1. Спутник (8 pts) — *Taavet Kalda*. Спутник на солнечных батареях запускается с Земли с начальной скоростью v_0 на эллиптическую гелиоцентрическую орбиту с намерением собрать как можно больше солнечной энергии. Угол отправления может быть выбран свободно.

i) *(1 pt)* Какова минимальная необходимая скорость запуска v_m, чтобы достигнуть какой-либо гелиоцентричной орбиты?

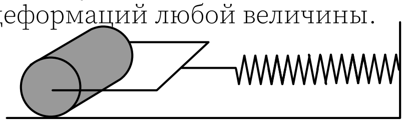
ii) *(2 pts)* Какова скорость спутника сразу после выхода из гравитационного поля Земли?

iii) *(2,5 pts)* Выразите среднюю солнечную облучаемость спутника через его главную полуось a, момент импульса J, орбитальный период T и массу m.

iv) *(2,5 pts)* Какова максимальная средняя облучаемость, возможная для спутника и каков необходимый для неё угол запуска по отношению к направлению движения Земли?

Масса Солнца – $M_\odot$, орбитальный радиус Земли – $R_\oplus$, ускорение свободного падения на Земле - g, Радиус Земли – $r_\oplus$ а яркость Солнца – $L_\odot$.

2. Ролик (8 pts) — *Lasse Frantti (iv,v: Jaan Kalda)*. Ролик представляет собой твёрдый однородный цилиндр с массой M и радиусом r; он покоится на горизонтальном столе и прикреплен к стене с помощью спиральной пружины с коэффициентом упругости k (см рисунок). Пружину можно считать безмассовой и идеальной, т.е. закон Гука остаётся действительным для деформаций любой величины.



i) *(1 pt)* Для начала предположим, что трение между столом и роликом отсутствует. Ролик смещают и отпускают; найдите период колебаний T_0.

ii) *(1 pt)* С этого момента коэффициент трения между роликом и столом μ больше не игнорируется. Ролик смещают, и он начинает раскачиваться. Для маленьких амплитуд колебаний скольжение между роликом и столом отсутствует. Найдите новый период колебаний T_r.

iii) *(2 pts)* Если изначальная амплитуда колебаний (измеряемая как деформация пружины x) больше некоего критического значения $A_\star$, амплитуда колебаний начинает уменьшаться во времени. Выразите $A_\star$ через k, M, r, ускорение свободного падения g и μ.

iv) *(2 pts)* Предполагая, что изначальная амплитуда A_0 намного больше, чем $A_\star$, какова максимальная угловая скорость цилиндра за время $0 \le t \le T/2$, где t – время, прошедшее с момента отпускания ролика?

v) *(2 pts)* Предполагая, что $A_0 \gg A_\star$, набросайте квалитативный график зависимости εr и a от времени; здесь ε и a обозначают угловое и линейное ускорение ролика соответственно.

3. Движение в B (8 pts) — *Andréas Sundström, Joonas Kalda (ii,iii)*. Частицы с массами m и зарядами q запускаются из начала координат со скоростью v параллельно оси x. В $x = l$ находится экран.

i) *(1 pt)* Первая частица запускается, когда присутствует электрическое поле, параллельное оси x, а магнитное поле отсутствует. Какова должна быть напряжённость электрического поля, чтобы частица никогда не достигла экрана?

ii) *(2 pts)* После этого электрическое поле выключают и включают однородное магнитное поле в регионе $l > x > 0$, направленное по оси z, и пускается вторая частица. Зная, что скорости частицы достаточно ровно для того, чтобы достигнуть экрана, набросайте траекторию и найдите индукцию магнитного поля B.

iii) *(2 pts)* Наконец, включается электрическое поле в плоскости x,y, тогда как B остаётся неизменным. Третья частица пускается из начала координат, также параллельно оси x, но возможно с иной скоростью. Частица продолжает движение без отклонений. Кроме того, время, потраченное на путь до экрана, такое же, как и для второй частицы. Найдите напряжённость электрического поля E.

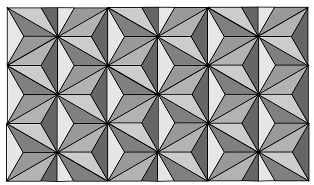
iv) *(3 pts)* Этот пункт не связан с предыдущими. Давайте теперь рассмотрим случай слабо неоднородного магнитного поля: кривизна магнитных линий намного меньше кривизны траектории движения частицы. Оказывается, что в этом случае, так называемый адиабатический инвариант частицы в магнитном поле сохраняется: магнитный поток, окружённый спиралевидной траекторией частицы, остаётся с высокой точностью постоянным при движении вдоль траектории.

Рассмотрим очень упрощённую модель взаимодействия частиц солнечного ветра с магнитным полем Земли. Индукция магнитного поля Земли на её магнитной оси может быть выражена как $B(z) = B_E(R_E/z)^3$, где $B_E = 3{,}12\times10^{-5}\,\mathrm{T}$ – магнитная индукция на поверхности Земли на магнитном полюсе, $R_E = 6370$ – радиус Земли, и z меряется от **центра** Земли.

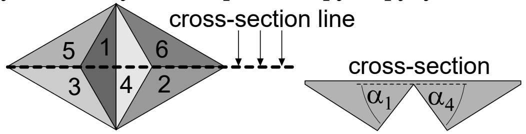
Электрон с зарядом $-e = -1{,}60\times10^{-19}$ и массой $m_e = 9{,}11\times10^{-31}$ приближается к Земле со скоростью $u_0 = 500/$ и попадает в магнитное поле Земли прямо на её оси на расстоянии $R_0 = 5R_E$ под углом α к оси и начинает спиралевидное падение на Землю.

Если α слишком большой, частица будет отражена увеличивающимся магнитным полем при приближении к Земле. Найдите условие для α, чтобы частица могла достигнуть поверхности Земли. Вы можете пренебречь гравитационными и релятивистскими эффектами.

4. Ретрорефлективная плёнка (12 pts) — *Eero Uustalu and Jaan Kalda*. Вам предоставляются следующие инструменты: ретрорефлективная плёнка, увеличенное изображение вида сверху которой представлено на рисунке внизу; штатив, линейка, лазерная указка, экран, бумага для графиков, транспортир.



Тогда как верхняя поверхность плёнки плоская, нижняя поверхность представляет собой периодический узор из наклонных треугольных граней. Шесть таких граней показаны в увеличении на втором рисунке; грани 1, 3 и 5 перпендикулярны друг другу и формируют угол куба, так же как и грани 2, 4 и 6. Справа от второго рисунка показано поперечное сечение плёнки. Материал плёнки между наклонными гранями и плоской поверхностью формирует микропризмы. Призменные углы этих микропризм обозначаются α_i, $i = 1,2,\ldots 6$ (номер в индексе соответствует номеру грани). Некоторые из этих углов могут быть равны друг другу.



Когда свет падает на плоскую поверхность близко к нормали, он, в результате полных внутренних отражений от наклонных граней, разворачивает своё направление движения на $180°$. Однако, микропризмы также могут служить призмами, отклоняющими луч света на угол β. Угол β зависит от угла падения, и от призменного угла $\alpha = \alpha_i$. Пусть β_i обозначает минимальный угол отклонения для заданного призменного угла α_i.

i) *(2 pts)* Проделайте эксперимент, чтобы связать призменные углы α_i (где индексы $i = 1,2,\ldots 6$ относятся к граням как показано на рисунке) равенствами и неравенствами. Вы можете использовать выведенные уравнения на протяжении задачи (уменьшая количество неизвестных углов). Грань, соответствующая индексу "1", может быть выбрана произвольно.

ii) *(2 pts)* Определите минимальные углы отклонения β_i, $i = 1,2,\ldots 6$.

iii) *(4 pts)* Определите призменные углы α_i, $i = 1,2,\ldots 6$.

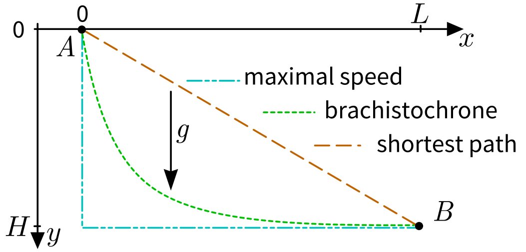
iv) *(1 pt)* По причине того, что грани 1, 3 и 5 перпендикулярны друг другу, верно следующее равенство:

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_5 = 1.$$

Аналогично, $\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_4 + \cos^2\alpha_6 = 1$. Используйте эти равенства, чтобы подкорректировать полученные результаты для призменных углов прибавляя и/или вычитая одно и то же маленькое значение из полученных ранее величин углов.

v) *(3 pts)* Определите коэффициент преломления материала плёнки.

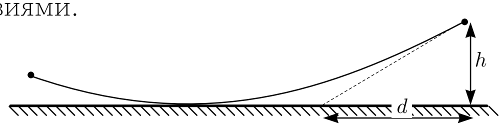
5. Брахистохрона (10 pts) — *Rūdolf Treilis.* Рассмотрим точки A и B, разделённые высотой H в вертикальном направлении и расстоянием L в горизонтальном направлении, расположенные в гравитационном поле g как показано на рисунке внизу. Точечная масса может скользить вдоль рельсы фиксированной формы без трения (включая 90°-градусные повороты) из A в B. Брахистохрона – это кривая, минимизирующая общее время пути.



i) *(2 pts)* Вычислите общее время пути для траектории с "максимальной скоростью"и "кратчайшего пути". Найдите отношение $\frac{L}{H}$, для которого они равны.

ii) *(2 pts)* Согласно принципу Ферма, свет путешествует из одной точки в другую по самой быстрой траектории. Предположим, что в некоторой среде свет может перемещаться из A в B по брахистохроне, изображённой на рисунке выше. Найдите коэффициент преломления $n = n(x,y)$ для этой среды как функцию от координат x в y, если $n(L,H) = 1$.

iii) *(2 pts)* Покажите, что путь луча света, путешествующего по среде с переменным показателем преломления $n(x,y) \equiv n(y)$, удовлетворяет дифференцальному уравнению $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{C \cdot n(y)^2 - 1}$, где C – константа, определяемая граничными условиями.



iv) *(2 pts)* Полученное дифференциальное уравнение может объяснять миражи, которые возникают, когда коэффициент преломления увеличивается с высотой. Рассмотрим луч света, приходящий с неба, который дотрагивается поверхности земли ($y = 0$) и попадает в глаз наблюдателя на высоте h (для этого пункта выберем противоположное направление оси y – снизу наверх. Полагая, что коэффициент преломления меняется как $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$, где n_0 и α – константы, найдите выражение для кажущегося расстояния d, из которого луч света как бы излучается.

v) *(2 pts)* Решая уравнения, выведенные в частях ii) и iii), можно показать, что брахистохрона является на самом деле участком циклоиды. Циклоида – это кривая, которую проводит фиксированная точка на ободе круглого колеса, вращающегося по прямой без скольжения. Для частного случая $\frac{L}{H} = \frac{\pi}{2}$ найдите минимальное время пути $t_{\min}$ между A и B.

6. Самогравитирующий газ (10 pts) — *Eero Vaher (v: Jaan Kalda).* Рассмотрим шар из одноатомного идеального газа при температуре T, который сохраняет сферически-симметричную механически устойчивую стационарную форму благодаря собственному гравитационному полю. Пусть полная масса газа равна M_0, а его молярная масса μ. Мы опишем радиальное распределение массы через общую массу $M = M(r)$ внутри сферы радиуса r, а также давление $p = p(r)$, как функции расстояния r от центра сферического газового облака.

i) *(2 pts)* Укажите условие механического равновесия для небольшого количества газа массой m и объёмом v на расстоянии r от центра облака используя локальный градиент давления $p'(r) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$, локальное значение $M(r)$ и подходящие константы природы. Упростите своё выражение, заметив, что $m/v = \rho$ – это локальная плотность газа.

ii) *(2 pts)* Покажите, что общая тепловая энергия газа может быть выражена как

*10mm$U = -\alpha \int V \,\mathrm{d}p$,

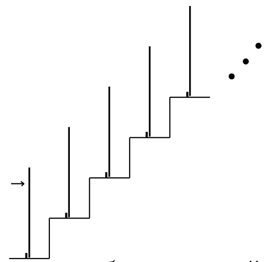
где $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, α – числовой множитель, а интеграл берётся от центра облака до очень большого расстояния от центра, где давление пренебрежимо мало. Найдите значение α.

iii) *(3 pts)* На основании ваших предыдущих результатов покажите, что $U = -\beta E_G$, где E_G – гравитационная потенциальная энергия газа, а $\beta < 1$ – положительный коэффициент. Найдите значение β.

iv) *(1 pt)* Как будут изменяться со временем температура и характерный радиус облака из-за теплового излучения? Дайте качественный мотивированный ответ. (Характерный радиус R_c можно определить как радиус, при котором половина массы облака находится внутри сферы радиуса R_c.)

v) *(2 pts)* Рассмотрим теперь подобное полностью ионизированное плазменное облако. Предположим, что плазма представляет собой макроскопически нейтральную смесь электронов и протонов. Каков коэффициент пропорциональности между общей гравитационной энергией и полной тепловой энергией для плазменного облака?

7. Домино (6 pts) — *Kaarel Hänni.*



Костя стоит внизу бесконечной лестницы, высота и ширина каждой ступеньки равны d. Угол каждой ступеньки слегка закруглён. В середине каждой ступеньки изначально находится направленное вверх домино длиной $\sqrt{5}d$ и пренебрежимо малой толщины. Позади основания каждого домино находится небольшой рубчик, который не даёт ему скользить назад. Костя придаёт первому домино некоторую изначальную угловую скорость, и домино начинают падать друг на друга. Все соударения абсолютно неупругие, и между двумя домино отсутствует трение. Костя обратил внимание, что через некоторое время все домино приобретают одинаковую изначальную угловую скорость ω. Найдите ω.

8. Четыре резистора (10 pts) — *Jaan Kalda and Eero Uustalu.* **Оборудование:** четыре почти полностью идентичных резистора (с сопротивлением слегка больше 4 кОм), обозначенные буквами A–D и номером комплекта, мультиметр, источник тока с регулируемым выходным напряжением, провода. **Не используйте мультиметр как амперметр**; если вы всё же попытаетесь это сделать и спалите мультиметр, то вам новый взамен не выдадут. У мультиметра дисплей с четырьмя цифрами, но первая цифра может быть только 0, 1, 2 или 3. Когда мультиметр используют как омметр, погрешность составляет 1.0% от показания плюс 4-кратное значение последнего знака. Когда мультиметр используют как вольтметр, погрешность составляет 0.6% от показания плюс 4-кратное 4-кратное значение последнего знака.

i) *(2 pts)* Запишите номер вашего комплекта. Определите среднее сопротивление $\bar{r}$ четырёх резисторов как можно более точно и оцените погрешность. Нарисуйте используемую вами электрическую схему.

ii) *(2 pts)* Определите как можно более точно среднее гармоническое сопротивление $\langle r \rangle$ четырёх резисторов (среднее гармоническое – это обратное значение среднего обратных величин) и оцените погрешность. Нарисуйте используемую вами электрическую схему.

iii) *(1 pt)* Упорядочьте резисторы A, B, C и D в порядке возрастания сопротивления. Нарисуйте используемую вами электрическую схему.

iv) *(5 pts)* Определите $r_A - \bar{r}$, $r_B - \bar{r}$, $r_C - \bar{r}$ и $r_D - \bar{r}$ как можно более точно и оцените погрешность (r_A, r_B, r_C и r_D обозначают сопротивления соответствующих резисторов). Нарисуйте используемую вами электрическую схему.