искомой функции $z(x)$. Значение тангенса угла найдем с помощью тригонометрических формул

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{n^2}{\cos^2 \alpha_0} - 1} = \sqrt{\frac{n^2 - 1 + (1 - \cos^2 \alpha_0)}{\cos^2 \alpha_0}} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_0 + \frac{n^2 - 1}{\cos^2 \alpha_0}} . \quad (22)$$

Нам требуется найти приближенное уравнение траектории (в квадратичном приближении). Для этого достаточно подкоренное упростить с помощью приближенных формул, считая z (точнее βz) и α малыми величинами и, оставляя в них только первый порядок. В этом приближении

$$\frac{n^2 - 1}{\cos^2 \alpha_0} \approx \frac{1}{1 + \beta z} - 1 \approx (1 - \beta z) - 1 = -\beta z . \quad (23)$$

Тогда уравнение для траектории луча приобретает вид

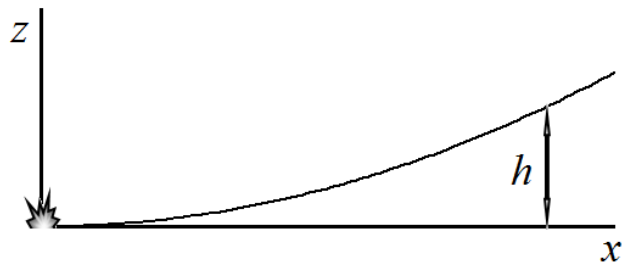
$$z' = \sqrt{\alpha_0^2 - \beta z} , \quad (24)$$

который совпадает с уравнением (19). Поэтому решение этого уравнения задается функцией

$$z = -\frac{\beta}{4} x^2 + \alpha_0 x \quad (25)$$

Так как параметр $\beta < 0$, то ветви параболы оказываются направленными вверх – звук «уходит» ввысь!

2.6 Звуковые лучи, выходящие из источника под разными углами α_0 являются параболлами с одним коэффициентом при x^2 , поэтому самая «нижняя» парабола есть луч вышедший горизонтально ($\alpha_0 = 0$). Поэтому для определения расстояния, на котором луч проходит на высоте h необходимо решить уравнение



$$h = -\frac{\beta}{4} x^2 , \quad (26)$$

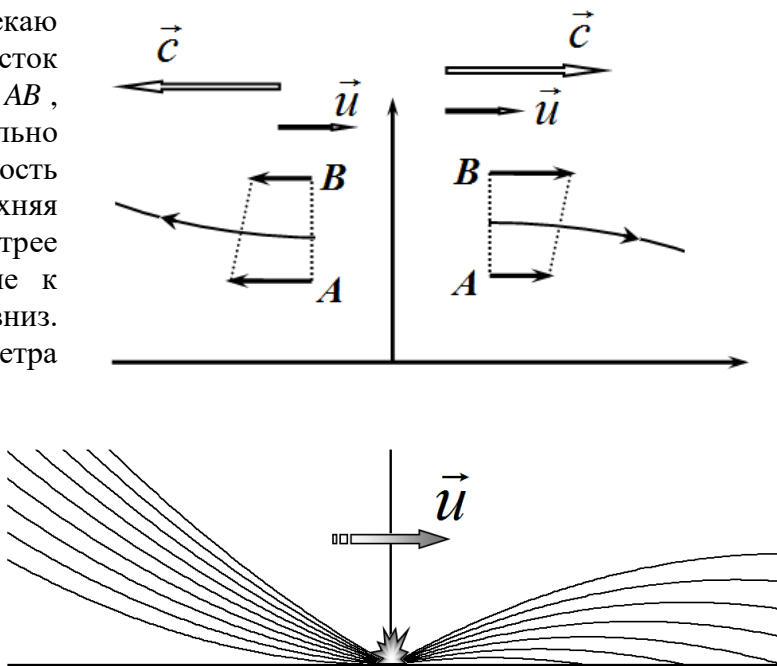
из которого находим

$$x = \sqrt{-\frac{4h}{\beta}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,0 \text{ м}}{3,4 \cdot 10^{-5} \text{ м}^{-1}}} = 0,49 \cdot 10^{-3} \text{ м} . \quad (27)$$

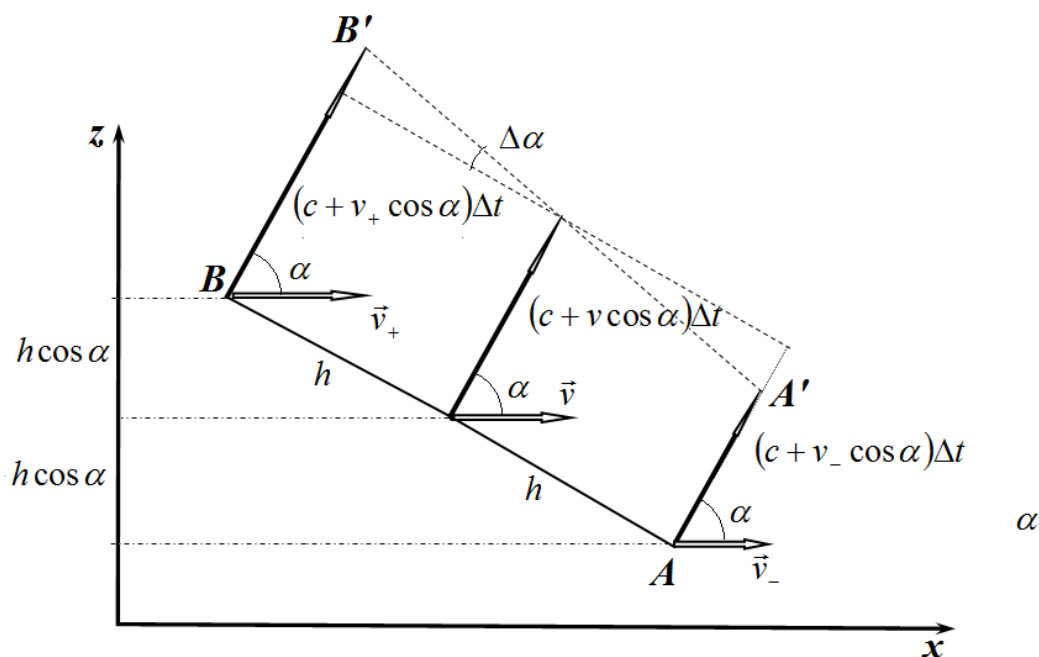
Заметим, что на больших расстояниях не будет слышен звук даже от мощного источника (например, взрыва), потому что звуковые волны уходят вверх. Дифракцией звуковых волн в данной задаче пренебрегаем.

Часть 3. Не кричите против ветра!

3.1 При наличии ветра скорость распространения звука зависит от направления (можно сказать, что среда является анизотропной). Поэтому закон преломления в форме (12) применять нельзя. В таком случае оказывается удобным рассматривать изменение волновых поверхностей (фронт) – поверхностей, которые звуковые лучи пересекают нормально. Рассмотрим участок волнового фронта AB , распространяющегося приблизительно по направлению ветра. Так как скорость ветра возрастает с высотой, то верхняя часть фронта будет смещаться быстрее нижней, поэтому лучи нормальные к этому фронту будут отклоняться вниз. При распространении звука против ветра ситуация обратная – верхняя часть фронта движется медленнее, поэтому в этом случае лучи отклоняются вверх. Аналогичная ситуация будет реализовываться и для других лучей: при движении по ветру они отклоняются вниз (прижимаются к земле), при распространении против ветра лучи отклоняются вверх.



3.2 Опишем «поворот» волнового фронта более подробно.



Рассмотрим луч, распространяющийся на высоте z под углом α к горизонту. Изобразим участок волнового фронта AB шириной $2h$. Согласно подсказке, сделанной в

условии задачи скорость фронта равна сумме скоростей звука в неподвижном воздухе и нормальной составляющей скорости ветра, поэтому скорость смещения точек фронта равна

$$c' = c + v \cos \alpha . \quad (28)$$

Только необходимо учесть, что разные точки фронта находятся на разной высоте, поэтому они движутся с разной скоростью. Потому, что скорость ветра зависит от высоты - $v(z) = v_0 + \beta z$. Крайние точки выбранного участка фронта смещены относительно его середины на величину $\Delta z = h \cos \alpha$. Поэтому скорости ветра в этих точках равны

$$v_{\pm} = v_0 \pm \beta h \cos \alpha , \quad (29)$$

где v_0 - скорость ветра на высоте z . За малый промежуток времени Δt смещения крайних точек задаются выражениями

$$\Delta S_{\pm} = (c + v_{\pm} \cos \alpha) \Delta t . \quad (30)$$

Из рисунка следует, что различие скоростей движения этих точек приведет к повороту фронта на угол

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= - \frac{(c + v_{+} \cos \alpha) \Delta t - (c + v_{-} \cos \alpha) \Delta t}{2h} = - \frac{(v_{+} - v_{-}) \cos \alpha \Delta t}{2h} = \\ &= - \frac{2\beta h \cos^2 \alpha \cdot \Delta t}{2h} = -\beta \cos^2 \alpha \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (31)$$

За тот же промежуток времени центр выбранного участка сместится по высоте на величину

$$\Delta z = (c + v_0 \cos \alpha) \sin \alpha \cdot \Delta t \approx c \sin \alpha \cdot \Delta t \quad (32)$$

Здесь учтено, что $v \ll c$

Следовательно, уравнение, описывающее изменение угла α имеет вид

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta z} = - \frac{\beta \cos^2 \alpha}{c \sin \alpha} . \quad (33)$$

3.3 В рамках использованного приближения уравнение (33) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta z} = - \frac{\beta \cos^2 \alpha}{c \sin \alpha} \approx - \frac{\beta}{c \cdot \alpha} . \quad (34)$$

Из которого не сложно найти зависимость $\alpha(z)$ с учетом начальных условий:

$$\alpha \Delta \alpha = - \frac{\beta}{c} \Delta z \Rightarrow \Delta \left(\frac{\alpha^2}{2} \right) = - \frac{\beta}{c} \Delta z \Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2} = - \frac{\beta}{c} z \quad (35)$$

Окончательно получаем

$$\alpha = \sqrt{\alpha_0^2 - 2 \frac{\beta}{c} z} . \quad (35)$$

Для скептиков, сомневающих в мощи приближенных методов. Уравнение (33) может быть решено точно

$$\frac{d\alpha}{dz} = - \frac{\beta \cos^2 \alpha}{c \sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = - \frac{\beta}{c} dz \Rightarrow \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = - \frac{\beta}{c} z$$

Этот интеграл выражается через элементарные функции

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d(\cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} \Big|_{\alpha_0}^{\alpha} = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{1}{\cos \alpha_0}$$

Далее необходимо выразить в явном виде $\cos\alpha$, провести тригонометрические преобразования типа (22) и ... получить уравнение (35)!

Как обычно – не понимаешь физики – сиди и интегрируй!

Вернемся, однако, к уравнению (35). Так как при малых углах α , угол равен производной $z'(x)$, то это уравнение совпадает с уравнением (24), поэтому его решением является функция

$$z = -\frac{\beta}{2}x^2 + \alpha_0x \quad (36)$$

Таким образом, при распространении звука по ветру лучи представляют собой параболы, ветви которых направлены к земле.

При распространении звука против ветра необходимо поменять знак в уравнении (33), соответственно поменяется знак и решения, т.е. в этом случае лучи будут описываться функциями

$$z = +\frac{\beta}{2}x^2 + \alpha_0x \quad (37)$$

Отметим, что в этом случае $x < 0$, но и $\alpha_0 < 0$.

Полученные результаты корректно описывают ход лучей, построенных в результате качественного анализа.

3.5 Итак, причиной того, что звук лучше распространяется по ветру является преломление звуковых лучей, в этом случае они «прижимаются» к земле и являются слышимыми. В противоположном направлении лучи уходят вверх и минуют уши слушателей. Также существенно, что, как правило, скорость ветра возрастает с высотой (вблизи поверхности скорость ветра меньше из-за влияния вязкого трения о поверхность земли).

Изменение скорости распространения звука по и против ветра никакой роли не играет: во-первых, скорость ветра мала по сравнению со скоростью звука; во-вторых, не принципиально услышите ли вы раньше или позже на несколько миллисекунд!