

Брест 1993 г. (Решения)

9-1. Рассмотрим движение точки A . Пусть она переходит в точку A_1 , D — новая точка касания выреза. При таком повороте колеса на угол θ его центр сместится на угол φ относительно центра выреза. Так как качение происходит без проскальзывания, то длины дуг AD и A_1D равны, то есть

$$R\theta = 2R\varphi$$

или

$$\theta = 2\varphi.$$

Запишем координаты точки A_1

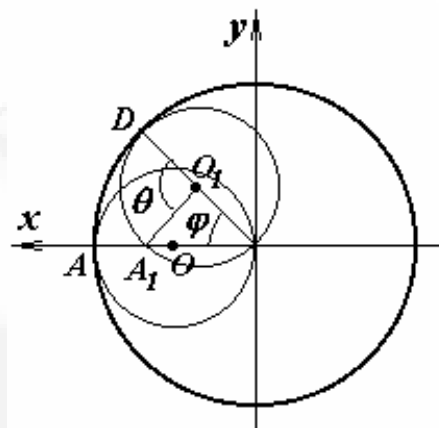
$$x = R \cos \varphi + R \cos(\theta - \varphi),$$

$$y = R \sin \varphi - R \sin(\theta - \varphi).$$

С учетом связи между углами θ и φ , получим

$$\begin{cases} x = 2r \cos \theta, \\ y = 0. \end{cases}$$

Таким образом, при изменении угла φ от 0 до 2π , x изменяется от $2R$ до $-2R$, а y при этом остается равным нулю. Иными словами траектория точки есть диаметр выреза, проходящий через точку. Аналогично можно показать, что траектории точек B и C также являются отрезками прямых (диаметрами). Какими, подумайте самостоятельно.



9-2. При движении шарика в сосуде сила сопротивления зависит от его скорости. Следовательно, шарик будет двигаться с постоянной скоростью, поэтому суммарная сила, действующая со стороны жидкости на шарик, равна силе тяжести mg . Тогда по третьему закону Ньютона с такой же силой шарик действует на жидкость. Так как центр масс жидкости перемещается без ускорения, то сумма всех сил, действующих на жидкость равна нулю. Таким образом, сила, действующая на жидкость со стороны шарика, должна быть скомпенсирована дополнительной силой со стороны дна и стенок сосуда, которая также равна mg .

9-3. Искомую работу можно рассчитать по формуле

$$A = Q = cm(T_K - T_H),$$

для чего необходимо привести все единицы измерения к одной системе (например, СИ), в итоге $A = 33,6 \text{ кДж}$.

9-4. Для решения этой задачи воспользуемся принципом суперпозиции токов и симметрией схемы. Допустим, что через подводящий контакт к точке A идет ток I . Тогда в отсутствие вывода

B токи в ближайших звеньях будут равны $\frac{I}{3}$, а в

следующих $\frac{I}{6}$. При подключении к точке B источника с силой тока $-I$, распределение токов будет аналогичным. Таким образом, при одновременном подключении к точкам A и B , ток в двух звеньях, соединяющих эти точки

$$I_1 = \frac{I}{3} + \frac{I}{6} = \frac{I}{2},$$

а падение напряжения между ними

$$U = I_1 2R = IR.$$

Следовательно, сопротивление всей цепи

$$R_{об} = \frac{U}{I} = R.$$

10-1. Траектория шарика будет представлять набор дуг в четверть окружности, радиусы которых уменьшаются на длину ребра кубика a .

Число этих дуг $N = \frac{l_0}{a} + 1$. Следовательно,

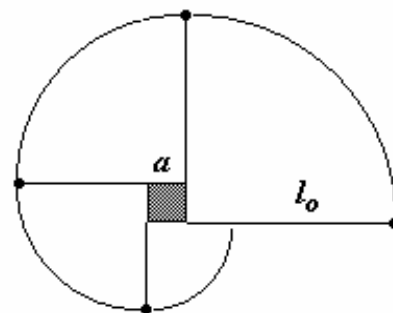
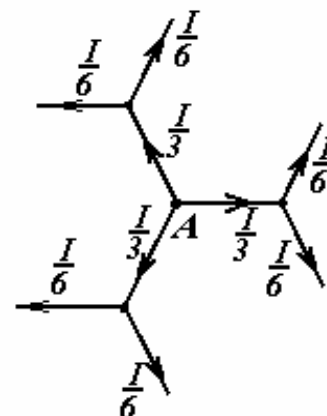
длина траектории

$$S = \sum_{k=0}^N (l_0 - ka) \frac{\pi}{2}.$$

Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, получим

$$S = \frac{1}{4} \pi l_0 \left(\frac{l_0}{a} + 1 \right).$$

Из закона сохранения энергии следует, что скорость шарика постоянна, поэтому время движения



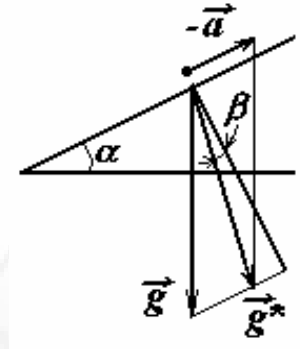
$$\tau = \frac{S}{v} = \frac{1}{4} \frac{\pi l_0}{v} \left(\frac{l_0}{a} + 1 \right).$$

10-2. Ускорение ведра, скользящего по наклонной плоскости, определяется формулой

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

и направлено вдоль наклонной плоскости.

Рассмотрим воду в системе отсчета, связанной с ведром. Естественно, эта система неинерциальная. Можно ввести эффективное ускорение свободного падения $\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{a}$. Поверхность воды перпендикулярна вектору \vec{g}^* (так как в этой системе вода покоится). Из рисунка следует, что искомый угол β определяется



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{g \sin \alpha - a}{g \cos \alpha} = \mu.$$

10-3. Прежде всего отметим, что высота атмосферы понятие в некотором смысле условное, так как давление и плотность газа над поверхностью астероида изменяется и стремится к нулю только на бесконечно больших высотах. Однако, оценку толщины слоя газа можно получить из следующих соображений. При изменении высоты на величину Δh давление изменяется на величину

$$\Delta P = -\rho g \Delta h, \quad (1)$$

где ρ - плотность газа на данной высоте, g - ускорение свободного падения на данной планете. Плотность газа находится из уравнения состояния, справедливого не только на Земле, но и на любой другой планете

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}, \quad (2)$$

где μ - молярная масса, R - универсальная газовая постоянная, T - абсолютная температура. Полагая скорость изменения давления с высотой постоянной, найдем из уравнения (1) высоту, на которой давление упадет до нуля (то есть $\Delta P = -P$)

$$h \approx \frac{RT}{\mu g} . \quad (3)$$

Отметим, что для изотермической атмосферы на этой высоте давление уменьшается в $e = 2,71828\dots$ раз . Полученная оценка высоты аналогична известной оценке времени разряда конденсатора, когда его заряд уменьшается в e раз. Ускорение свободного падения на поверхности астероида определяется формулой

$$g = G \frac{M}{r^2} , \quad (4)$$

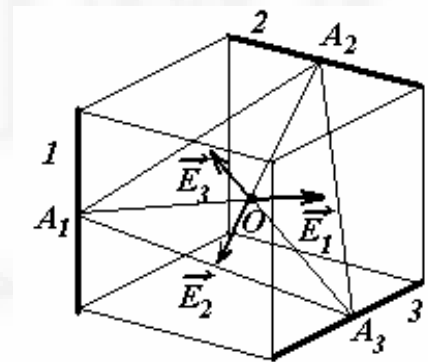
где M, r - масса и радиус астероида, G - гравитационная постоянная. Из соотношений (3) и (4) находим

$$T = \frac{GMh\mu}{Rr^2} .$$

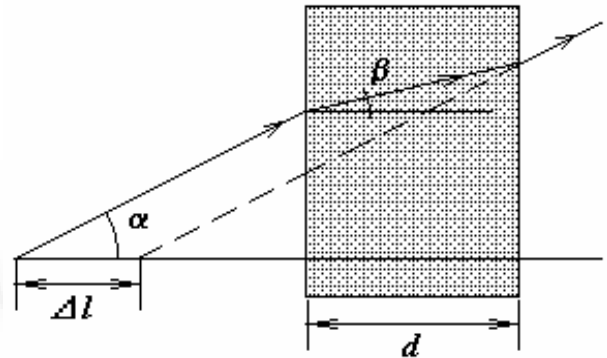
Конечно необходимо признать, что условие данной задачи может быть воспринято неоднозначно. Подробное обсуждение иных подходов к данной задаче можно найти в рубрике “Одна задача” в журнале “Фокус” №3 за 1993 год.

10-4. Элементарные рассуждения, основанные на рассмотрении симметрии задачи, приводят к правильному результату:

напряженность электрического поля в центре куба равна нулю. Действительно, проведем плоскость через середины заряженных ребер куба $A_1 A_2 A_3$. Напряженности полей $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$, создаваемых каждым ребром, одинаковы по модулю и направлены вдоль перпендикуляров к серединам ребер, поэтому лежат в плоскости $A_1 A_2 A_3$ и направлены под равными углами друг к другу, следовательно их сумма равна нулю.



10-5. При установившейся температуре пластинки, количество поступающей световой энергии (которое обратно пропорционально квадрату расстояния от источника) равно количеству энергии, теряемой пластинкой вследствие теплопередачи (которое в свою очередь пропорционально разности температур пластинки и окружающего воздуха). Таким образом, превышение температуры пластинки обратно пропорционально квадрату расстояния до источника



$$\Delta T = \frac{k}{l^2},$$

где k — несущественный коэффициент пропорциональности.

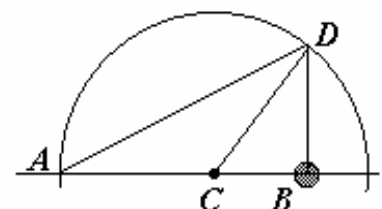
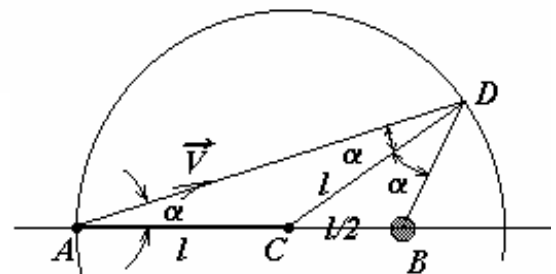
Стеклянная пластинка “приближает” источник на величину $\Delta l = \frac{n-1}{n}d$ (на рисунке следует считать углы α и β малыми). Поэтому

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_0} = \frac{l_0^2}{(l_0 - \Delta l)^2},$$

следовательно,

$$\Delta T = \Delta T_0 \frac{l_0^2}{\left(l_0 - \frac{n-1}{n}d\right)^2}.$$

11-1. Движение шайбы можно рассматривать как движение внутри цилиндра радиуса l с абсолютно упругими ударами о цилиндр. Когда нить натянется направление скорости шарика изменится так, траектория движения ADB будет образовывать равные углы с натянутой нитью CD . Понятно, что угол $\angle CDB$ будет равен искомому углу $\angle DAC = \alpha$, угол $\angle DCB = 2\alpha$, тогда угол $\angle DBC = \pi - 3\alpha$. Запишем теорему синусов для треугольника CDB -



$$\frac{l}{\sin(\pi - 3\alpha)} = \frac{l}{2\sin\alpha}.$$

Решая это уравнение, можно найти $\alpha = 30^\circ$.

Правильный вид траектории показан на следующем рисунке.

11-2. При изменении магнитного потока через контур в нем появляется эдс индукции $E_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, приводящая к возникновению электрического тока. Изменяющийся электрический ток создает собственное магнитное поле, изменение которого в свою очередь приводит к возникновению эдс самоиндукции $E_{si} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$. Таким образом, закон Ома для контура будет иметь вид

$$IR = E_{ind} - E_{si}, \quad (1)$$

где I - сила тока, R - сопротивление контура. Учитывая, что контур сверхпроводящий ($R = 0$), получим

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = L\frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad (2)$$

здесь Φ - магнитный поток внешнего поля через контур. Так как в начальный момент времени этот поток, а также сила тока равны нулю, то из уравнения (2) следует, что после поворота контура

$$I = \frac{\pi r^2 B}{L}, \quad (3)$$

где $\pi r^2 B$ - магнитный поток внешнего поля через контур после поворота рамки.

Если индуктивность контура мала, то для нахождения силы тока необходимо учитывать инерционные свойства электронов, то есть их массу. Действительно, закон Ома (1) описывает только установившийся режим тока (квазистационарное приближение), пренебрегая этапом «ускорения» электронов. Чтобы учесть это обстоятельство, запишем уравнение второго закона Ньютона для электрона

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = e\frac{E_{ind} - E_{si}}{2\pi r} = \frac{e}{2\pi r}\frac{\Delta(\Phi - LI)}{\Delta t} \quad (4)$$

В этом уравнении эдс выражена как произведение сторонней силы, действующей на электрон, на длину контура. Учитывая начальные

условия и использованное ранее выражение для магнитного потока Φ , из уравнения (4) получим

$$mv = \frac{e}{2\pi r} (\pi r^2 B - LI). \quad (5)$$

Скорость установившегося направленного движения электронов v можно выразить из выражения для силы тока

$$I = enSv, \quad (6)$$

где n - концентрация электронов, S - площадь поперечного сечения проводника. Окончательно, из (5)-(6) следует

$$I = \frac{\pi r^2 B}{L + \frac{2\pi r m}{nSe^2}}, \quad (7)$$

что отличается от ранее полученного результата (3) дополнительным слагаемым в знаменателе, пропорциональным массе электрона. Заметим, что для реальных контуров эта добавка мала, по сравнению с индуктивностью контура и ею можно пренебречь.

11-3. Сила трения, действующая на брусок в процессе его движения, зависит от силы тяжести бруска и силы кулоновского взаимодействия. В отсутствие зарядов, работа силы трения равна

$$A_0 = \mu mgS \cos \alpha = \mu mg \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Кулоновское взаимодействие приведет к тому, что работа сил трения изменится на некоторую величину ΔA , знак которой зависит от знака заряда в точке A . Абсолютное же значение ΔA при изменении знака заряда не изменится. Используя закон сохранения энергии, запишем

$$mgh = \frac{mv_0^2}{2} + \mu mg \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} - \Delta A,$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \mu mg \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} + \Delta A.$$

Отсюда $v = \sqrt{v_0^2 - Lgh \left(1 - \frac{\mu}{\operatorname{tg} \alpha}\right)}$.

11-4. Будем считать, что молекулы ударяющиеся о поверхность тарелки, отражаются от нее со скоростью, соответствующей температуре

поверхности. Поэтому, для оценки давления газа температуры T_0 на поверхность, температура которой T , можно воспользоваться соотношением

$$P = P_0 \frac{T + T_0}{2T_0}.$$

Эта формула может быть получена из следующих простых соображений: сила давления пропорциональна импульсу, передаваемому молекулами газа стенке в процессе удара, который в свою очередь пропорционален температуре газа. Если молекулы ударяются о поверхность той же температуры, что и газа то в среднем изменение импульса молекулы равно удвоенному первоначальному импульсу, в нашем же случае отраженные молекулы имеют скорость соответствующую температуре стенки, и их импульс по модулю возрастает после удара. Поэтому для оценки давления можно принять, что давление газа соответствует температуре равной среднему значению между температурами газа и стенки. Отметим, что данные рассуждения приводят к приближенному значению давления, более корректный расчет несколько сложнее, но приводит к результату незначительно отличающемуся от полученного. Следовательно, разность давлений

$$\Delta P = P_0 \frac{\Delta T}{2T_0}, \quad \Delta T = T_2 - T_1.$$

Сила тяжести тарелки уравнивается этой разностью давлений

$$mg = \Delta PS.$$

откуда получим

$$m = \frac{P_0 \Delta T}{2T_0 S g} = \frac{1,0 \cdot 10^5 \cdot 100}{2 \cdot 293 \cdot 10 \cdot 9,8} = 174 \text{ кг}.$$

11-5. Так как серия Лаймана соответствует переходам в основное состояние, то энергии возбужденных состояний можно рассчитать по формуле

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda},$$

где h — постоянная Планка.

Энергия возбуждения $E_0 = eU = 20,8 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Под действием электронного удара будут возбуждаться те состояния, энергия которых

меньше E_0 . Зная возбужденные состояния, легко найти длины волн всех возможных переходов.

Серии Лаймана соответствуют переходы с уровней энергии 2-5 в основное состояние. Следовательно, возбуждаются состояния 2-5. Спектр испускания будет состоять из 4 линий серии Лаймана (L), 3 линий серии Бальмера (B), 2 линий серии Пашена (P) и 1 линии серии Брэкета (Br). Длины волн следующие

$$L: \lambda_{51} = 94,98 \text{ нм}$$

$$\lambda_{41} = 97,25 \text{ нм}$$

$$\lambda_{21} = 102,6 \text{ нм}$$

$$\lambda_{11} = 121,6 \text{ нм}$$

$$P: \lambda_{43} = 1870 \text{ нм}$$

$$\lambda_{53} = 1320 \text{ нм}$$

$$Br: \lambda_{54} = 4500 \text{ нм}$$

$$B: \lambda_{32} = 660 \text{ нм}$$

$$\lambda_{42} = 488 \text{ нм}$$

$$\lambda_{52} = 440 \text{ нм}$$

