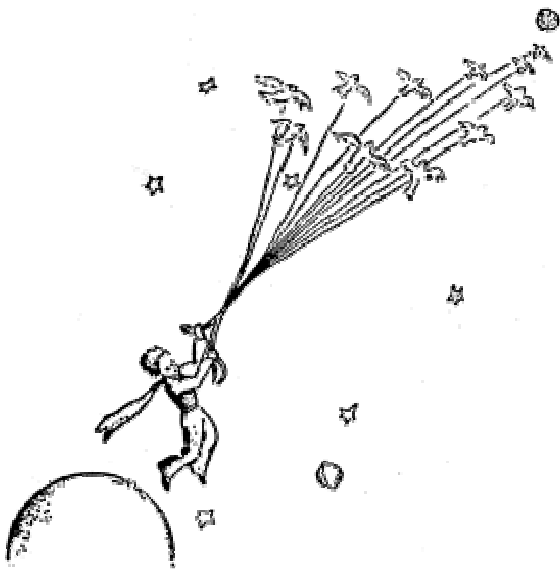




*А.И. Слободянюк  
В.О. Богомоллов  
А.А. Мищук  
Л.Г. Маркович*



*Республиканская  
физическая  
олимпиада  
2009 года  
(заключительный этап)*

*Теоретический тур.*

*Минск  
2009*

**УТВЕРЖДЕНО**  
Заместитель председателя оргкомитета  
Республиканской олимпиады

\_\_\_\_\_ К.С. Фарино.

«\_\_\_\_\_» марта 2009 года



***Республиканская физическая олимпиада  
(заключительный этап)  
2009 год  
Теоретический тур.***

**9 класс**

1. Полный комплект состоит из трех не связанных между собой заданий.
2. Время выполнения заданий – 5 часов.
3. При оформлении работы каждую задачу начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету, *обеспечим!*
4. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.
5. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.





## Задание 1. «Маленький принц»

Согласно «теории» Антуана де Сент Экзюпери к нам на Землю прилетал Маленький Принц. Родиной героя являлась малая планета, судя по всему – астероид. Примем за родину Маленького принца Астероид со следующими характеристиками:

Астероид движется вокруг Солнца по круговой орбите радиусом 2,5 а.е. в том же направлении, что и Земля.

Астероид представляет собой шар радиусом  $r_A = 10 \text{ км}$ .

Средняя плотность вещества Астероида  $\rho = 2,7 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

**Справочные данные.** Среднее расстояние от Земли до Солнца называют астрономической единицей 1 а.е. =  $1,46 \cdot 10^{11} \text{ м}$ .

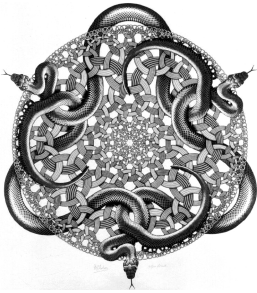
Год на Земле длится 1 год. Сутки на Земле 1сут.=24 часа. Ускорение свободного падения на поверхности земли принять равным  $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ . Гравитационная постоянная

$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ . Объем шара рассчитывается по формуле  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$



*Справка.* В Солнечной системе между орбитами Марса и Юпитера существует пояс астероидов (звездopodobных, малых планет). В 2000 году каталог зарегистрированных астероидов насчитывал 18200 астероидов, из которых почти 9 тыс. имеют персональное название. Чтобы показать реальность наших допущений, приведем параметры известного астероида «Отто Шмидт», у которого большая полуось орбиты  $a = 2,436 \text{ а.е.}$ , эксцентриситет  $\varepsilon = 0,006$ , диаметр астероида  $D = 16 \text{ км}$ , плотность  $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ .

- 1.1 Сколько времени длится год на Астероиде Маленького Принца?
- 1.2 Допустим, что наименьшее расстояние от этого Астероида до Земли было 1 января 2009 года, рассчитайте, когда опять расстояние между нашими планетами станет наименьшим. Чему оно равно?
- 1.3 Чему равно ускорение свободного падения на этом Астероиде?
- 1.4 Чему равна первая космическая скорость для этого Астероида?
- 1.5 Гуляя по планете, маленький принц при помощи пружинных весов обнаружил, что вес тел на экваторе планеты меньше, чем на полюсе на  $\eta = 10\%$ . Чему равна продолжительность суток на Астероиде?
  - 1.6.1 На какую высоту подпрыгнет Маленький Принц на астероиде, если на Земле он подпрыгивает вверх на высоту  $h_0 = 0,50 \text{ м}$ ? Считайте, что начальная скорость прыжка одинакова на Земле и на Астероиде. Считайте, что изменением ускорения свободного падения на высоте прыжка можно пренебречь.
  - 1.6.2 Оцените, на сколько процентов уменьшится ускорение свободного падения на максимальной высоте прыжка на Астероиде.
  - 1.6.3 Оцените, какую относительную ошибку вы допустили в п. 1.6.1, считая ускорение свободного падения не зависящим от высоты над поверхностью астероида.



## Задание 2. Реология

Реология – наука о деформации, пластичности, вязкости трении в различных средах. Описание реальных процессов изменения формы тел – очень сложная физическая задача. Однако хорошее качественное и количественное описание некоторых процессов деформации можно провести, используя так называемые реологические модели.

В этой задаче мы предлагаем Вам рассмотреть некоторые модели, используемые для описания одномерных деформаций. Все эти модели состоят из трех типов основных элементов.

Каждый элемент можно представить, как длинную трубку, находится некоторое простое соединенное с тонким выдвижным может двигаться в обоих направлениях



Рис. 1

наглядно внутри которой устройство, стержнем, который (рис. 1). Массами

всех элементов и их устройств можно пренебречь. Во всех случаях деформацией и скоростью деформации элемента будем называть смещение и скорость конца выдвижного стержня.

Вам предстоит рассмотреть некоторые реологические модели, состоящие из соединенных различным образом элементов, и качественно построить графики зависимостей величины и скорости деформации. Качественное изображение зависимостей отражает лишь суть процесса и не требует указания масштаба и точного построения прямых и кривых. Однако обязательным является указание точек, в которых ход процесса существенно изменяется, а также точек пересечения с осями и асимптот (предельных значений). Вам также необходимо объяснить ваши построения.

Рассмотрим используемые в данной задаче «основные элементы». Рядом с изображением элемента приводится его условное обозначение на схемах.

### 1. «Пружина».

Внутри трубки находится упругая легкая пружина (рис. 2). Так как масса пружины пренебрежимо мала, то при приложении силы  $F$  такая пружина практически мгновенно растягивается (деформируется) на определенную величину

$$x = \frac{1}{k} F \quad (1),$$

где  $k$  - жесткость пружины. При изменении внешней силы пружина мгновенно изменяет свою длину в соответствии с формулой (1).

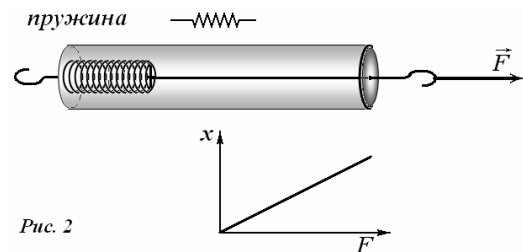


Рис. 2

### 2. «Демпфер».

Внутри цилиндра находится вязкая жидкость. Выдвижной стержень соединен с легким поршнем внутри цилиндра (рис.3). Между стенками цилиндра и поршнем имеется небольшой зазор, через который жидкость может перетекать с одной стороны поршня на другую. На поршень действует сила вязкого трения, которая пропорциональна скорости его движения. Поэтому **скорость** деформации оказывается пропорциональной приложенной силе

$$v = \frac{1}{a} F \quad (2),$$

где постоянную  $a$  назовем сопротивлением демпфера. Так как массой поршня пренебрегаем, то при изменении внешней силы скорость мгновенно принимает значение, соответствующее формуле (2).

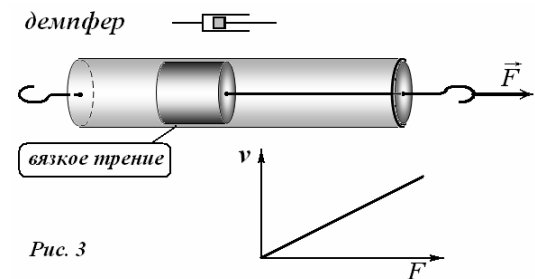


Рис. 3

### 3. «Фрикцион»

Выдвижной стержень внутри цилиндра соединен с поршнем, плотно примыкающим к стенкам цилиндра. На поршень со стороны цилиндра действует сила сухого трения. Пока внешняя сила не превышает определенного значения  $F < f$

( $f$  - максимальная сила трения покоя), поршень не движется. Если же внешняя сила превышает значение  $f$ , то сила трения остается постоянной и равной  $f$ . Так как и в этом случае, массой поршня пренебрегаем, то при  $F > f$  фрикцион бесконечно быстро деформируется, что отражено на графиках рис. 4.

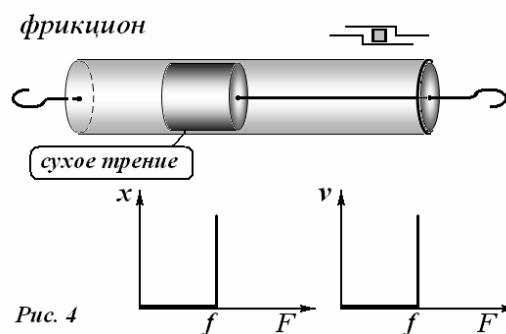
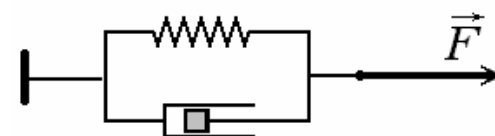


Рис. 4

#### Часть 1. Демпфер и пружина.

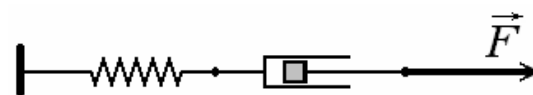
**1.1** Демпфер и пружина соединены параллельно и изначально не деформированы. К этой системе прикладывают постоянную силу  $F$ .



**1.1.1** Найдите зависимость скорости деформации от ее величины  $v(x)$  (запишите формулу). Постройте график этой зависимости.

**1.1.2** Качественно изобразите зависимости величины деформации от времени  $x(t)$  и скорости деформации от времени  $v(t)$ .

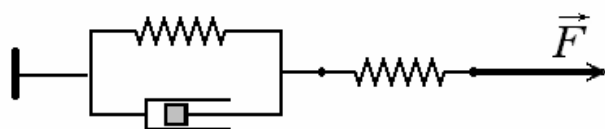
**1.2** Демпфер и пружина соединены последовательно и изначально не деформированы. К этой системе прикладывают постоянную силу  $F$ .



**1.2.1** Найдите зависимость деформации системы от времени  $x(t)$  (запишите формулу). Постройте график этой зависимости.

**1.2.2** постройте график зависимости скорости деформации от времени  $v(t)$ .

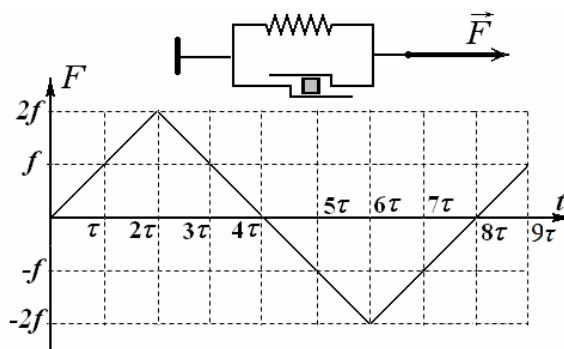
**1.3** Рассмотрите смешанное соединение двух пружин и демпфера. К этой системе также прикладывают постоянную силу  $F$ .



Качественно изобразите зависимости графики зависимостей  $v(x)$ ,  $x(t)$  и  $v(t)$ .

#### Часть 2. Фрикцион и пружина.

**2.1** Рассмотрите параллельное соединение фрикциона и пружины. В этом случае к системе прикладывается сила, которая сначала равномерно увеличивается от нуля до  $2f$  за время  $2\tau$ , затем она равномерно уменьшается до значения  $-2f$  (т.е. сила будет сжимать систему) за время  $4\tau$ , а затем снова равномерно увеличивается до значения  $f$ .



Постройте качественный график зависимости величины деформации от времени  $x(t)$ . Постройте также график зависимости величины деформации от величины приложенной силы  $x(F)$ .

### Задание 3. Глаз



Глаз человека представляет собой уникальный оптический прибор, посредством которого мозг получает зрительную информацию. Согласно усредненным данным *глазное яблоко* можно считать шаром диаметра  $D = 24\text{ мм}$ , который заполнен *стекловидным телом* 2. Основным оптическим элементом глаза является *хрусталик* 3, который можно считать тонкой линзой с переменным фокусным расстоянием. Процесс изменения фокусного расстояния (оптической силы) глаза называется *аккомодацией*. В процессе аккомодации человек

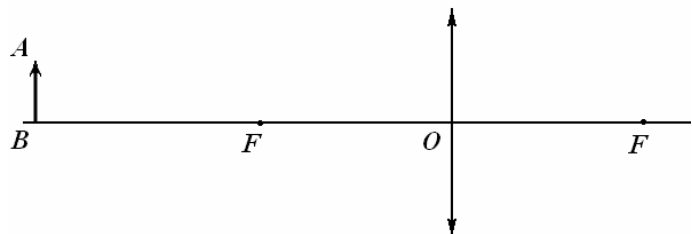
может с сохранением резкости достаточно быстро переводить взгляд с более удаленных предметов на менее удаленные (или наоборот).

Описание оптических свойств глаза чрезвычайно сложно, поэтому мы рассмотрим предельно упрощенную оптическую схему глаза, состоящую из линзы переменного фокусного расстояния (моделирующую хрусталик) находящуюся в воздухе, и плоского экрана (моделирующего сетчатку), расположенного на расстоянии от линзы равном диаметру глазного яблока  $D$  и перпендикулярного главной оптической оси линзы. Диаметр линзы примем равным диаметру хрусталика  $d = 4,0\text{ мм}$ .



#### Часть 1. Введение.

Предмет  $AB$  находится на расстоянии  $a$  от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F$ .



1.1 Постройте изображение предмета в линзе.

1.2 Используя сделанное построение, покажите, что расстояние от предмета до линзы  $a$ , расстояние от линзы до изображения  $b$  и фокусное расстояние линзы  $F$  связаны соотношением (которое называется формулой линзы<sup>1</sup>)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{1}$$

1.3 Пусть предмет находится на расстоянии  $a$  от тонкой линзы с фокусным расстоянием  $F$  ( $a > F$ ). На какое расстояние  $\Delta b$  и в какую сторону переместится изображение предмета, если расстояние  $a$  увеличится на малую величину  $\Delta a$ .

Подсказка. Рекомендуем использовать приближенную формулу, справедливую при малых  $\Delta a$ :

<sup>1</sup> Если Вам не удалось доказать справедливость формулы тонкой линзы, то используйте ее как «очевидный» факт при выполнении последующих пунктов задачи.

$$\frac{1}{a + \Delta a} = \frac{1}{a \left( 1 + \frac{\Delta a}{a} \right)} \approx \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{\Delta a}{a} \right) \quad (2)$$

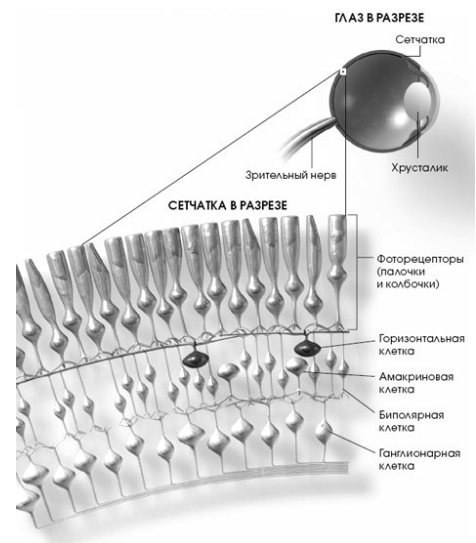
## Часть 2. Изменение фокусного расстояния глаза.

Согласно физиологическим исследованиям, благодаря процессу аккомодации глаза здоровый человек может с незначительной временной задержкой переводить взгляд с предметов, расположенных «на бесконечности»  $a_1 = \infty$  на предметы, расположенные на расстоянии  $a_0 = 25 \text{ см}$ , при котором можно наиболее отчетливо рассмотреть мелкие детали предмета без перенапряжения мышц хрусталика.

2.1 Вычислите пределы ( $F_{\min}$  и  $F_{\max}$ ) изменения фокусного расстояния хрусталика глаза при этом.

## Часть 3. Глубина резкости.

Сетчатка глаза человека содержит светочувствительные клетки (фоторецепторы) двух типов: колбочки (для восприятия цветного изображения) и палочки (для восприятия черно-белого (сумеречного) изображения). Среднее количество колбочек в сетчатке глаза  $N_1 = 6,0 \cdot 10^6$ , палочек  $N_2 = 1,2 \cdot 10^8$ . В центральной ямке (желтом пятне) глазного яблока концентрация колбочек на единицу площади максимальна, а палочек там практически нет. Примем, что все колбочки расположены в пределах желтого пятна, радиус которого  $r = 2,5 \text{ мм}$ . Палочки расположены пределами желтого пятна на задней полусфере глазного яблока. Каждый фоторецептор создает изображение независимо от других фоторецепторов.



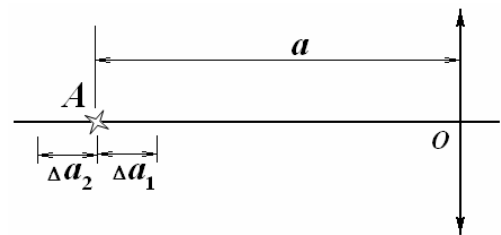
за

**Будем считать, что точка видна резко, если она проецируется на одну колбочку в желтом пятне.**

Пусть точка  $A$  находится на главной оптической оси на расстоянии  $a_0 = 25 \text{ см}$  от глаза.

3.1 На какое расстояние  $\Delta a_1$  ее можно приблизить к глазу, чтобы изображение осталось резким?

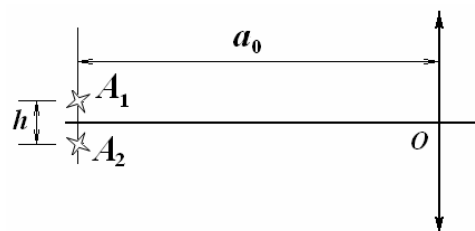
3.2 На какое расстояние  $\Delta a_2$  ее можно удалить от глаза (без изменения фокусного расстояния хрусталика), чтобы изображение осталось резким?



## Часть 4. Разрешающая способность.

Две точки находятся на расстоянии  $a_0 = 25 \text{ см}$  от хрусталика глаза на малом расстоянии  $h$  друг от друга.

4.1 При каком расстоянии минимальном расстоянии  $h$  эти точки будут видны раздельно?



**УТВЕРЖДЕНО**  
Заместитель председателя оргкомитета  
Республиканской олимпиады

\_\_\_\_\_ К.С. Фарино.

« \_\_\_\_ » марта 2009 года



# *Республиканская физическая олимпиада (заключительный этап) 2009 год*

## *Теоретический тур.*

### *11 класс*

1. Полный комплект состоит из трех не связанных между собой заданий.

2. Время выполнения заданий – 5 часов.

3. При оформлении работы каждую задачу начинайте с новой страницы. Первая половина тетради предназначена для чистовика, вторая - для черновика. При недостатке бумаги обращайтесь к оргкомитету, *обеспечим!*

4. Подписывать тетради и отдельные страницы запрещается.

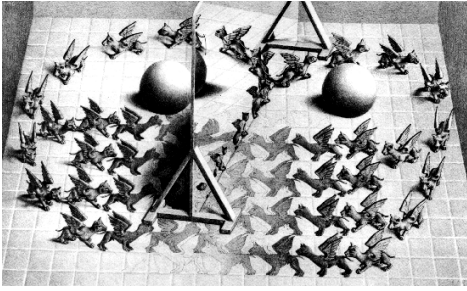
5. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.

6. При решении задач вы также можете при необходимости использовать приближенные формулы, справедливые при малых значениях величины  $x$  ( то есть при  $x \ll 1$  ):



$(1+x)^{\gamma} \approx 1 + \gamma x; \quad \exp(x) = e^x \approx 1 + x$ $\sin x \approx x; \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$
---





## Задание 1. Оптико-механическая аналогия.

Оптико-механическая аналогия - это сходство траектории движения частицы в потенциальном силовом поле с траекторией лучей в оптически неоднородной среде. Траектория материальной точки и траектория светового луча совпадают при определенном соответствии потенциальной энергии и переменного в пространстве показателя преломления среды. Этот

факт был теоретически открыт выдающимся ирландским математиком и физиком У. Р. Гамильтоном в 1834 году и уже в нашем столетии оказал влияние на установление связи между волновой оптикой и волновой (квантовой) механикой.

В данном задании вам предстоит рассмотреть два примера аналогия между оптикой и механикой.

### 1. Движение тела в поле тяжести.

Тело брошено с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha_0$  к вертикали вдоль горизонтальной поверхности. Сопротивлением воздуха пренебрегаем.

1.1 Запишите закон движения тела, т.е. зависимость его координат времени  $x(t)$ ,  $y(t)$ . Используйте систему координат, показанную на рисунке.

1.2 Запишите уравнение траектории движения тела  $y(x)$ .

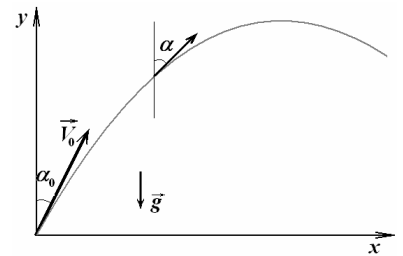
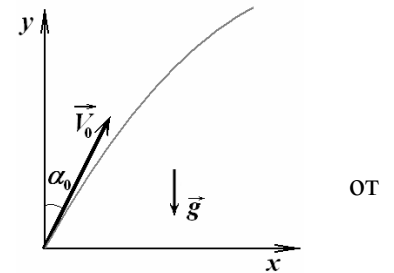
1.3 Определите дальность полета тела и максимальную высоту его подъема.

1.4 Покажите, что в любой точке траектории движения тела угол  $\alpha$ , который образует касательная с вертикалью, удовлетворяет условию

$$f(y)\sin\alpha = f_0 \sin\alpha_0, \quad (1)$$

где  $f(y)$  - некоторая функция вертикальной координаты  $y$ . Найдите эту функцию.

1.5 Предложите алгоритм построения траектории по произвольной известной зависимости угла  $\alpha(y)$  от вертикальной координаты  $y$ .



### 2. Луч света в слоисто-неоднородной среде.

Показатель преломления прозрачного бруска больших размеров плавно изменяется с высотой по закону

$$n = n_0 \sqrt{1 - \gamma y}, \quad (2)$$

где  $n_0, \gamma$  - известные постоянные величины. Луч света попадает на грань бруска в точке  $A$  и после преломления на ней образует угол  $\alpha$  с осью  $Oy$ . Система координат показана на рисунке.

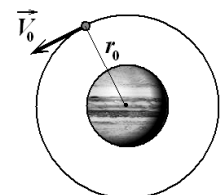


2.1 На какую максимальную глубину проникнет луч света в брусок?

2.2 На каком расстоянии от точки входа луч выйдет из бруска?

### 3. Круговая орбита.

Спутник движется с постоянной по модулю скоростью  $v_0$  по круговой орбите радиуса  $r_0$  вокруг планеты радиус, которой равен  $R$ . Ускорение свободного падения на поверхности планеты равно  $g$ .



3.1 Определите радиус орбиты спутника.

3.2 По неизвестной причине в некоторый момент времени направление

вектора скорости спутника изменилось на небольшой угол, при этом модуль скорости не изменился. При этом, очевидно, орбита стала эллиптической. Найдите зависимость модуля скорости спутника от его расстояния до центра планеты  $v(r)$ .

**Подсказка.** Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух точечных тел определяется по формуле

$$U = -G \frac{Mm}{r},$$

где  $M, m$  - массы тел,  $r$  - расстояние между телами,  $G$  - гравитационная постоянная.

**3.3** Найдите изменение модуля скорости спутника  $\Delta v$  при малом изменении его расстояния до центра планеты  $\Delta r$ .

**3.4** Покажите, что когда спутник находится на расстоянии  $r_0$  от центра планеты, выполняется соотношение

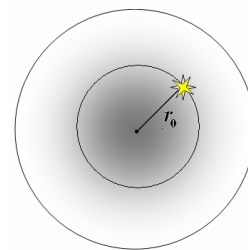
$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{v}{r}. \quad (3)$$

**4. Луч света в осесимметричной неоднородной среде.**

Цилиндр изготовлен из прозрачного материала, но показатель преломления материала, из которого он изготовлен, медленно уменьшается с увеличением расстояния до его оси по закону

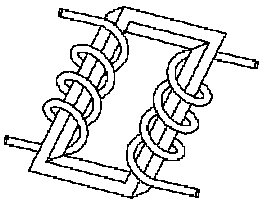
$$n(r) = n_0(1 - \gamma r), \quad (4)$$

где  $n_0, \gamma$  - известные постоянные величины.



На каком расстоянии от оси цилиндра надо произвести вспышку света, чтобы некоторые из световых лучей могли распространяться по окружности вокруг с центром на оси цилиндра?

## Задание 2. Электрические качели.



В этой задаче мы предлагаем Вам рассмотреть колебания в LC-контуре с переменной емкостью. При непрерывном изменении емкости конденсатора, описание колебаний в контуре – очень большая проблема.

Поэтому в данной задаче емкость будет изменяться только в определенные моменты времени и на определенную величину, что существенно облегчит изучение такой системы.

Колебательный контур состоит из конденсатора, емкость которого можно изменять, увеличивая или уменьшая расстояние между пластинами, и катушки с индуктивностью  $L$ , сопротивлением которой можно пренебречь (рис. 1).

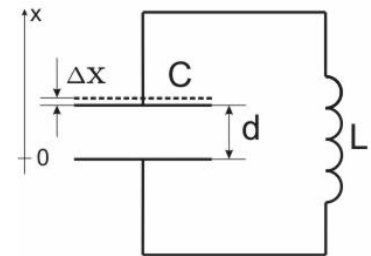


Рис.1

### Часть первая. Толчок.

В начальный момент времени емкость конденсатора равна  $C_0$ , а расстояние между пластинами равно  $d$ . В контуре возбуждают колебания. В момент времени, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения, расстояние между пластинами мгновенно увеличивают на некоторую малую величину  $\Delta x$ . Обозначим относительное увеличение расстояния между пластинами  $\delta = \frac{\Delta x}{d}$ .

**1.1** Покажите, что при таком изменении расстояния емкость конденсатора уменьшается на ту же относительную величину, т.е. что  $\frac{\Delta C}{C} = -\delta$ .

**1.2** Определите относительное изменение напряжения на пластинах  $U$ , полной энергии колебательного контура  $W$  и периода колебаний  $T$  при таком перемещении.

Если изменения некоторых двух величин ( $\Delta x$  и  $\Delta y$ ) и их абсолютные значения ( $x$  и  $y$ ) удовлетворяют уравнению  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k \frac{y}{x}$ , то из этого можно сделать вывод, что  $y \sim x^k$ .

**1.3** Покажите, что отношение максимального напряжения на конденсаторе к полной энергии контура остается постоянным при увеличении расстояния между пластинами.

**1.4** Покажите, что произведение квадрата периода колебаний на полную энергию также не изменяется в таком процессе.

### Часть 2. Раскачка.

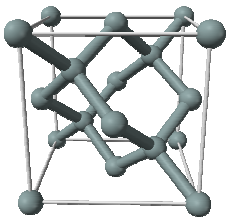
В этой части задачи расстояние между пластинами будем изменять неоднократно. По-прежнему будем увеличивать расстояние между пластинами на  $\Delta x$  ( $\delta = \frac{\Delta x}{d}$ ) в моменты времени, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения, но в моменты, когда напряжение на конденсаторе становится равным нулю, пластины снова сдвигают так, что расстояние между ними становится прежним.

**2.1** Пусть  $\delta = 0,01$ . Определите, сколько времени понадобится для увеличения полной энергии в контуре в 10 раз. Выразите это время в полных периодах колебаний  $T_0$ .

**2.2** Предположим, что индуктивность обладает небольшим сопротивлением  $R$ . Оцените, каким должно быть значение  $\delta$ , чтобы колебания в контуре не затухали.

### **Часть 3. Сбой по согласованию.**

Предположим, что операция, производимая во второй части задачи, осуществляется с частотой немного меньшей, чем удвоенная частота колебаний контура, т.е. промежуток времени между двумя последовательными увеличениями (или уменьшениями) расстояния между пластинами  $\tau = \frac{T_0}{2} + \Delta t$ . Причем  $\Delta t \ll T_0$ . Качественно опишите зависимость максимального напряжения на конденсаторе от времени и определите промежуток времени между двумя последовательными максимумами напряжения. Сопротивление катушки равно нулю.



### Задание 3. Полупроводник.

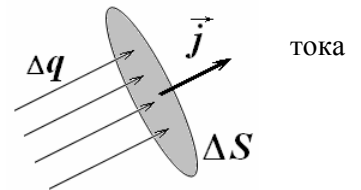
В данном задании вам предстоит теоретически описать электрическую проводимость чистого (без примесей) полупроводника и ее зависимость от температуры и освещенности. Рассматриваемые ниже явления находят широчайшее применение в современных электронных приборах, в частности терморезисторах и фоторезисторах.

В качестве примера полупроводника используется кристаллический кремний (с-Si), модель его кристаллической решетки показана на рисунке. Для численных расчетов используются характеристики именно этого вещества. В задаче используются традиционные обозначения, принятые в физике полупроводников.

#### 1. Введение – напоминание.

Для описания протекания электрического тока внутри вещества удобно пользоваться такой характеристикой, как плотность электрического  $\vec{j}$ . Плотность тока определяется как количество электрического заряда, протекающего через площадку единичной площади, перпендикулярной направлению движения зарядов в единицу времени (или как сила электрического тока, протекающего через площадку единичной площади):

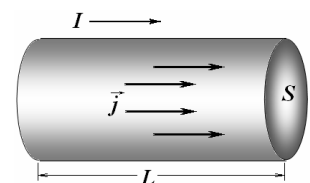
$$j = \frac{\Delta q}{\Delta S \cdot \Delta t} = \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (1)$$



Плотность тока является векторной величиной, ее направление совпадает с направлением движения положительно заряженных частиц.

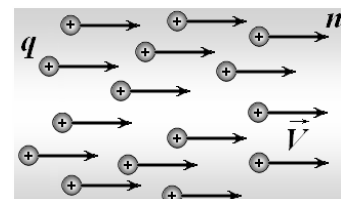
**1.1** Пусть электрический ток равномерно протекает вдоль однородного цилиндра. Используя закон Ома для участка цепи, покажите, что плотность электрического тока внутри цилиндра рассчитывается по формуле

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (2)$$



где  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля внутри цилиндра,  $\sigma$  - удельная проводимость материала цилиндра (величина обратная удельному электрическому сопротивлению  $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ).

**1.2** Пусть одинаковые частицы (заряд каждой равен  $q$ ) движутся с одинаковыми скоростями  $\vec{v}$ . Концентрация частиц в потоке равна  $n$ . Чему равна плотность электрического тока в данном потоке частиц?



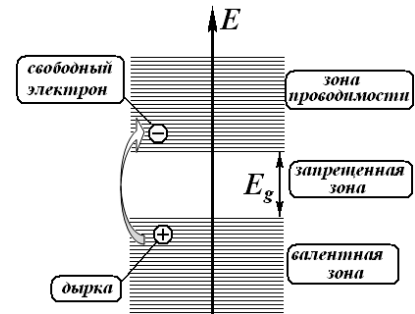
**1.3** Покажите, что средняя скорость направленного движения электронов в металле при протекании постоянного электрического тока пропорциональна напряженности электрического поля в металле

$$\langle v \rangle = \mu E. \quad (3)$$

где коэффициент пропорциональности  $\mu$  называется *подвижностью* электронов. Выразите удельную проводимость металла через подвижность электронов и их концентрацию в металле.

## 2. Терморезистор.

Энергетические состояния электронов в кристалле состоят из нескольких зон. Верхняя заполненная зона называется валентной зоной, а следующая за ней зона возможных состояний – зоной проводимости. Между ними располагается запрещенная зона – электроны в кристалле не могут иметь такие значения энергии! Разность энергий между верхним краем валентной зоны и нижним краем зоны проводимости называется шириной запрещенной зоны и обозначается  $E_g$ .



Электроны, находящиеся в валентной зоне, «привязаны» своим атомам и не могут перемещаться по кристаллу, следовательно, не могут быть носителями электрического тока. Электроны, находящиеся в зоне проводимости являются свободными, поэтому служат носителями электрического тока.

В рассматриваемом кристаллическом кремнии при температуре абсолютного нуля все электроны находятся в валентной зоне, зона проводимости пуста, поэтому в этом состоянии полупроводник является изолятором. При повышении температуры вследствие теплового движения некоторые электроны могут переходить из валентной зоны в зону проводимости. В этом случае в зоне проводимости появляется свободный электрон, а в валентной зоне дырка. Скорость генерации  $G_T$  электронно-дырочных пар (число рождающихся в единице объема в единицу времени электронно-дырочных пар) в заданном полупроводнике зависит только от температуры.

Таким образом, носителями электрического тока в полупроводниках являются свободные электроны и дырки. Причем дырки можно рассматривать как частицы с положительным зарядом равным элементарному заряду. Концентрация свободных электронов в полупроводнике обозначается  $n_i$ , концентрация дырок  $p_i$ . Однако в чистом полупроводнике (таком, как рассматривается в данной задаче) концентрации электронов и дырок одинаковы, поэтому используйте единое обозначение для их концентрации  $n_i = p_i = n$ . Возможен и процесс, обратный рождению электронно-дырочной пары – электрон может перейти из зоны проводимости в валентную зону, при этом пара электрон-дырка исчезает. Такой процесс называется рекомбинацией. Очевидно, что скорость рекомбинации  $R$  (число исчезающих в единице объема в единицу времени электронно-дырочных пар) пропорциональна произведению концентраций электронов и дырок.

При постоянной температуре полупроводника устанавливается динамическое равновесие – среднее число рождающихся электронно-дырочных пар становится равным числу пар, исчезающих вследствие рекомбинации:  $G_T = R$ .

Концентрация свободных электронов в этом случае называется равновесной концентрацией, ее обозначим  $\bar{n}$ . Равновесная концентрация свободных электронов зависит только от абсолютной температуры  $T$  и определяется формулой

$$\bar{n}(T) = AT^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right), \quad (4)$$

где  $k$  - постоянная Больцмана;  $A$  - постоянная для данного вещества величина;  $\exp(x) = e^x$  - экспоненциальная функция.

**2.1** Используя физические характеристики кристаллического кремния, вычислите его удельную электрическую проводимость при комнатной температуре  $\sigma_0$ .

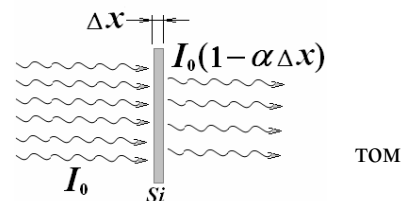
**2.2** При малом изменении температуры  $\Delta T$  можно считать, что проводимость кремния изменяется по линейному закону

$$\sigma = \sigma_0(1 + \gamma \Delta T). \quad (5)$$

Рассчитайте температурный коэффициент проводимости  $\gamma$  для кристаллического кремния при комнатной температуре. Изменением подвижностей электронов и дырок при изменении температуры можно пренебречь.

### 3. Фоторезистор.

Электроны могут переходить в зону проводимости и при поглощении кванта света, в этом случае также образуется пара носителей тока «свободный электрон – дырка». Это явление называется внутренним фотоэффектом. На этом принципе работают полупроводниковые приборы для измерения интенсивности света (в числе инфракрасного диапазона) – фоторезисторы.



Если энергия фотона превышает энергетическую ширину запрещенной зоны, то он может поглотиться, в некоторых случаях поглощения фотона образуется электронно-дырочная пара. Отношение числа рожденных пар к числу поглощенных фотонов называется квантовым выходом фотоэффекта (обозначим эту величину  $\eta$ ).

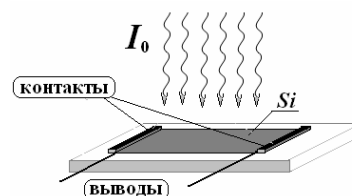
Поглощение света характеризуется коэффициентом поглощения  $\alpha$ . Величина  $\alpha\Delta x$  (при  $\alpha\Delta x \ll 1$ ) равна отношению числа фотонов, поглощенных в тонком слое вещества толщиной  $\Delta x$ , к числу фотонов падающих на этот слой.

Для кристаллического кремния зависимость коэффициента поглощения от частоты падающего света описывается приближенной формулой

$$\alpha(\nu) = B(h\nu - E_g)^2, \quad (6)$$

где  $h\nu$  - энергия фотона (в электрон-вольтах),  $B = 3,9 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1} \cdot \text{эВ}^{-2}$  - эмпирическая постоянная.

Фоторезистор представляет собой тонкий кристаллический кремниевый слой. К краям слоя подведены металлические токопроводящие контакты с внешними выводами. Пластинка полностью освещается светом, падающим на нее нормально сверху. Толщина полупроводникового слоя  $h$  достаточно мала, так что в рассматриваемом далее спектральном диапазоне выполняется условие  $\alpha h \ll 1$ . Температуру пластинки с полупроводниковым слоем можно считать постоянной и равной комнатной.



**3.1.1** Вычислите длину волны красной границы фотоэффекта  $\lambda_{кр.}$ .

**3.1.2** Для упрощения дальнейших расчетов выразите коэффициент поглощения кремния как функцию от величины  $\lambda/\lambda_{кр.}$  (где  $\lambda$  - длина волны падающего света):  $\alpha = F(\lambda/\lambda_{кр.})$ .

**3.1.3** Вычислите скорость генерации электронно-дырочных пар посредством фотоэффекта  $G_r$ . Выразите данную величину через характеристики падающего света (длину волны  $\lambda$ , интенсивность  $I_0$  - энергию, падающую в единицу времени на площадку единичной площади) и необходимые вам характеристики кремния, приведенные в справочной таблице.

**3.2.1** Запишите уравнение, описывающее скорость изменения концентрации свободных электронов  $\frac{\Delta n}{\Delta t}$  в полупроводнике, освещаемом светом. Учтите, что электронно-дырочные пары появляются не только под действием теплового движения, но и вследствие фотоэффекта.

**3.2.2** Пусть в результате кратковременного светового импульса концентрация свободных электронов превысила термодинамическую равновесную концентрацию  $\bar{n}$  на малую величину  $n_1$  (то есть  $n = \bar{n} + n_1$ , причем  $\bar{n} \gg n_1$ ). Покажите, что изменение этого отклонения  $\Delta n_1$  за малый промежуток времени  $\Delta t$  подчиняется уравнению

$$\Delta n_1 = -\frac{n_1}{\tau} \Delta t, \quad (7)$$

где  $\tau$  - некоторая постоянная, называемая временем жизни электронно-дырочной пары (ее численное значение для кристаллического кремния приведено в Справочной таблице).

**3.2.3** Выразите скорость тепловой генерации  $G_T$  и скорость рекомбинации  $R$  через концентрацию носителей тока и известные параметры кремния, приведенные в Справочной таблице.

**3.2.4** Пусть фоторезистор непрерывно освещается светом, в этом случае концентрация носителей достигает некоторого стационарного значения. Найдите отношение этой концентрации к равновесной концентрации  $\frac{n}{\bar{n}}$ , как функцию длины волны (лучше  $\lambda/\lambda_{кр.}$ ) и интенсивности падающего излучения  $I_0$ .

### 3.3 Измерение интенсивности света.

Фоторезистор подключают к источнику постоянного напряжения и измеряют силу тока через него. При отсутствии освещения сила тока в цепи равна  $i_0$  (темновой ток).

**3.3.1** Найдите зависимость силы тока в цепи от характеристик падающего излучения (длины волны и интенсивности).

**3.3.2** Постройте примерный график зависимости отношения силы тока в цепи к темновому току  $i/i_0$  от интенсивности падающего света (в диапазоне от нуля до  $0,1 \frac{Вт}{см^2}$ ) с длиной волны  $\lambda = 0,90\lambda_{кр.}$

**3.3.3.** Постройте примерный график зависимости  $i/i_0$  от длины волны падающего света в диапазоне от  $\lambda_1 = 0,8 мкм$  до  $\lambda_2 = 1,1 мкм$ . Считайте, что интенсивность падающего излучения постоянна и равна  $I_0 = 1,0 \cdot 10^{-2} \frac{Вт}{см^2}$ .

### Справочная таблица.

Комнатная температура	$T_0 = 300K$
Заряд электрона	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} Кл$
Скорость света в вакууме	$c = 3,00 \cdot 10^8 м/с$
Постоянная Больцмана	$k = 1,38 \cdot 10^{-23} Дж \cdot K^{-1}$
Постоянная Планка	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} Дж \cdot с$
<b>Характеристики кристаллического кремния</b>	
Ширина запрещенной зоны	$E_g = 1,12 эВ$
Равновесная концентрация свободных электронов при комнатной температуре	$\bar{n} = 1,0 \cdot 10^{10} см^{-3}$
Подвижность свободных электронов	$\mu_n = 1,4 \cdot 10^3 см^2 \cdot В^{-1} \cdot с^{-1}$
Подвижность дырок	$\mu_p = 0,45 \cdot 10^3 см^2 \cdot В^{-1} \cdot с^{-1}$
Квантовый выход внутреннего фотоэффекта	$\eta = 0,10$
Время жизни электронно-дырочной пары	$\tau = 3,0 \cdot 10^{-3} с$