

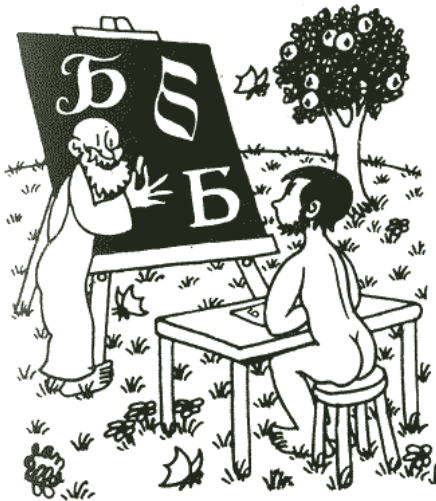


*А.И. Слободянюк
А.А. Мищук
Л.Г. Маркович*

*Республиканская
физическая
олимпиада*

(Заключительный этап)

2010 год.



Теоретический тур
Решения

Задача 9-1. «Федя – путешественник»

1.1 Пересчет скорости проводится традиционно

$$v = \frac{3,0 \text{ км}}{1,0 \text{ час}} = \frac{3000 \text{ м}}{60 \text{ мин}} = 50 \frac{\text{м}}{\text{мин}} \quad (1)$$

1.2 Время движения Феде

$$T = \frac{S}{v} = \frac{5000 \text{ м}}{50 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 1,0 \cdot 10^2 \text{ мин} . \quad (2)$$

2.1 Сначала (в течении промежутка времени T) Федя движется равномерно, а затем остается в покое, поэтому

$$x_0(t) = \begin{cases} vt, & \text{при } t \leq T \\ S, & \text{при } t \geq T \end{cases} . \quad (3)$$

График закона движения показан на рис. 2.

1.4-1.5 Изобразим схематически законы движения Феде и Шарика (рис. 1). Пусть Шарик в очередной раз вернулся домой в момент времени τ_{k-1} . Следующая встреча с Федей произойдет в момент времени t_k , в точке с координатой

$$x_k = vt_k . \quad (4)$$

Эту же координату можно выразить из закона движения Шарика на этом участке

$$x_k = u(t_k - \tau_{k-1}) . \quad (5)$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$u(t_k - \tau_{k-1}) = vt_k \Rightarrow t_k = \frac{u}{u-v} \tau_{k-1} , \quad (6)$$

Очевидно, что назад Шарик будет бежать столько же времени, как и до встречи, поэтому

$$\tau_k - t_k = t_k - \tau_{k-1} .$$

Из последних соотношений находим

$$\tau_k = 2t_k - \tau_{k-1} = 2 \frac{u}{u-v} \tau_{k-1} - \tau_{k-1} = \frac{u+v}{u-v} \tau_{k-1} . \quad (7)$$

Полученное соотношение показывает, что времена возвращения Шарика домой образуют геометрическую прогрессию, которую в явном виде можно записать (с учетом $u = 3v$)

$$\tau_k = \frac{u+v}{u-v} \tau_{k-1} \Rightarrow \tau_k = \tau_0 \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^k = \tau_0 \cdot 2^k \quad (8)$$

Из формулы (6) выразим моменты встреч Шарика с Федей

$$t_k = \frac{u}{u-v} \tau_{k-1} = \frac{u}{u-v} \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^{k-1} \tau_0 = \tau_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^k \quad (9)$$

и координаты мест встречи

$$x_k = vt_k = \frac{u}{u-v} \left(\frac{u+v}{u-v} \right)^{k-1} v \tau_0 = v \tau_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^k . \quad (10)$$

По полученным формулам легко рассчитать численные значения времен и координат (см. Таблицу 1)

Таблица 1. Планируемый график движения Шарика.

k	Возвращение к дому		Встреча с Феей	
	τ_k (мин)	x (м)	t_k (мин)	x_k (м)
0	5,0	0		
1			7,5	375
	10	0		
2			15	750
	20	0		
3			30	1500
	40	0		
4			60	3000
	80	0		
5			120 (?)	6000 (?)
			113	5000
	147	0		

Расчет показывает, что к четвертой ожидаемой встрече Феея уже дойдет до своей цели. Поэтому Шарик в четвертый раз встретит Феею в точке $x_4 = 5000\text{м}$, в момент времени

$$t_5 = \tau_4 + \frac{S}{u} = 80 + \frac{5000}{150} = 113 \text{ мин.} \quad (11)$$

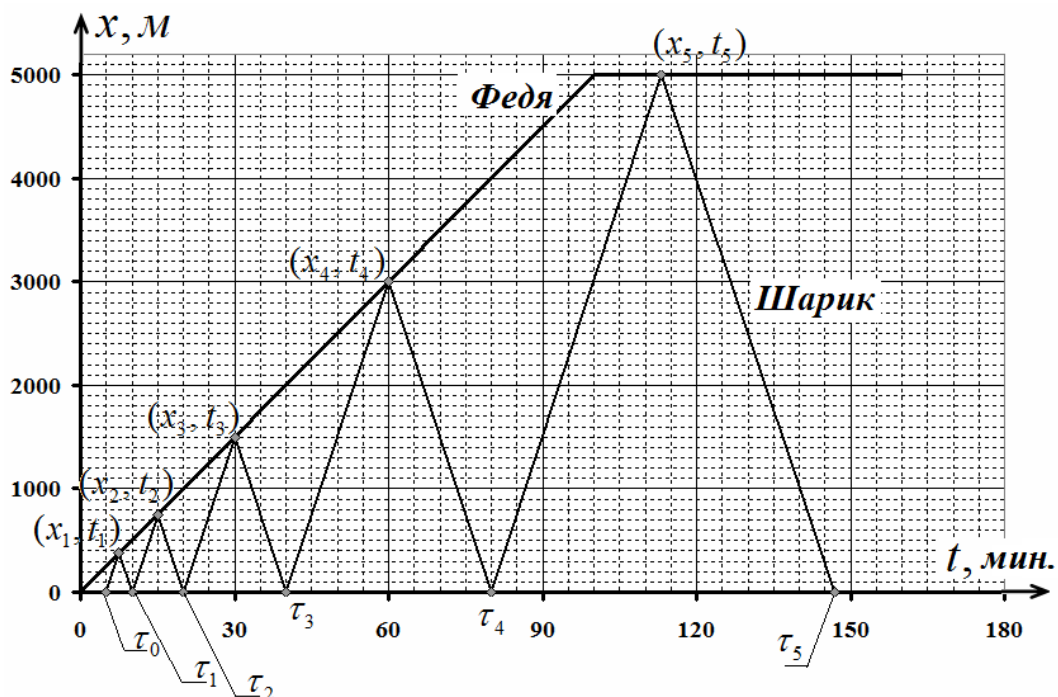
Последний раз Шарик должен вернуться домой в момент времени

$$\tau_5 = \tau_4 + 2 \frac{S}{u} = 80 + 2 \frac{5000}{150} = 147 \text{ мин} \quad (12)$$

1.6 Так как Шарик должен двигаться с постоянной по модулю скоростью, то путь, который он должен пробежать равен

$$L = u \tau_5 = 150 \cdot 147 = 22000\text{м} = 22\text{км} \quad (13)$$

1.7 График закона движения Шарика также показан на рис. 2.



2.1 Если Шарик отдыхал в течении промежутка $\Delta\tau_1$ и опоздал на время Δt_1 , то она бежал в течении промежутка времени $((t_3 + \Delta t_1) - (\tau_2 + \Delta\tau_1))$ и догнал Федю в точке $x = v(t_3 + \Delta t_1)$, поэтому должно выполняться соотношение

$$u((t_3 + \Delta t_1) - (\tau_2 + \Delta\tau_1)) = v(t_3 + \Delta t_1), \quad (13)$$

из которого определяем

$$\Delta\tau_1 = \frac{(u-v)}{u}(t_3 + \Delta t_1) - \tau_2 = \frac{2}{3} \cdot 45 - 20 = 10 \text{ мин.} \quad (14)$$

Так десятиминутная задержка привела к пятнадцатиминутному опозданию, взбучке, лишним километрам, да еще и к необходимости резко увеличить скорость бега!

2.2 Так как неудачная встреча Шарика с Федей произошла в точке $x'_3 = v(t_3 + \Delta t_1) = 2250 \text{ м}$, в момент времени $t'_3 = 45 \text{ мин}$, а следующая встреча в момент времени $t = \tau_4 = 60 \text{ мин}$ в точке $x_4 = 3000 \text{ м}$, то средняя скорость, которую должен развить Шарик должна быть равна

$$\langle u \rangle = \frac{x'_3 + x_4}{\tau_4 - t'_3} = \frac{5250 \text{ м}}{15 \text{ мин}} = 350 \frac{\text{м}}{\text{мин}}. \quad (15)$$

Судя по документальной хронике – такая скорость Шарикку доступна!

Возвратится же он домой после этой бешеной гонки в момент времени

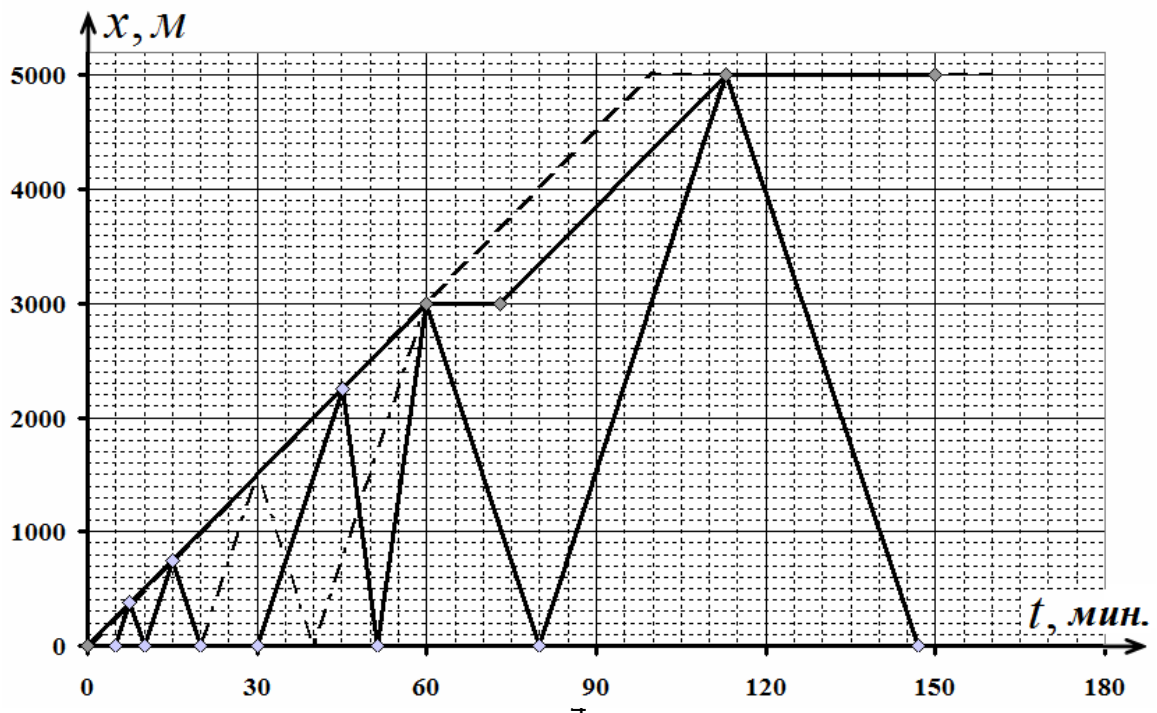
$$\tau'_3 = t'_3 + \frac{x'_3}{\langle u \rangle} = 45 + \frac{2250}{350} = 51 \text{ мин.} \quad (16)$$

Как видно, он более чем на 10 минут опоздал и на встречу с Матроскиным, что привело к еще одному воспитательному мероприятию!

2.3– 2.4 По плану Федя должен был входить в деревню в момент времени $T = 100 \text{ мин}$, а в реальности он вошел в нее в момент времени $\tau_5 = 113 \text{ мин}$. Следовательно, он отдыхал в течении промежутка времени

$$\Delta t_2 = \tau_5 - T = 13 \text{ мин.} \quad (17)$$

Где именно Федя устроил место отдыха сказать невозможно. Поэтому на графике закона движения этот горизонтальный участок может находиться в произвольном месте (на рис. 3 – сразу после встречи с Шариком).



2.6 Из графика видно, что удлинение пути произошло из-за того, что третья встреча произошла дальше, чем запланировано, при этом

$$\Delta L = 2(x'_3 - x_3) = 2 \cdot (2250 - 1500) = 1500 \text{ м} = 1,5 \text{ км} . \quad (18)$$

Делайте все вовремя!

Задача 9. 2. Тепловая разминка

1. Определим массу льда m_1 и массу воды m_2 , находящейся в сосуде, из системы уравнений, следующих из условия

$$\begin{cases} m = m_1 + m_2 \\ c_1 m_1 = c_2 m_2 \end{cases} . \quad (1)$$

Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{c_2}{c_1 + c_2} m = 0,40 \text{ кг} \\ m_2 &= \frac{c_1}{c_1 + c_2} m = 0,20 \text{ кг} \end{aligned} . \quad (2)$$

Количество теплоты Q_1 , необходимое для повышения температуры системы на $\Delta t_1 = 1,0^\circ\text{C}$, складывается из количества теплоты Q_{11} , идущей на плавление льда

$$Q_{11} = \lambda \cdot m_1 = 132 \text{ кДж} \quad (3)$$

и количества теплоты Q_{12} , идущего на последующее нагревание воды массой $m = m_1 + m_2$ на $\Delta t_1 = 1,0^\circ\text{C}$. Расчет в данном случае дает

$$Q_{12} = c_2(m_1 + m_2)\Delta t_1 = 2,52 \text{ кДж} . \quad (4)$$

Суммарное количество теплоты при данной процедуре

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} = 135 \text{ кДж} . \quad (5)$$

Соответственно, количество теплоты Q_2 , необходимое для понижения температуры системы на тот же градус $\Delta t_1 = 1,0^\circ\text{C}$ складывается из количества теплоты Q_{21} , идущей на замораживание воды

$$Q_{21} = \lambda \cdot m_2 = 66,0 \text{ кДж}$$

и количества теплоты Q_{22} , необходимого для последующего охлаждения льда массой $m = m_1 + m_2$ на $\Delta t_1 = 1,0^\circ\text{C}$

$$Q_{22} = c_1(m_1 + m_2)\Delta t_1 = 1,26 \text{ кДж} .$$

Суммарное количество теплоты, необходимое для этого

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22} = 67,3 \text{ кДж} .$$

Таким образом, отношение средних теплоемкостей системы при данных тепловых процессах

$$\eta = \frac{C_1}{C_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = 2,0. \quad (6)$$

Результат (6) вполне понятен, поскольку массы и теплоемкости фаз (льда и воды) в калориметре различны, что приводит к различию теплот Q_1 и Q_2 в тепловых процессах различных направлений.

2. Рассмотрим начальный (наклонный) участок AB графика (см. рис.). За время $\Delta\tau$ в системе выделится количество теплоты $P\Delta\tau$, где P — искомая мощность нагревателя. Пусть за это время температура системы увеличилась на Δt , тогда согласно уравнению теплового баланса можем записать

$$P\Delta\tau = (c_1m_1 + c_2m_2)\Delta t. \quad (7)$$

Из последнего равенства следует, что мощность нагревателя

$$P = (c_1m_1 + c_2m_2) \frac{\Delta t}{\Delta\tau}. \quad (8)$$

Величина $\frac{\Delta t}{\Delta\tau}$ представляет собой угловой коэффициент наклона начального участка графика, который несложно определить по рисунку

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{2,0^\circ\text{C}}{20\text{c}} = 0,10 \frac{^\circ\text{C}}{\text{c}}. \quad (9)$$

Как видно из (9), угловой коэффициент (тангенс угла наклона) прямой в данном случае имеет «экзотическую» размерность, определяемую размерностями величин, приведенных вдоль соответствующих осей координат.

Расчет по формуле (8) с учетом выражения (9) дает

$$P = (c_1m_1 + c_2m_2) \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = 168\text{Вт} = 0,17\text{кВт}. \quad (10)$$

С такой мощностью нагревателя лед расплавится за время

$$\tau_1 = \frac{m_1 \cdot \lambda}{P} = 786\text{c} = 13\text{ мин}. \quad (11)$$

Соответственно, время разогрева системы до температуры $t_2 = 20^\circ\text{C}$ найдем как

$$\tau_2 = \frac{c_2(m_1 + m_2)t_2}{P} = 300\text{c} = 5,0\text{ мин}. \quad (12)$$

3. Пусть в сосуде находится масса m_2 растворителя, тогда масса растворенной соли будет

$$m_1 = \eta \cdot m_2. \quad (13)$$

Соответственно, масса нерастворенной соли в сосуде

$$m_3 = m - m_1 = m - \eta \cdot m_2. \quad (14)$$

Для полной теплоемкости системы в данном случае можем записать

$$C = c_1m_1 + c_2m_2 + c_3m_3 = c_1\eta m_2 + c_2m_2 + c_3(m - \eta \cdot m_2). \quad (15)$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$C = c_2 m_2 + c_3 m + \eta m_2 (c_1 - c_3).$$

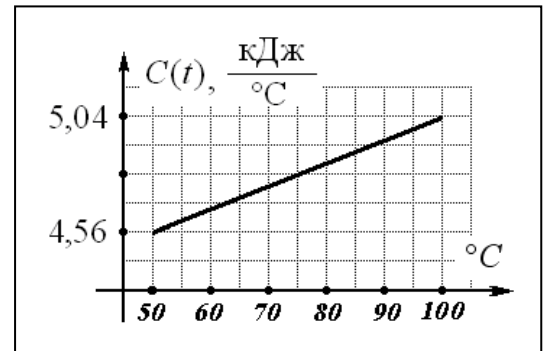
Как следует из условия задачи, в данном пункте следует проводить численные расчеты, используя три значащие цифры. Подставляя в (15) численные значения, получим

$$C(t) = (4,32 + 1,20 \cdot \eta(t)) \frac{\text{кДж}}{^\circ\text{C}}. \quad (16)$$

График полученной зависимости представлен на рисунке.

При нагревании системы от температуры $t_1 = 50,0^\circ\text{C}$ до температуры $t_2 = 100^\circ\text{C}$ необходимо подсчитать площадь под приведенным графиком (площадь трапеции).

Расчет с точностью до трех значащих цифр дает



$$Q = 240 \text{кДж} = 0,240 \text{МДж}. \quad (17)$$

Задача 9- 3. Скольжение.

1. Со стороны стола на шайбу действует сила трения равная

$$F = \mu mg. \quad (1)$$

Работа этой силы «съест» кинетическую энергию шайбы, поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgS \Rightarrow S = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (2)$$

Примечание. Эту задачу также можно решать на основании 2 закона Ньютона.

2. Запишем уравнение 2 закона Ньютона для шайбы

$$ma = -bv \quad (3)$$

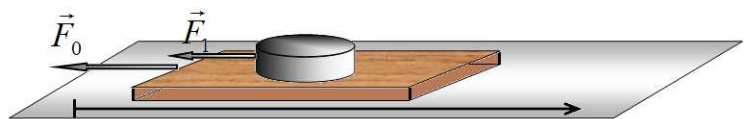
И воспользуемся определениями ускорения и скорости

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -b \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow m \Delta v = -b \Delta x. \quad (4)$$

Это соотношение справедливо для малых промежутков времени, но если просуммировать по всем промежуткам за все время движения, то его можно рассматривать для полных изменений скорости и координаты, поэтому

$$m \Delta v = -b \Delta x \Rightarrow m(0 - v_0) = -b(S - 0) \Rightarrow S = \frac{mv_0}{b}. \quad (5)$$

3. Так как массы шайб значительно меньше массы доски, то движение доски можно рассматривать независимо от движения шайб. На доску действует сила трения со стороны стола $F_0 = 2\mu mg$ (силой



трения со стороны шайб следует пренебречь ввиду малости их масс). Следовательно, до полной остановки доска пройдет путь равный

$$S_0 = \frac{v_0^2}{4\mu g}. \quad (6)$$

Очевидно, что все шайбы начнут двигаться относительно доски, обгоняя ее.

На каждую шайбу действует сила трения $F_1 = \mu mg$ (независимой от скоростей доски и самой шайбы). Поэтому в той же системе отсчета, связанной с неподвижной поверхностью, каждая шайба может пройти (если не соскользнет с доски) до остановки путь равный

$$S_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (7)$$

С доски соскользнут все шайбы, которые находились изначально на расстояниях меньших $\Delta S = S_1 - S_0 = \frac{v_0^2}{4\mu g}$ от переднего края доски. Число таких шайб

$$n = \left[\frac{v_0^2}{4\mu g l} \right] + 1. \quad (8)$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа.

4. Запишем уравнение 2 закона Ньютона для шайбы в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижной поверхностью

$$ma = -b(v - v_0) \Rightarrow m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -b \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} - \frac{\Delta x_0}{\Delta t} \right), \quad (9)$$

где x, x_0 и v, v_0 координаты и скорости шайбы и доски. Применяя операцию суммирования, описанную в пункте 2, получим

$$m\Delta v = -b(\Delta x - \Delta x_0) \Rightarrow m(0 - v_0) = -b(S - S_0) \Rightarrow S - S_0 = \frac{mv_0}{b}. \quad (10)$$

Следует заметить, что путь $S - S_0$, пройденный шайбой по доске, не зависит от закона торможения самой доски!

Число шайб, которые соскользнут с доски в этом случае равно

$$n = \left[\frac{mv_0}{bl} \right] + 1. \quad (11)$$

5. Используя результат (10), полученный в предыдущем пункте, находим, что каждый электрон пройдет по проводу путь равный

$$L = \frac{mR\omega}{\beta}. \quad (12)$$

Те электроны, которые находятся на меньших расстояниях от гальванометра пробегут через него. Их число равно

$$N = nsL = n \frac{\pi d^2}{4} \frac{mR\omega}{\beta}. \quad (13)$$

Они несут заряд

$$q = eN = ne \frac{\pi d^2}{4} \frac{mR\omega}{\beta}. \quad (14)$$

Задача 10-1 «Фонарь»

Часть 1.

Условие равновесия удобно записать, приравнявая модули моментов силы тяжести¹ $m\vec{g}$ и силы упругости жгута \vec{F} , относительно шарнирного крепления

$$mgl \sin \alpha = Fl \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (1)$$

Длина растянутого жгута равна

$$x = 2l \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

При выполнении закона Гука и пренебрежимо малой начальной длине жгута сила упругости выражается формулой

$$F = kx = 2kl \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3)$$

Таким образом, уравнения равновесия имеет вид

$$mgl \sin \alpha = 2kl \sin \frac{\alpha}{2} \cdot l \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (4)$$

Если воспользоваться тригонометрической формулой и сократить $\sin \alpha$, то получается приведенное условие

$$mg = kl. \quad (5)$$

Для определения коэффициента жесткости следует воспользоваться результатами измерений длины жгута при известной массе подвешенного груза.

$$m_0 g = kx_1 \Rightarrow k = \frac{m_0 g}{x_1}. \quad (6)$$

Подстановка этого значения в условие (5) дает

$$m_0 g = \frac{m_0 g}{x_1} l \Rightarrow l = x_1 \quad (?) \quad (7)$$

что случайно выполняется в данном случае!

Однако уравнение (4) имеет корни, (которые оказались потерянными при сокращении)

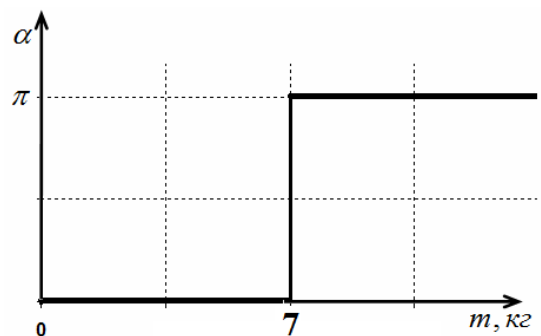
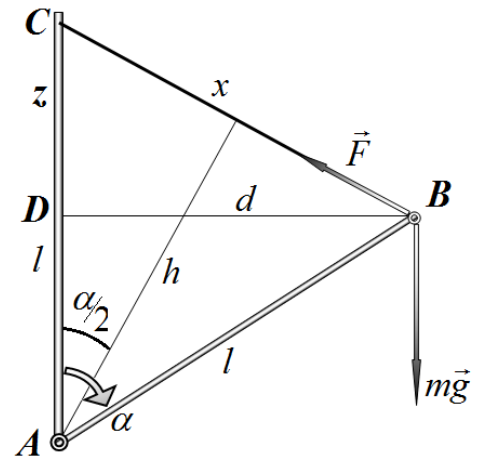
$$\sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha^* = 0, \quad \alpha^* = \pi. \quad (8)$$

При $mg < kl$ устойчивым будет корень $\alpha^* = 0$, при $mg > kl$ устойчивым будет корень $\alpha^* = \pi$. Критическое значение массы, при котором произойдет опрокидывание находится из исходных данных

$$m^* g = kl = \frac{m_0 g}{x_1} l \Rightarrow$$

$$m^* = m_0 \frac{l}{x_1} = 7,0 \text{ кг} \quad (9)$$

Требуемый график имеет вид, показанный на рисунке.



¹ Здесь мы записываем условия равновесия для произвольной массы подвешенного груза

Часть 2.

Уравнение равновесия в данном случае будет иметь вид

$$mg \cdot l \sin \alpha = k(x - x_0) \cdot l \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (10)$$

Используя приведенную в условии тригонометрическую формулу, получим

$$mg \cdot 2l \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = k(x - x_0) \cdot l \cos \frac{\alpha}{2},$$

Наконец, учтем, что $2l \sin \frac{\alpha}{2} = x$, тогда окончательно получим уравнение равновесия

$$mgx \cos \frac{\alpha}{2} = k(x - x_0) \cdot l \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (11)$$

Это уравнение имеет корень, соответствующий условию

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \Rightarrow \alpha = \pi \quad (x = 2l). \quad (12)$$

Второй корень находится из уравнения

$$mgx = kl(x - x_0) \Rightarrow x = \frac{x_0}{1 - \frac{mg}{kl}} = \frac{x_0}{1 - \frac{m(x_1 - x_0)}{m_0 l}}, \quad (11)$$

При выводе использовано выражение для жесткости жгута

$$m_0 g = k(x_1 - x_0) \Rightarrow k = \frac{m_0 g}{x_1 - x_0}. \quad (12)$$

Для анализа устойчивости найденных точек равновесия можно рассмотреть зависимость потенциальной энергии системы от длины шнура.

Потенциальная энергия системы включает:

- потенциальную энергию растянутого жгута $U_1 = \frac{k(x - x_0)^2}{2}$;

- потенциальную энергию подвешенного груза (относительно верхней точки крепления С) $U_2 = -mgz$.

Из теоремы Пифагора для треугольников $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ следует

$$\begin{cases} d^2 = x^2 - z^2 \\ d^2 = l^2 - (l - z)^2 = 2lz - z^2 \end{cases} \Rightarrow z = \frac{x^2}{2l} \quad (13)$$

Таким образом, выражение для полной потенциальной энергии приобретает вид

$$U = \frac{k(x - x_0)^2}{2} - mg \frac{x^2}{2l} = \frac{k}{2} \left((x - x_0)^2 - \frac{mg}{kl} x^2 \right) = \frac{k}{2} \left(\left(1 - \frac{mg}{kl} \right) x^2 - 2xx_0 + x_0^2 \right). \quad (14)$$

График этой зависимости есть парабола, с вершиной в точке

$$x = \frac{x_0}{1 - \frac{mg}{kl}}, \text{ что соответствует второму корню (11) уравнения равновесия.}$$

При $mg < kl$ ветви этой параболы направлены вверх, поэтому положение равновесия (11) является устойчивым, при больших массах $mg > kl$ это положение становится неустойчивым, устойчивым становится решение $x = 2l$.

Максимальное значение массы можно найти, положив в формуле (11) $x = 2l$:

$$\frac{x_0}{1 - \frac{m(x_1 - x_0)}{m_0 l}} = 2l \Rightarrow 2l - 2 \frac{m(x_1 - x_0)}{m_0} = x_0 \Rightarrow$$

$$m = m_0 \frac{2l - x_0}{2(x_1 - x_0)} \approx 8,4 \text{ кг}$$
(15)

Часть 3.

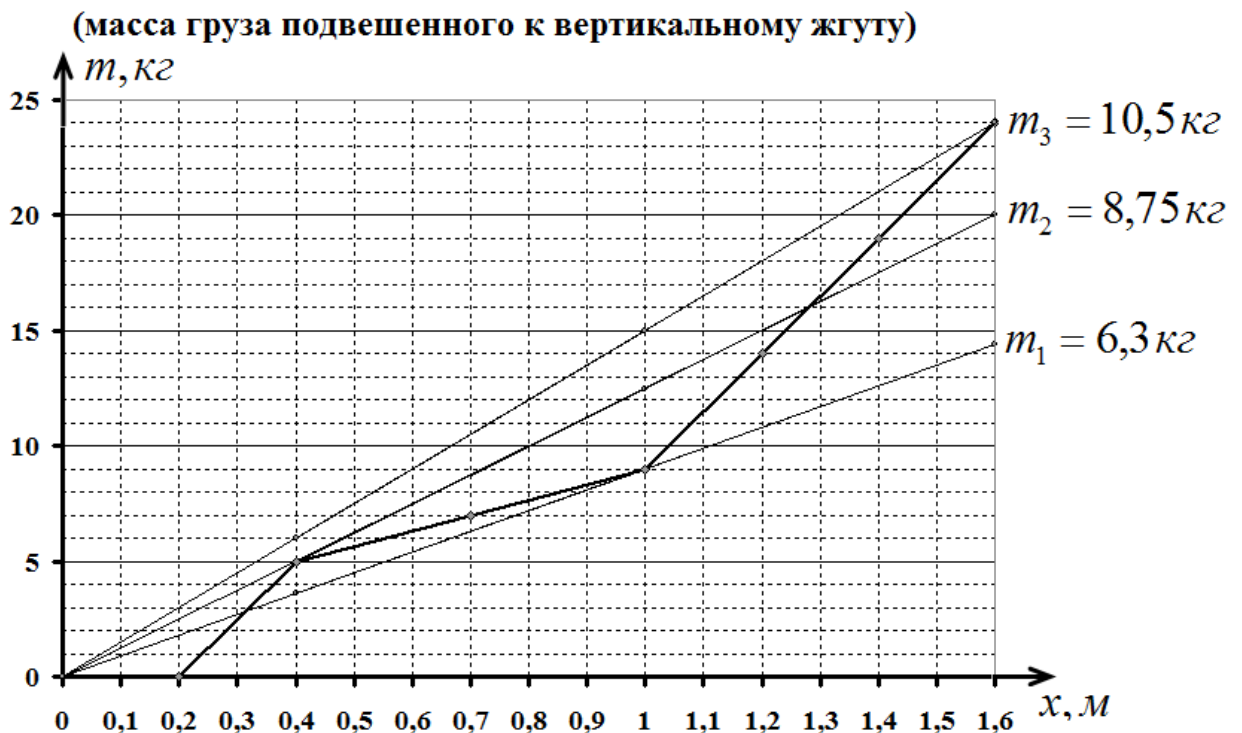
Запишем еще раз условие равновесия трубки:

$$mgl \sin \alpha = Fl \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow mg \cdot 2l \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = Fl \cos \frac{\alpha}{2}.$$
(16)

После сокращения на косинус половинного угла (не забывая о потерянном при этом корне), получим уравнение для определения x

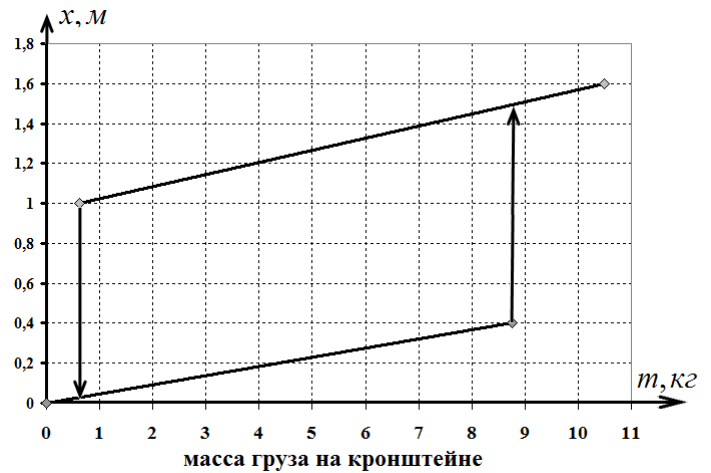
$$\frac{mg}{l} x = F(x).$$
(16)

Это уравнение можно решить графически (можно и аналитически), для этого необходимо построить график зависимости величины $\frac{1}{g} F(x)$, для этого достаточно «перевернуть» график зависимости длины шнура от массы подвешенного груза, приведенный в условии задачи. Затем на этом графике следует провести семейство прямых $f(x) = \frac{m}{l} x$ и найти точку их пересечения. Такие построения показаны на рисунке.



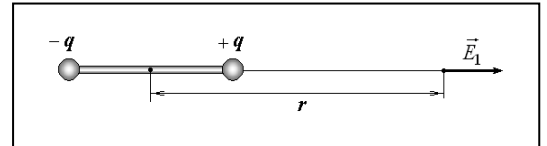
При массах груза, подвешенного кронштейну, меньших $m_1 = 6,3 \text{ кг}$ имеется одно положение равновесия. Длина шнура в этом случае линейно изменяется от нуля до 0,4 м. При массах больших $m_2 = 8,75 \text{ кг}$ также имеется одно положения равновесия. В этом интервале длина шнура линейно изменяется от 1 м до 24 м (когда масса груза достигает $m_3 = 10,5 \text{ кг}$).

В диапазоне масс от $m_1 = 6,3 \text{ кг}$ до $m_2 = 8,75 \text{ кг}$ есть три положения равновесия, центральное из которых является неустойчивым. Поэтому в этой области система обладает бистабильностью. Какое из возможных положений равновесия установится зависит от предыдущих состояний, следовательно, при увеличении нагрузки и последующем ее уменьшении будет наблюдаться петля гистерезиса (см. рис).



Задача 10. 2. До какой же степени..?

1. Напряженность электростатического поля E_1 , создаваемого диполем на больших расстояниях $r (r \gg l)$ вдоль линии, соединяющей заряды, найдем по принципу суперпозиции полей. Для этого следует построить векторную сумму напряженностей, создаваемых в точке наблюдения положительным \vec{E}_+ и отрицательным \vec{E}_- зарядами диполя



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$$

Поскольку векторы \vec{E}_+ и \vec{E}_- на этой прямой противоположны друг другу, то модуль их суммы

$$E_1 = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right). \quad (1)$$

Используя формулы приближенных вычислений $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x$ при малых x , получим

$$\frac{1}{\left(r \mp \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\left(1 \mp \frac{l}{2r}\right)^2} = \begin{cases} \alpha = -2 \\ x = \frac{l}{2r} \end{cases} = \frac{1}{r^2} \left(1 \pm \frac{l}{r}\right). \quad (2)$$

С учетом (2) выражение (1) примет вид

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{l}{r}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{l}{r}\right) \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для дипольного момента $p = ql$ системы, окончательно получаем

$$E_1(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}. \quad (4)$$

С учетом направления вектора дипольного момента \vec{p} системы (4) можно переписать в векторном виде (в решении не требуется)

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Таким образом, как следует из (4), модуль напряженности поля E_1 , создаваемого диполем вдоль его оси на больших расстояниях ($r \gg l$) убывает обратно пропорционально кубу расстояния r до диполя

$$E_1 \sim \frac{1}{r^3}. \quad (5)$$

Заметим, что выражение (4) можно получить и традиционным способом, без использования приведенного в условии приближенного равенства. Действительно, приняв обозначения

$$\begin{aligned} r_1 &= r - \frac{l}{2} \\ r_2 &= r + \frac{l}{2} \end{aligned}$$

перепишем (1) в виде

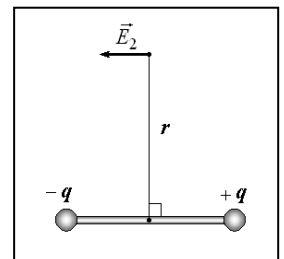
$$E_1 = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 r_1^2}.$$

С учетом того, что $r_2^2 - r_1^2 = 2rl$, и в рамках принятых приближений можно считать, что $r_2^2 \cdot r_1^2 \approx r^4$, получим

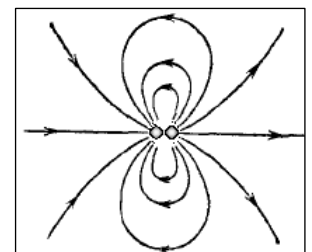
$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2rl}{r^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}.$$

Интересно, что зависимость, подобная (5), сохраняется и при нахождении напряженности поля E_2 «перпендикулярно» диполю, т.е. на прямой, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его центр. В этом случае изменяется только безразмерный коэффициент

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}.$$



Общая картина силовых линий диполя на большом расстоянии от него дана на рисунке справа. Расположение положительного и отрицательного зарядов диполя соответствует расположению, приведенному в условии задачи.



2. Согласно закону Кулона пробный заряд q_0 (он является

положительным точечным зарядом) будет притягиваться к точечному заряду $-q_1$ в вакууме с силой

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0 q_1}{r^2}. \quad (6)$$

Согласно третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой F_1 заряд $-q_1$ будет притягиваться к заряду q_0 .

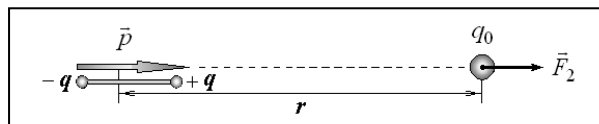
Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_1 \sim \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 2. \quad (7)$$

3. При взаимном расположении диполя \vec{p} и пробного заряда q_0 как на рисунке взаимодействие будет носить характер отталкивания, поскольку одноименный (положительный) заряд диполя находится ближе к пробному (положительному) заряду, чем разноименный (отрицательный). В таком случае силы отталкивания преобладают над



силами притяжения, что приводит к возникновению результирующей силы \vec{F}_2 , направленной вправо (см. рис).

Следовательно, в данном случае диполь будет отталкивать пробный заряд вдоль своей оси с силой

$$F_2 = q_0 E_1(r) = \{(4)\} = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}. \quad (8)$$

Заметим, что при изменении ориентации диполя ($-\vec{p}$), характер взаимодействия диполя с пробным зарядом изменится с отталкивания на притяжение.

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

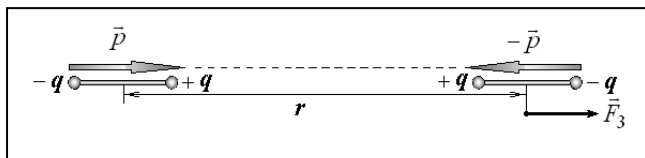
$$F_2 \sim \frac{1}{r^3}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 3. \quad (9)$$

4. Для определенности будем считать, что левый диполь \vec{p} создает напряженность поля в пространстве, которое действует на правый диполь $-\vec{p}$.

Поскольку одноименные заряды диполей находятся на меньших



расстояниях, чем разноименные, то согласно закону Кулона сила отталкивания в системе будет больше силы притяжения.

Это приведет к возникновению результирующей силы \vec{F}_3 отталкивания между диполями, направленной вправо (см. рис.).

Используя (4), для рассматриваемой системы можем записать

$$F_3 = q \left(E_1 \left(r - \frac{l}{2} \right) - E_1 \left(r + \frac{l}{2} \right) \right) = \frac{qp}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2} \right)^3} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2} \right)^3} \right). \quad (10)$$

С помощью формулы приближенного вычисления $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x$ (при $x \rightarrow 0$) в данном случае находим

$$\frac{1}{\left(r \mp \frac{l}{2} \right)^3} = \frac{1}{r^3} \cdot \frac{1}{\left(1 \mp \frac{l}{2r} \right)^3} = \begin{cases} \alpha = -3 \\ x = \frac{l}{2r} \end{cases} = \frac{1}{r^3} \left(1 \pm \frac{3l}{2r} \right).$$

Соответственно, разность в выражении (10) примет вид

$$\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2} \right)^3} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2} \right)^3} \approx \frac{3l}{r^4}.$$

С учетом того, что $p = ql$, окончательно получим

$$F_3 = \frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^4}. \quad (11)$$

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_3 \sim \frac{1}{r^4}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 4. \quad (12)$$

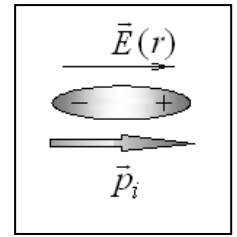
Заметим, что выражение (11) проще получить, используя производную от (4) по расстоянию r , поскольку искомая сила F_3 вычисляется как

$$F_3 = -p \frac{\partial E}{\partial r},$$

однако подобный подход выходит за рамки действующей школьной программы.

5. Будем считать, что напряженность $E(r)$ электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q_0 в области нахождения молекулы, меняется незначительно (в силу малости размеров молекулы) и равна

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{r^2}.$$

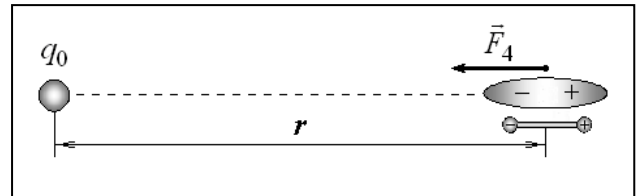


Тогда индуцированный дипольный момент молекулы примет значение

$$p_i = \alpha\epsilon_0 E(r) = \alpha\epsilon_0 \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_0}{r^2} = \frac{\alpha}{4\pi} \cdot \frac{q_0}{r^2}.$$

В пункте 3 задачи мы вычислили силу взаимодействия диполя и точечного заряда, правда в рассматриваемом случае индуцированный (наведенный) дипольный момент \vec{p}_i имеет противоположное направление («от заряда»), что приведет к возникновению в данной системе силы притяжения.

Используя (8) и третий закон Ньютона, найдем силу притяжения вынужденно поляризованной молекулы к точечному заряду



$$F_4 = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p_i}{r^3} = \frac{q_0}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \cdot \frac{q_0}{r^2} = \frac{\alpha q_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^5} \quad (13)$$

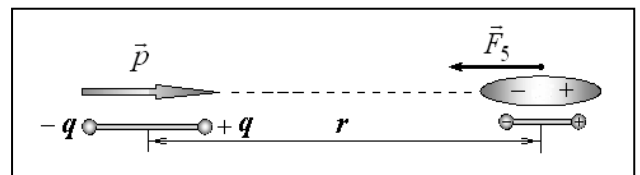
Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_4 \sim \frac{1}{r^5}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 5. \quad (14)$$

6. Будем считать, что напряженность электростатического поля, создаваемого диполем \vec{p} в области нахождения молекулы, меняется незначительно. Тогда согласно (4) можем записать



$$E(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}.$$

Соответственно, индуцированный дипольный момент молекулы в этом случае примет значение

$$p_i = \alpha\epsilon_0 \cdot \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{p}{r^3}. \quad (15)$$

В пункте 4 задачи мы вычислили силу отталкивания между диполями, ориентированными «навстречу» друг другу. В данном случае диполи ориентированы в

одном направлении, поскольку наведенный дипольный момент всегда ориентирован «по полю». Это обстоятельство приведет к возникновению силы притяжения между диполями в рассматриваемой системе.

Считая взаимодействие диполей по формуле (11), получим величину силы притяжения между ними для рассматриваемого случая

$$F_5 = \frac{3p \cdot p_i}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{3p}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{p}{r^3} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{3\alpha p^2}{4\pi^2\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^7}. \quad (16)$$

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_5 \sim \frac{1}{r^7}.$$

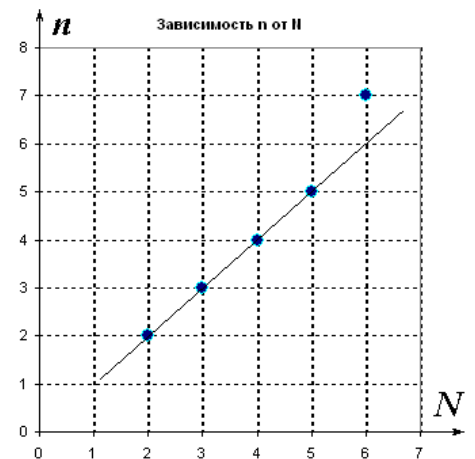
Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 7. \quad (17)$$

Интересно, что в пунктах 3 и 4 задачи имеет место сила отталкивания между объектами, а в пунктах 5 и 6, связанных с индуцированным дипольным моментом, всегда имеет место сила притяжения.

Это связано с тем, что направление напряженности внешнего электрического поля однозначно определяет направление возникающего дипольного момента \vec{p} поляризуемого объекта — он всегда ориентирован «по силовой линии» внешнего (индуцирующего) поля.

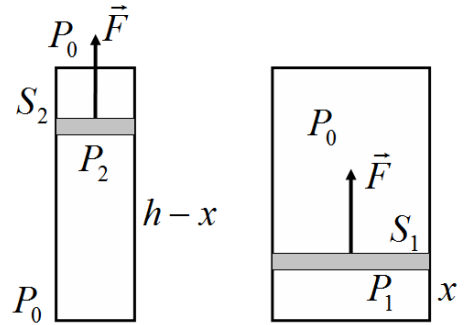
В завершение задачи на рисунке справа приведена достаточно забавная (но верная!) зависимость показателя степени n в выражении для силы взаимодействия F_i от номера N пункта задачи.



Как говорится, комментарии излишни, но так и не понятно, почему последняя точка не ложится «на прямую». Было бы так красиво...

Задача 10-3 «Пароатмосферная машина Ньюкомена»

Обозначим давление пара в рабочем цилиндре P_1 , а давление воды на поршень цилиндра насоса P_2 . Так как поршни движутся равномерно, то сумма сил, действующих на них равна нулю. Кроме того, так как коромысло уравновешено, силы натяжений тросов, прикрепленных к поршням равны. Если поршень рабочего цилиндра находится на высоте x , то поршень насоса находится на высоте $h-x$. Выразим эти условия в уравнениях



$$\begin{cases} F = (P_0 - P_2)S_2 \\ F = (P_0 - P_1)S_1 \end{cases} \Rightarrow P_1 = P_0 - (P_0 - P_2) \frac{S_2}{S_1}. \quad (1)$$

Очевидно, что

$$P_0 - P_2 = \rho g(h - x) \quad (2)$$

При опускании поршня насоса, и

$$P_0 - P_2 = \rho g(H + h - x) \quad (3)$$

При его подъеме.

Таким образом, зависимости давления от положения поршня рабочего насоса имеют вид:

- при подъеме поршня рабочего цилиндра

$$P_1 = P_0 - \rho g(h - x) \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = 1 - \frac{\rho g h S_2}{P_0 S_1} \left(1 - \frac{x}{h}\right); \quad (4)$$

- при его опускании

$$P_1 = P_0 - \rho g(H + h - x) \frac{S_2}{S_1} \Rightarrow \frac{P_1}{P_0} = 1 - \frac{\rho g h S_2}{P_0 S_1} \left(1 + \frac{H}{h} - \frac{x}{h}\right). \quad (5)$$

Обозначим параметр системы (и вычислим его численное значение):

$$b = \frac{\rho g h S_2}{P_0 S_1} = \frac{1,0 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1}{1,0 \cdot 10^5} \left(\frac{20}{60}\right)^2 = 1,11 \cdot 10^{-2}. \quad (6)$$

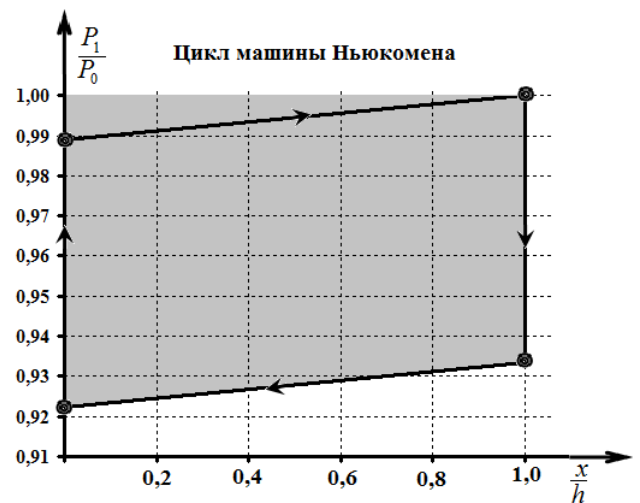
Таким образом, в «безразмерных параметрах» зависимости давления пара от высоты подъема имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{P_1}{P_0} = (1 - b) + b \frac{x}{h} \\ \frac{P_1}{P_0} = \left(1 - b \left(1 + \frac{H}{h}\right)\right) + b \frac{x}{h} \end{cases}. \quad (7)$$

Теперь не представляет труда построить диаграмму циклического процесса.

Из рассмотрения процесса следует, что максимальная температура пара в цикле равна $t_{\max} = 100^\circ\text{C}$. Минимальная температура равна температуре кипения при минимальном давлении в цикле, т.е. при

$$P_{\min} = P_0 \left(1 - b \left(1 + \frac{H}{h}\right)\right) = 0,92 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (7)$$



Для определения соответствующей температуры необходимо воспользоваться предлагаемой в условии линеаризацией зависимости температуры кипения от давления.

Так изменение температуры при единичном изменении давления равен

$$\frac{\Delta t}{\Delta P} = \frac{110 - 100}{(1,4 - 1,0) \cdot 10^5} = 25 \cdot 10^{-5} \frac{K}{Pa}. \quad (8)$$

Следовательно, искомая температура будет равна

$$t_{\min} = t_0 - \left(\frac{\Delta t}{\Delta P} \right) (P_0 - P_{\min}) = 100^\circ C - 25 \cdot 10^{-5} \cdot 0,08 \cdot 10^5 = 98^\circ C. \quad (9)$$

Полезную работу, фактически, совершает атмосферное давление! Работа, совершенная за цикл, отмечена на диаграмме заливкой. Численное значение этой работы

$$A = P_0 \cdot (1 - 0,93) \cdot \pi \frac{d_1^2}{4} h = 2,0 \cdot 10^3 \text{ Дж}. \quad (10)$$

Теплота от нагревателя поступает на испарение воды (практически при атмосферном давлении), для заполнения котла. Максимальная масса пара в рабочем цилиндре находится из уравнения состояния

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow m = \frac{MPV}{RT} = \frac{18 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 0,3^2 \cdot 1}{8,31 \cdot 373} \approx 1,6 \cdot 10^{-1} \text{ кг}. \quad (11)$$

Количество теплоты, требуемое на испарение,

$$Q = Lm = 3,7 \cdot 10^5 \text{ Дж}. \quad (12)$$

Теперь можно рассчитать КПД машины

$$\eta = \frac{A}{Q} = 5,4 \cdot 10^{-3}. \quad (13)$$

На нагревание котла требуется количество теплоты

$$Q_1 = c_1 m_1 \Delta t = 0,46 \cdot 10^3 \cdot 200 \cdot 2 = 1,8 \cdot 10^5 \text{ Дж}. \quad (14)$$

Следовательно, с учетом теплоемкости котла, КПД понижается до

$$\eta' = \frac{A}{Q + Q_1} = 3,6 \cdot 10^{-3}. \quad (15)$$

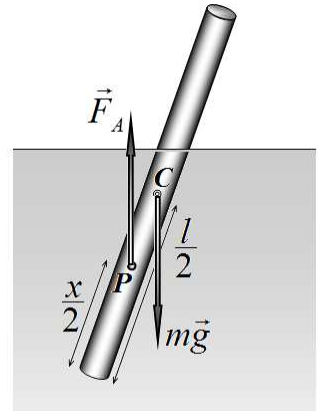
Наконец, КПД машины, работающей по циклу Карно в том же диапазоне температур, равен

$$\eta_0 = \frac{\Delta T}{T_0} = \frac{2}{373} \approx 5,4 \cdot 10^{-3}. \quad (16)$$

что, как это не удивительно, совпадает с ранее полученным результатом.

Задача 11-1. Поплавок

1. Сила тяжести, приложена к центру масс стержня C , который находится в его середине на расстоянии $\frac{l}{2}$ от его конца. Сила Архимеда приложена к центру масс вытесненной воды точке P , которая находится на расстоянии $\frac{x}{2}$ от его конца (x - глубина погруженной части стержня). Так как поплавок плавает, то $x < l$, поэтому точка приложения силы тяжести находится выше точке приложения силы Архимеда. Поэтому вертикальное положение стержня неустойчиво – при малейшем случайном отклонении от вертикали возникает момент сил, стремящийся опрокинуть поплавок (см. рис.)



2-4. На поплавок действуют:

- сила тяжести $m_1 \vec{g}$;
- сила Архимеда $\vec{F}_{A1} = -\rho_0 V_x \vec{g} = -\rho_0 \frac{m_1 x}{\rho_1 l} \vec{g}$;

на грузило также действуют сила тяжести $m_2 \vec{g}$ и сила Архимеда

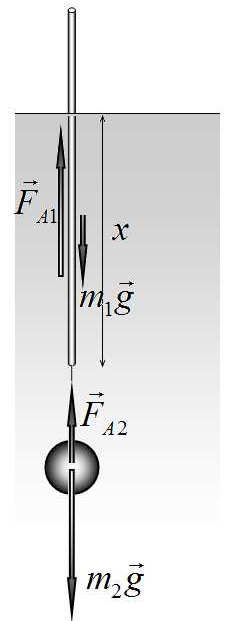
$\vec{F}_{A1} = -\rho_0 V_2 \vec{g} = -\rho_0 \frac{m_2}{\rho_2} \vec{g}$. Так как векторная сумма этих сил у нас будет

часто встречаться в дальнейшем, то обозначим ее

$$\mu \vec{g} = m_2 \vec{g} + \vec{F}_{A2} = m_2 \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2} \vec{g}$$

Условие равновесия поплавка записывается в виде следующего уравнения (сумма сил равна нулю):

$$\mu g + m_1 g = \rho_0 \frac{m_1 x}{\rho_1 l} g. \quad (1)$$



Из этого уравнения находим длину погруженной части поплавка

$$x = l \cdot \frac{\rho_1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\mu}{m_1} \right). \quad (2)$$

Максимальной массе грузила соответствует погружение на всю длину поплавка. В этом случае из формулы (2) следует

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\mu}{m_1} \right) = 1 \Rightarrow \mu = m_1 \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) \Rightarrow m_{2\max} = m_1 \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right). \quad (3)$$

5. На рисунке изображены силы, действующие на поплавок с грузилом, в том случае. Когда поплавок отклонился на угол α . Второе условие равновесия (равенство нулю суммы моментов сил) можно записать относительно точки C - центра масс поплавка

$$\mu g \frac{l}{2} \sin \alpha = F_{A1} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right) \sin \alpha. \quad (3)$$

Это условие очевидно выполняется при $\alpha = 0$, т.е. при вертикальном положении поплавка. Исследуем возможности других решений. С учетом того, $F_{A1} = (\mu + m_1)g$ и после сокращения на синус угла отклонения, получим

$$\mu = (\mu + m_1) \left(1 - \frac{x}{l} \right). \quad (4)$$

Из этого уравнения получим выражение для длины погруженной части:

$$\mu = (\mu + m_1) \left(1 - \frac{x}{l} \right) \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{m_1}{\mu + m_1}, \quad (5)$$

которое в общем случае не совпадает с выражением (2), полученным из условия равновесия сил.

Следовательно, других положений равновесия, кроме вертикального или горизонтального нет!

Единственный, исключительный вариант при котором поплавок находится в равновесии при любом угле наклона можно найти, приравнявая решения (2) и (5):

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \left(1 + \frac{\mu}{m_1} \right) = \frac{m_1}{\mu + m_1} \Rightarrow \left(1 + \frac{\mu}{m_1} \right)^2 = \frac{\rho_0}{\rho_1} \Rightarrow \mu = m_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1 \right).$$

Учитывая определение μ , получим

$$m_2^* \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2} = m_1 \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1 \right) \Rightarrow m_2^* = m_1 \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_0} \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1 \right). \quad (6)$$

Поплавок займет вертикальное положение при

$$\mu g \frac{l}{2} > F_{A1} \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2} \right). \quad (7)$$

Это неравенство выполняется при $m_2 > m_2^*$

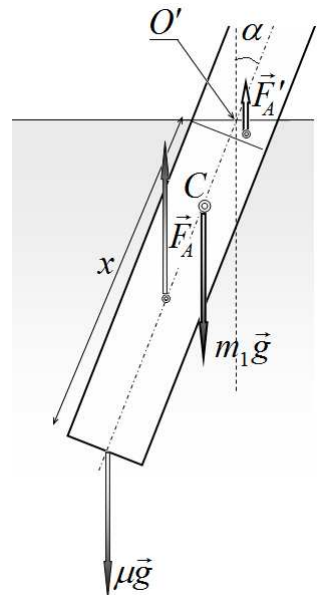
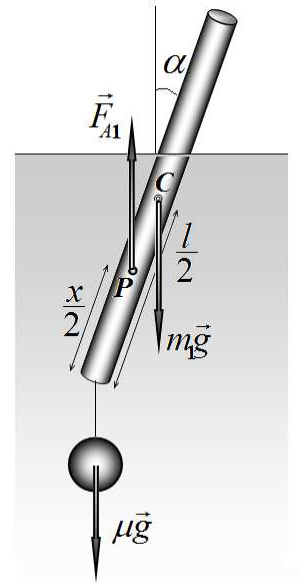
6. При вертикальном положении поплавка сила тяжести уравновешивается силой Архимеда, поэтому

$$F_{A1} = \mu g + m_1 g. \quad (8)$$

Из этого уравнения легко найти длину погруженной части поплавка

$$F_{A1} = \mu g + m_1 g \Rightarrow \pi R^2 x_0 \rho_0 g = \mu g + m_1 g \Rightarrow x_0 = \frac{\mu + m_1}{\pi R^2 \rho_0} \quad (9)$$

7. Силы, действующие на поплавок в наклонном положении, изображены на рисунке.



Так как величина x_0 не изменяется, то, во-первых, она определяется формулой (9), во-вторых, из геометрии системы следует, что

$$x_0 = x + R \operatorname{tg} \alpha . \quad (10)$$

Рассчитаем модули сил и их моменты:

Сила тяжести поплавка:

$$\begin{aligned} F_1 &= m_1 g \\ M_1 &= m_1 g \left(x_0 - \frac{l}{2} \right) \sin \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Сумма сил, действующих на грузило:

$$\begin{aligned} F_2 &= \mu g \\ M_2 &= \mu g \cdot x_0 \sin \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Сила Архимеда, действующая на нижнюю цилиндрическую часть стержня

$$\begin{aligned} F_{A1} &= \pi R^2 \rho_0 g x = \pi R^2 \rho_0 g (x_0 - R \cdot \operatorname{tg} \alpha) \\ M_{A1} &= \pi R^2 \rho_0 g (x_0 - R \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \left(\frac{x}{2} + R \cdot \operatorname{tg} \alpha \right) \sin \alpha = \\ &= \pi R^2 \rho_0 g \frac{1}{2} (x_0^2 - R^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Сила Архимеда, действующая на «срезанную часть»

$$\begin{aligned} F'_A &= \pi R^3 \rho_0 g \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ M'_A &= F'_A \cdot d_0 = \pi \frac{R^4}{8} \rho_0 g \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \left(5 \cos \alpha - \frac{3}{\cos \alpha} \right) = \pi R^2 \rho_0 g \frac{1}{8} R^2 \left(5 - \frac{3}{\cos^2 \alpha} \right) \sin \alpha = \\ &= \pi R^2 \rho_0 g \frac{1}{8} R^2 (2 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin \alpha \end{aligned} \quad (13)$$

Условия равновесия записываются в виде двух уравнений:

Сумма сил равна нулю:

$$\mu g + m_1 g = \pi R^2 x \rho_0 g + \pi R^3 \rho_0 g \cdot \operatorname{tg} \alpha . \quad (14)$$

Это условие выполняется при выполнении соотношения (10).

Сумма моментов сил равна нулю (относительно точки O')

$$M_1 + M_2 + M'_A - M_{A1} = 0 \quad (15)$$

Подставим в это уравнение найденные моменты сил.

Так как все они пропорциональны синусу угла наклона, то на него сразу сократим, не забывая о корне $\alpha_0^* = 0$ уравнения (15). Итак, после сокращения получаем

$$m_1 \left(x_0 - \frac{l}{2} \right) + \mu \cdot x_0 + \pi R^2 \rho_0 \frac{1}{8} R^2 (2 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha) - \pi R^2 \rho_0 \frac{1}{2} (x_0^2 - R^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha) = 0 \quad (16)$$

Это уравнение удобно разделить на величину $\pi R^2 \rho_0$, тогда после элементарных преобразований получим уравнение

$$\frac{1}{2}x_0^2 - \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2 + \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{8}R^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = 0. \quad (17)$$

В преобразования использовано соотношение $\frac{m_1}{\pi R^2 \rho_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} l$.

Уравнение (17) имеет решения (а следовательно поплавок другие положения равновесия) при выполнении условия

$$2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2 - x_0^2\right) - R^2 > 0 \quad (18)$$

И это решение есть

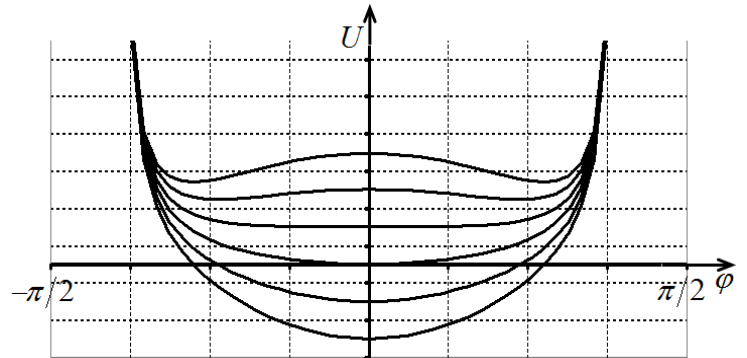
$$\operatorname{tg} \alpha^* = \sqrt{4\frac{\rho_1}{\rho_0}\frac{l^2 - x_0^2}{R^2} - 2R^2}. \quad (19)$$

Можно показать, что при наличии решения (19), это положение равновесия устойчиво, а при вертикальное неустойчиво. Если условие (18) не выполняется, то единственным и устойчивым положением равновесия является вертикальное.

Доказательство этого утверждения может быть проведено различными способами. Например, по анализу потенциальной кривой. Так, не сложно показать, что потенциальная энергия системы пропорциональна следующей функции угла наклона

$$U \propto (\operatorname{tg}^2 \alpha + b) \cos \alpha \quad (20)$$

где обозначено $b = \frac{4\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2 - x_0^2\right) - 2R^2}{R^2}$. На рисунке показан вид этой функции при



последовательном увеличении параметра b от -2 до 6 . При отрицательных значениях этого параметра потенциальная кривая имеет единственный минимум (в нуле), когда же этот параметр становится положительным, экстремум в нуле становится максимумом, но появляются два минимума вблизи горизонтального положения.

Задача 11-2 Фотоэлемент.

Часть 1. Идеальный фотоэлемент

1.1 Ток в нагрузке равен разности фототока и тока текущего через диод:

$$I_H = I_\Phi - I_D \quad (1)$$

Напряжение на нагрузке такое же, как и на диоде. Подставляя $I_H = \frac{U_H}{R}$ и $I_D = CU_H^2$, получим квадратное уравнение:

$$CU_H^2 + \frac{1}{R}U_H - I_\Phi = 0 \quad (2)$$

Решение имеет вид:

$$U_H = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4CR^2 I_\Phi}}{2RC} \quad (3)$$

Ток в нагрузке:

$$I_H = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4CR^2 I_\Phi}}{2CR^2} \quad (4).$$

1.2 Подставляя в (1) $I_D = CU_H^2$, получим связь между током и напряжением:

$$I_H = I_\Phi - CU_H^2 \quad (5).$$

1.3 При нулевом сопротивлении, напряжение на нагрузке равно нулю. А при большом сопротивлении нагрузки – ток равен нулю. Исходя из (5):

$$I_{КЗ} = I_\Phi \quad (6),$$

$$U_{ХХ} = \sqrt{\frac{I_\Phi}{C}} \quad (7).$$

1.4 График зависимости $I_H(U_H)$ – ветвь параболы. Вершина имеет координаты $(0, I_{КЗ})$, точка пересечения с осью абсцисс – $U_{ХХ}$.

1.5 Умножим обе части равенства (5) на U_H :

$$I_H U_H = P_H = I_\Phi U_H - CU_H^3 \quad (8).$$

Приравняв к нулю производную по напряжению, получим:

$$U_{Pmax} = \sqrt{\frac{I_\Phi}{3C}} \quad (9).$$

Соответственно:

$$P_{max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{I_\Phi^3}{3C}} \quad (10),$$

$$I_{Pmax} = I_\Phi - CU_{Pmax}^2 = \frac{2}{3} I_\Phi \quad (11),$$

$$R_{Pmax} = \frac{U_{Pmax}}{I_{Pmax}} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sqrt{3CI_\Phi}} \quad (12).$$

1.6 Используя численные значения, получим:

$$I_{КЗ} = 1,0 \text{ мА} \quad (13),$$

$$U_{ХХ} = 0,50 \text{ В} \quad (14),$$

$$I_{Pmax} = 0,67 \text{ мА} \quad (15),$$

$$U_{Pmax} = 0,29 \text{ В} \quad (16),$$

$$R_{Pmax} = 433 \text{ Ом} \quad (17),$$

$$P_{max} = 0,19 \text{ мВт} \quad (18).$$

Часть 2. Потери энергии в фотоэлементе

2.1 Фототок I_Φ разделяется на три части: ток диода I_D , ток через параллельное соединение $I_{ПАР}$ и ток через последовательное сопротивление и нагрузку I_H :

$$I_\Phi = I_D + I_{ПАР} + I_H \quad (19).$$

Напряжение на диоде и параллельном сопротивлении, можно выразить через ток в нагрузке:

$$U_D = U_{ПАР} = I_H (R_H + R_{ПОС}) \quad (20).$$

Тогда:

$$I_D = CI_H^2 (R_H + R_{ПОС})^2 \quad (21),$$

$$I_{ПАР} = I_H \frac{R_H + R_{ПОС}}{R_{ПАР}} \quad (22).$$

Подставляя эти выражения в (19) получим квадратное уравнение относительно I_H :

$$C(R_H + R_{ПОС})^2 I_H^2 + \frac{R_H + R_{ПОС} + R_{ПАР}}{R_{ПАР}} I_H - I_\Phi = 0 \quad (23).$$

Решение уравнения:

$$I_H = \frac{-\frac{R_H + R_{ПОС} + R_{ПАР}}{R_{ПАР}} + \sqrt{\left(\frac{R_H + R_{ПОС} + R_{ПАР}}{R_{ПАР}}\right)^2 + 4I_\Phi C(R_H + R_{ПОС})}}{2C(R_H + R_{ПОС})} \quad (24).$$

Напряжение на нагрузке $U_H = I_H R_H$.

2.2 Вместо уравнения (20) запишем:

$$U_D = U_{ПАР} = U_H + I_H R_{ПОС} \quad (25).$$

Подставив в (19) получим искомую связь:

$$C(U_H + I_H R_{ПОС})^2 + \frac{U_H + I_H (R_{ПОС} + R_{ПАР})}{R_{ПАР}} - I_\Phi = 0 \quad (26).$$

2.3 Подставив в выражение (24) значение $R_H = 0$, получим ток короткого замыкания:

$$I_{КЗ} = \frac{-\frac{R_{ПОС} + R_{ПАР}}{R_{ПАР}} + \sqrt{\left(\frac{R_{ПОС} + R_{ПАР}}{R_{ПАР}}\right)^2 + 4I_\Phi C R_{ПОС}}}{2C R_{ПОС}} \quad (27).$$

Аналогичное решение можно получить, полагая в уравнении (26) $U_H = 0$.

Напряжение холостого хода найдем, приняв в (26) $I_H = 0$.

$$U_{ХХ} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4I_\Phi C R_{ПАР}}}{2C R_{ПАР}} \quad (28).$$

2.4 Численные значения тока короткого замыкания и напряжения холостого хода:

$$I_{КЗ} = 0,88 \text{ мА} \quad (29),$$

$$U_{ХХ} = 0,39 \text{ В} \quad (30).$$

2.5 Подставим численные значения в (26) и умножим обе части на 10^3 :

$$4(U_H + 100I_H)^2 + U_H + 1100I_H = 1 \quad (31).$$

Раскрыв скобки, получим:

$$4U_H^2 + 10^4 I_H^2 + 800U_H I_H + U_H + 1100I_H = 1 \quad (32),$$

Т.к. ток всегда меньше 10^{-3} А , то слагаемым $10^4 I_H^2$ можно пренебречь.

Запишем уравнение в следующем виде:

$$I_H(1100 + 800U_H) = 1 - 4U_H^2 - U_H \quad (33).$$

Величина $800U_H$ изменяется незначительно – от 0 до 312. Положи ее равной 150.

Окончательно получим:

$$I_H = \frac{1 - 4U_H^2 - U_H}{1250} \quad (34).$$

На рисунке изображены графики зависимости $I_H(U_H)$.

Заметим, что отличия от точного построения невелики и проявляются при малых напряжениях

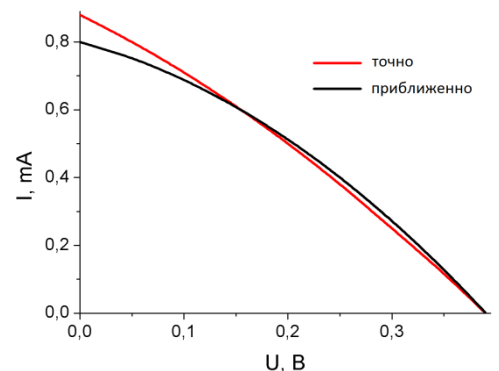
2.6 Используя удачное приближение из предыдущего пункта, можем записать:

$$P = I_H U_H = \frac{U_H - 4U_H^3 - U_H^2}{1250} \quad (35).$$

Приравняв к нулю производную, получим:

$$U_{Pmax} = 0,22 \text{ В} \quad (36);$$

$$P_{max} = 0,10 \text{ мВт} \quad (37).$$



Задача 11 - 3.

«Два генератора»

Часть 1. Круглый генератор.

Переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. В данном случае силовыми линиями электрического поля будут концентрические окружности, плоскость которых перпендикулярна линиям индукции магнитного поля. Рассмотрим кольцо радиуса a_k . Согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, переменной магнитное поле порождает в нем ЭДС индукции равную

$$\varepsilon_k = -\frac{\Delta\Phi_k}{\Delta t}, \quad (1)$$

где $\Phi_k = \pi a_k^2 B_0 \cos \omega t$ - магнитный поток через это кольцо. Следовательно, ЭДС индукции этого кольца равна

$$\varepsilon_k = -\frac{\Delta\Phi_k}{\Delta t} = \pi a_k^2 B_0 \omega \sin \omega t. \quad (2)$$

Электрическое сопротивление кольца равно

$$r_k = \rho \frac{2\pi a_k}{(\pi d^2)/4} = 8\rho \frac{a_k}{d^2}. \quad (3)$$

Если пренебречь сопротивлением амперметра, то сила тока через него будет равна

$$i_0 = \sum_k i_k = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{r_k} = \sum_k \frac{\pi a_k^2 B_0 \omega \sin \omega t}{8\rho \frac{a_k}{d^2}} = \frac{\pi d^2 a_0}{8\rho} B_0 \omega \sin \omega t \sum_{k=1}^{10} k = \frac{55 \pi d^2 a_0}{8 \rho} B_0 \omega \sin \omega t$$

Действующее значение силы тока, соответственно, в этом случае равно

$$I_0 = \frac{55 \pi d^2 a_0}{8\sqrt{2} \rho} B_0 \omega. \quad (4)$$

Если учесть сопротивление амперметра, то для каждого кольца можно записать

$$\varepsilon_k = i_k r_k + i_0 R. \quad (5)$$

Разделим эти уравнения на r_k и просуммируем по всем кольцам, в итоге получим

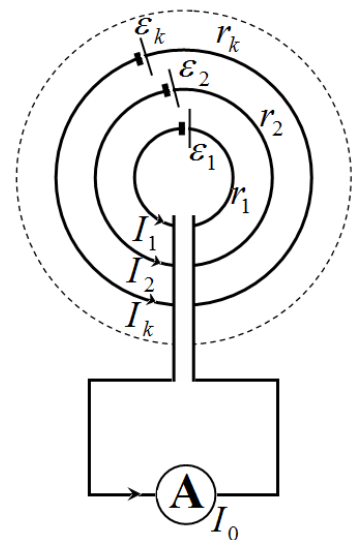
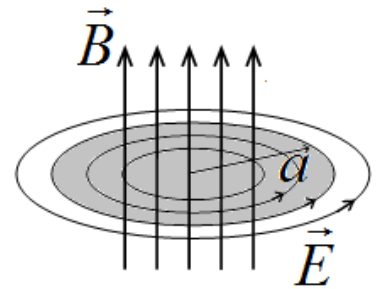
$$i_0 = \sum_k i_k = \sum_k \frac{\varepsilon_k}{r_k} - i_0 R \sum_k \frac{1}{r_k} \Rightarrow i_0 = \frac{\sum_k \varepsilon_k}{1 + R \sum_k \frac{1}{r_k}}. \quad (6)$$

Сумма в числителе подсчитана. Вычислим сумму проводимостей

$$\sum_k \frac{1}{r_k} = \frac{d^2}{8\rho a_0} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx \frac{d^2}{8\rho a_0} \cdot 2,930 \approx 0,366 \frac{d^2}{\rho a_0} \quad (7)$$

Теперь можно записать окончательное выражение для действующего значения силы тока в этом случае

$$I = \frac{\frac{55 \pi d^2 a_0}{8\sqrt{2} \rho} B_0 \omega}{1 + 0,366 R \frac{d^2}{\rho a_0}} = \frac{15,27 \cdot d^2 a_0^2 B_0 \omega}{\rho a_0 + 0,366 R d^2}. \quad (8)$$



Часть 2. Прямоугольный генератор.

На каждый электрон в движущемся проводнике в области магнитного поля действует сила Лоренца

$$F = eBv. \quad (1)$$

Эта сила совершает работу по перемещению электрона поперек движущейся ленты, то есть создает ЭДС, равную

$$\varepsilon = Bva. \quad (2)$$

Электрическое сопротивление участка ленты, находящейся в электрическом поле, равно

$$r = \rho \frac{a}{bh}. \quad (3)$$

По закону Ома сила тока в контуре определяется выражением

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R} = \frac{Bva}{R + \rho \frac{a}{bh}} \quad (4)$$

Со стороны магнитного поля на этот ток действует сила Ампера, направленная в сторону противоположную вектору скорости ленты и равная

$$F = Iba = \frac{B^2 a^2}{R + \rho \frac{a}{bh}} v. \quad (5)$$

Чтобы лента двигалась равномерно, необходимо ее тянуть с такой же по модулю силой. Эта сила развивает мощность

$$P_0 = Fv = \frac{B^2 a^2}{R + \rho \frac{a}{bh}} v^2. \quad (6)$$

Мощность, выделяющаяся на резисторе может быть рассчитана по закону Джоуля-Ленца

$$P = I^2 R = \frac{B^2 v^2 a^2}{\left(R + \rho \frac{a}{bh}\right)^2} R. \quad (7)$$

Наконец, КПД генератора равно

$$\eta = \frac{P}{P_0} = \frac{R}{R + \rho \frac{a}{bh}}, \quad (8)$$

что равно традиционному отношению сопротивления нагрузки к полному сопротивлению цепи.

