

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ТУРА

## Суперпозиция колебаний

Описанные в эксперименте продольные и крутильный колебания маятника в приближении малых углов являются его собственными колебаниями (модами), поэтому их можно рассматривать независимо друг от друга.

В приближении малых углов периоды этих колебаний даются формулами

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (1)$$

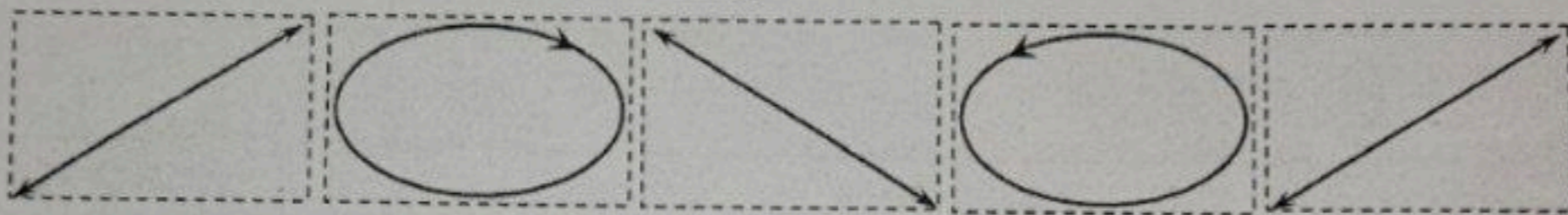
$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{4LI}{mga^2}}, \quad (2)$$

где  $m = m_0 + 2m_1$  – масса маятника,  $m_0$  – масса стержня,  $m_1$  – масса гайки,  $I = \frac{m_0 l^2}{12} + 2m_1 z^2$  – момент инерции стержня с гайками.

Формулы (1) и (2) фактически используются в работе, но вывод их не требуется и в дальнейшем не оценивается.

## Часть 1. Наблюдение эффекта и его качественное описание.

1.1 Конец стержня описывает траектории, соответствующие сложению перпендикулярных колебаний с близкими частотами. Их также можно представить, как сложение колебаний с равными частотами, но с медленно изменяющейся разностью фаз между ними. Изображения этих наиболее типичных траекторий показаны на рисунке ниже.

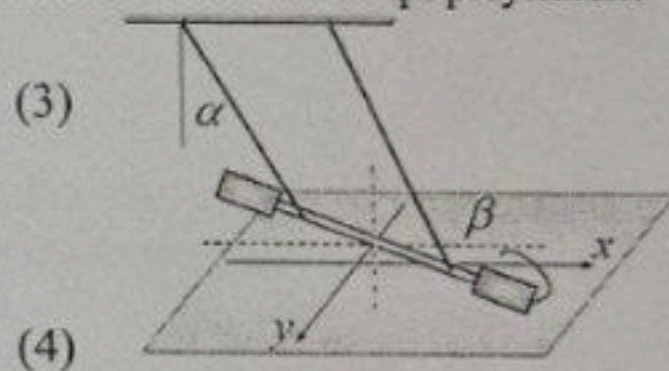


1.2 Из геометрии следует, что горизонтальные координаты конца стержня описываются формулами:

$$\begin{cases} x = L \sin \alpha + \frac{l}{2} \cos \beta \\ y = \frac{l}{2} \sin \beta \end{cases} \quad (3)$$

В приближении малых углов  $\alpha, \beta \ll 1$  имеем

$$\begin{cases} x \approx L\alpha + \frac{l}{2} \\ y \approx \frac{l}{2}\beta \end{cases}$$



(4)

Так как углы  $\alpha, \beta$  изменяются по гармоническому закону с частотами  $\omega_0 = 2\pi/T_0$  и  $\omega_1 = 2\pi/T_1$  соответственно, то уравнение траектории конца стержня имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = L\alpha_{max} \cos \omega_0 t + \frac{l}{2} \\ y(t) = \frac{l}{2} \beta_{max} \sin \omega_1 t \end{cases}, \quad (5)$$

которые для близких частот удобно переписать в виде

$$\begin{cases} x(t) = L\alpha_{max} \cos \omega_0 t + \frac{l}{2} \\ y(t) = \frac{l}{2} \beta_{max} \sin(\omega_0 t + (\omega_1 - \omega_0)t) \end{cases} \quad (6)$$

В выражении  $y(t)$  для близких частот величину  $\Delta\varphi = (\omega_1 - \omega_0)t$  можно рассматривать как медленно изменяющуюся разность фаз между колебаниями с близкими частотами.

1.3 Очевидно, что форма траектории возвратится к начальной, если разность фаз изменится на величину  $\pm 2\pi$ . Таким образом, период цикла  $T_C$  подчиняется условию

$$(\omega_1 - \omega_0)T_C = \pm 2\pi, \quad (7)$$

откуда следует

$$T_C = \frac{T_0 T_1}{|T_0 - T_1|} \quad (8)$$

1.4 Число колебаний продольных колебаний в цикле можно записать в виде

$$N_c = \frac{T_c}{T_0} = \frac{T_1}{|T_0 - T_1|} \quad (9)$$

### Часть 2. Продольные колебания.

2.1 Для повышения точности измерения нужно проводить измерения времен достаточно большого числа колебаний, в наших экспериментах проведены измерения времени 20 периодов колебаний  $t_{20}$ . Для оценки случайной погрешности эти измерения проведены 10 раз, а их результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1. Измерение периода продольных колебаний.

$n$	$t_{20}, \text{с}$	
1	26,39	<p>Среднее значение времени 20 колебаний составляет <math>\langle t_{20} \rangle = 26.41 \text{ с}</math>,  а приборная погрешность равна половине цены деления секундомера <math>\Delta t_1 = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ с}</math>.  Случайная погрешность рассчитывается по формуле</p> $\Delta t_2 = 2 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (t_{20,i} - \langle t_{20} \rangle)^2}{n(n-1)}} = 6.5 \cdot 10^{-2} \text{ с}.$ <p>Полная погрешность измерения времени равна <math>\Delta t = \sqrt{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2} = 0.066 \text{ с}</math>.</p>
2	26,32	
3	26,51	
4	26,40	
5	26,46	
6	26,41	
7	26,34	
8	26,22	
9	26,55	
10	26,53	

Таким образом, период продольных колебаний равен

$$T_0 = \frac{t_{20}}{20} = (1.321 \pm 0.003) \text{ с}. \quad (10)$$

### Часть 3. Крутильные колебания.

3.1 В таблице 2 приведены значения результатов измерений периодов крутильных колебаний при различных значениях расстояния между нитями  $a$ . В этой же таблице приведены результаты расчетов для определения показателя степени  $q$ .

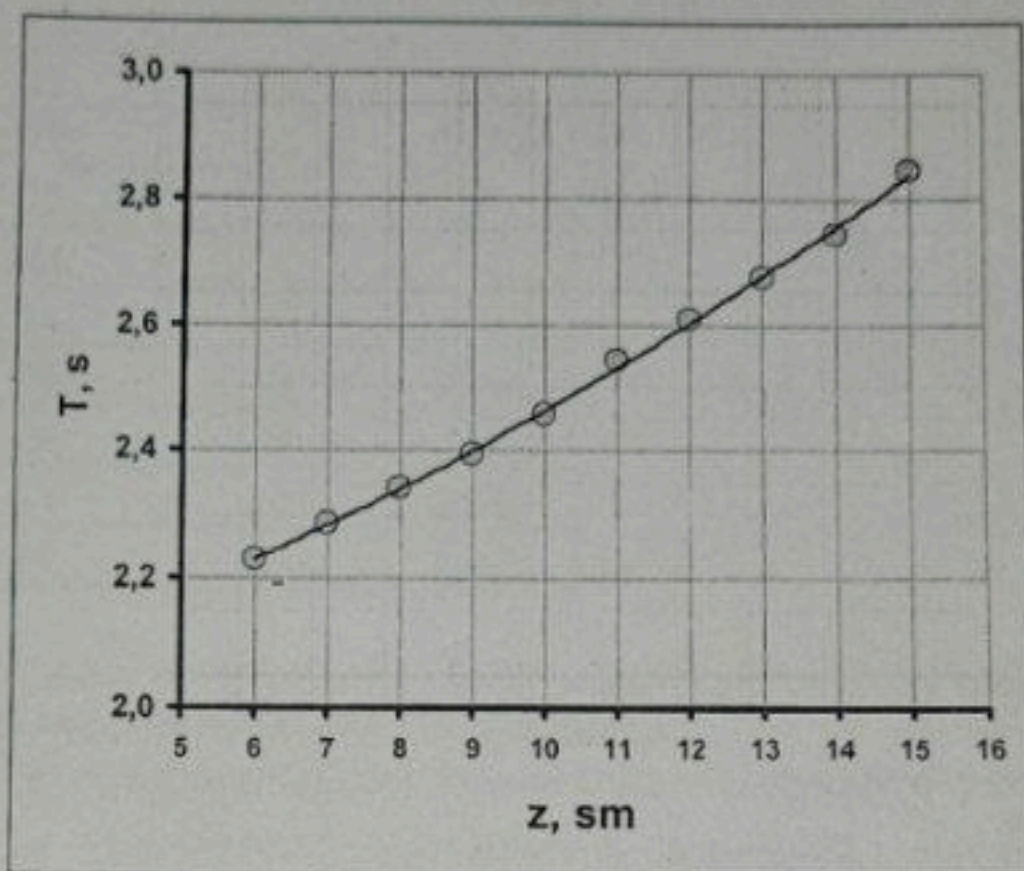
Таблица 2. Зависимость периода крутильных колебаний от расстояния между нитями.

$a, \text{см}$	$t_{10}, \text{с}$	$T_1, \text{с}$	$\ln a$	$\ln T_1$
4,8	59,11	5,911	1,5686	1,7768
6,3	44,62	4,462	1,8405	1,4956
7,8	36,31	3,631	2,0541	1,2895
9,4	29,66	2,966	2,2407	1,0872
11,0	25,60	2,560	2,3979	0,9400
12,2	23,32	2,332	2,5014	0,8467
13,8	20,46	2,046	2,6247	0,7159
16,0	17,66	1,766	2,7726	0,5687
18,2	15,82	1,582	2,9014	0,4587
20,5	13,87	1,387	3,0204	0,3271
24,0	11,98	1,198	3,1781	0,1807

Соответствующий график зависимости имеет вид

9	47,87	2,394	81	5,729	328,5
10	49,17	2,459	100	6,044	346,5
11	50,84	2,542	121	6,462	370,5
12	52,15	2,608	144	6,799	389,8
13	53,47	2,674	169	7,148	409,8
14	54,85	2,743	196	7,521	431,2
15	56,91	2,846	225	8,097	464,2

График этой зависимости показан на рисунке ниже. Видно, что полученная зависимость является нелинейной.



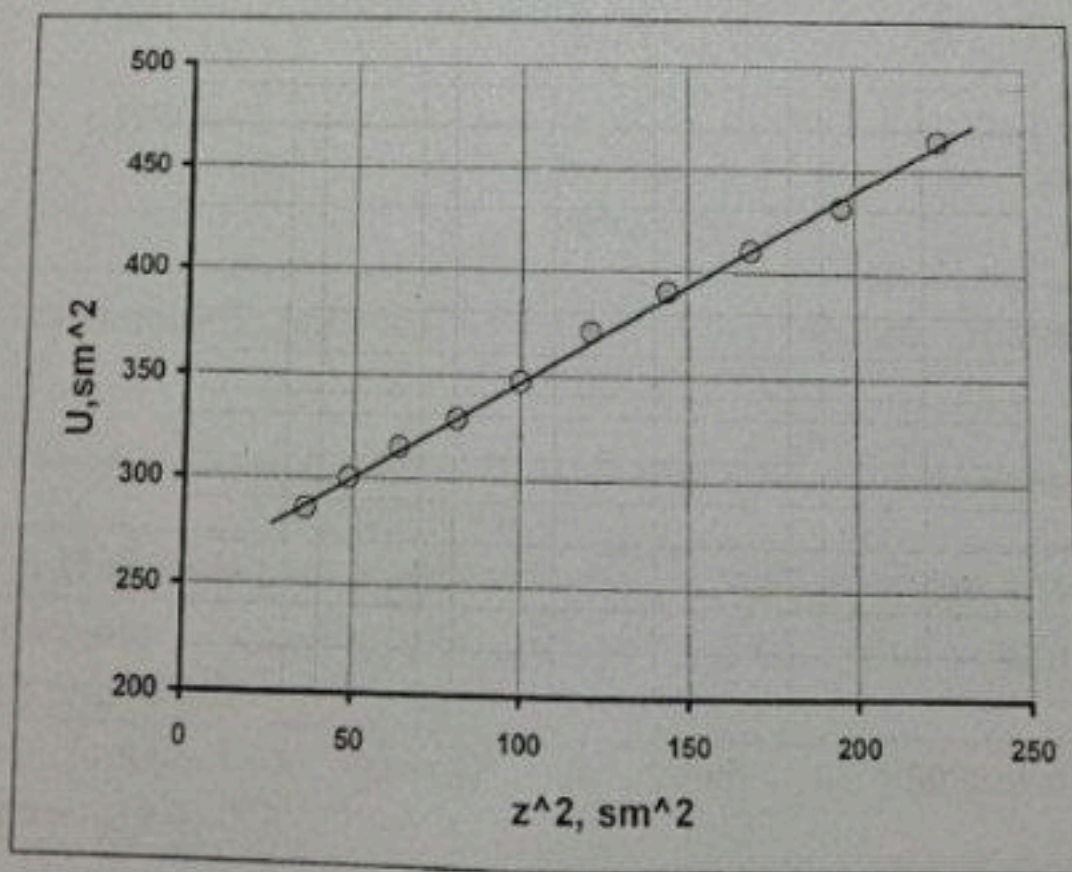
3.4 Из формул (1)-(2), приведенных в условии, и результата предыдущего пункта следует, что период крутильных колебаний описывается формулой

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{\sqrt{A+Bz^2}}{a}, \quad (12)$$

линеаризация которой очевидна и имеет вид

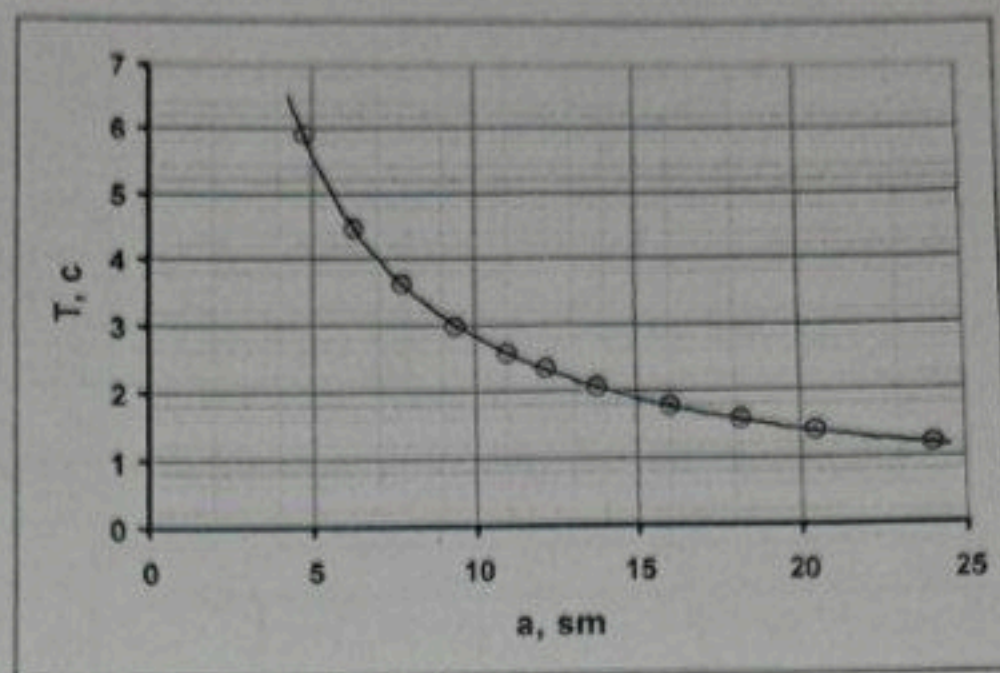
$$\left(a \frac{T_1}{T_0}\right)^2 = A + Bz^2. \quad (13)$$

Величина  $U = \left(a \frac{T_1}{T_0}\right)^2$  линейно зависит от  $z^2$ , а график линеаризованной зависимости показан на рисунке ниже.



3.5 Коэффициенты этой зависимости, рассчитанные по методу наименьших квадратов, равны

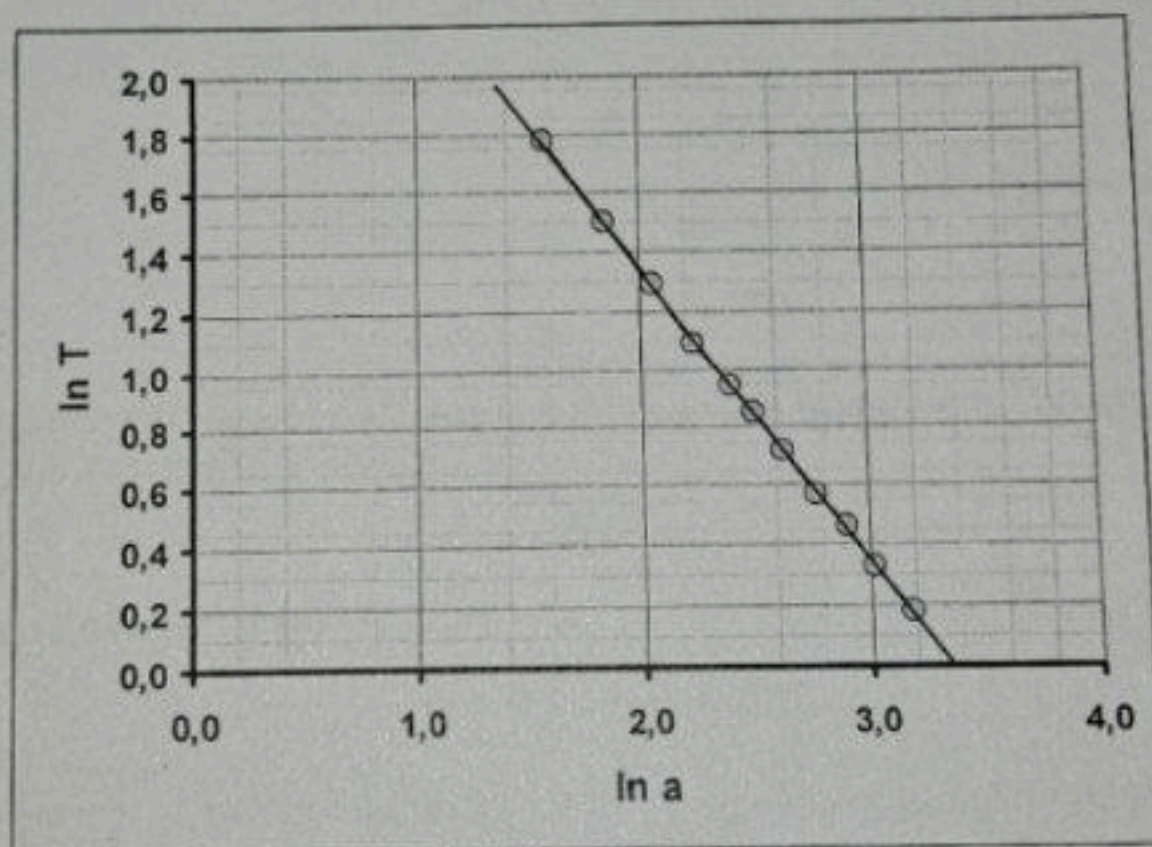
$$A = (254 \pm 4) \text{ см}^2, \quad (14)$$



3.2 Оптимальным и наиболее распространенным способом определения показателя степени является построение графика в двойном логарифмическом масштабе. Из формулы (1), приведенной в условии задачи следует, что

$$\ln T = C + q \ln a, \quad (11)$$

поэтому коэффициент наклона графика равен показателю степени. Этот график показан на рисунке ниже.



Полученная зависимость является линейной с коэффициентом наклона, очень близким к (-1). Альтернативными способами является построение зависимостей  $T_1(a^{-1})$ , или  $T_1^{-1}(a)$ . Однако, в этих способах необходимо доказать, что построенные графики являются прямыми линиями, проходящими через начало координат.

Все эти способы обоснованно свидетельствуют, что искомый показатель степени равен (-1), т.е. период крутильных колебаний обратно пропорционален расстоянию между нитями.

3.3 Результаты измерений зависимости периода крутильных колебаний от положения гаек приведены в Таблице 3. В этой же таблице приведены результаты расчетов, необходимые для построения линеаризованного графика.

Таблица 3. Измерения периода крутильных колебаний.

z, см	$t_{20}, c$	$T_1, c$	$z^2$	$T_1^2$	$U$
6	44,58	2,229	36	4,968	284,9
7	45,75	2,288	49	5,233	300,0
8	46,83	2,342	64	5,483	314,3

$$B = 0.93 \pm 0.03.$$

(15)

**Часть 4. Смешанные колебания.**

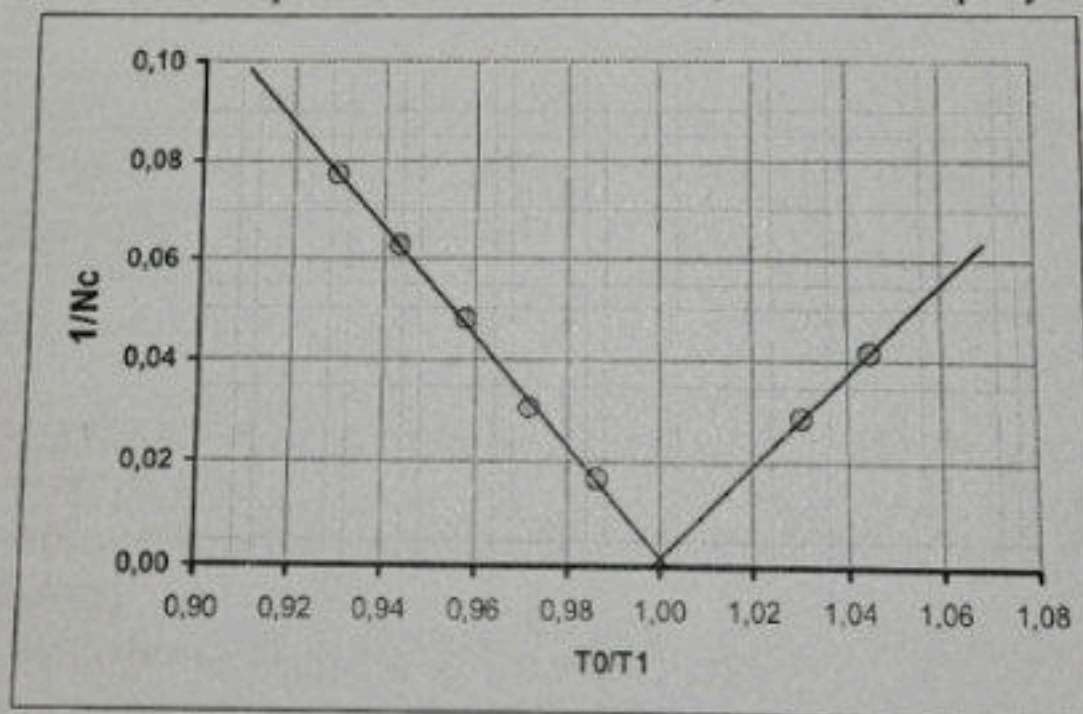
4.1, 4.2 В Таблице 4 приведены результаты измерений и расчетов, необходимых для проверки теоретической формулы (9).

Таблица 4. Изучение смешанных колебаний.

z, см	$T_1$ , с	$\frac{T_0}{T_1}$	$N_c$ (теор.)	$N_c$ (эксп)	$\frac{1}{N_c}$
10,5	1,247	1,059	17		
11,0	1,264	1,045	22	24	0,042
11,5	1,282	1,030	33	35	0,029
12,0	1,301	1,015	65		
12,5	1,319	1,002	660		
13,0	1,339	0,987	74	60	0,017
13,5	1,359	0,972	36	33	0,030
14,0	1,379	0,958	24	21	0,048
14,5	1,400	0,944	18	16	0,063
15,0	1,421	0,930	14	13	0,077

В этой таблице:  $T_1$  – рассчитанные по формуле (12) значения периодов крутильных колебаний;  $N_c$  – рассчитанные и измеренные значения числа периодов в цикле.

4.3 Для проверки формулы (9) построен график зависимости величины обратной числу колебаний  $\frac{1}{N_c}$  от величины  $\frac{T_0}{T_1}$ , которая теоретически описывается формулой  $\frac{1}{N_c} = \left| \frac{T_0}{T_1} - 1 \right|$ . График этой зависимости, построенный по экспериментальным данным, показан на рисунке ниже.



Этот график, а также сравнение рассчитанных и измеренных значений  $N_c$ , подтверждают теоретические выводы.

Содержание		Баллы	Всего
<b>Часть 1. Наблюдение эффекта и его теоретическое описание</b>			
1.1	Получено сложение колебаний (есть хотя бы один правдоподобный рисунок)	0,2	1,0
	4 рисунка: два близких к отрезку, два овала с указанием направления движения 4x0,2	4x0,2=0,8	
1.2	Выражения для координат на плоскости через углы отклонения	2x0,2=0,4	0,8
	Явные зависимости от времени	2x0,1=0,2	

1.3	Приближение малых углов	0,2	1,3
	Основная идея – изменение разности фаз, формула (7); (если период биений)	0,5 (0,2)	
	Формула для времени цикла (8)	0,5	
	Поставлен модуль в формуле (8)	0,3	
1.4	$N_c = \frac{T_1}{ T_0 - T_1 }$	0,4	0,4
<b>Часть 2. Продольные колебания</b>			
2.1	<i>Оценивается, если оценено численное значение периода колебаний</i>		2,0
	Получено значение периода в интервале 1,3 – 1,5 с	0,4	
	Погрешность измерения менее 1% (оценивается, если оценена погрешность)	0,1	
	Проведено не менее 5 измерений времени N колебаний (3, менее)	0,3 (0,1;0)	
	Число колебаний N не менее 10 (5; менее)	0,2 (0,1;0)	
	Проведено усреднение по всем измерениям	0,1	
	Рассчитана случайная погрешность (усреднение модулей отклонений, среднеквадратичное отклонение – допустимы)	0,2	
	Приборная погрешность (половина, или цена деления)	0,2	
	Рассчитана полная погрешность (сумма допустима)	0,2	
	Правильное округление (погрешность – 1-2 цифры, результат – до разряда погрешности)	0,2	
указана размерность результата	0,1		
<b>Часть 3. Крутильные колебания</b>			
3.1	<i>Оценивается, если оценены результаты измерений!</i>		2,5
	<i>Если гайки расположены не на концах стержня, результат делится на 2.</i>		
	За каждое измерение 0,15 (в сумме не более 1,5; попадание в диапазон 20%, если измерялось время менее 10 колебаний, по 0,1 за измерение)	0,15x10=1,5	
	Нижняя граница диапазона не более 5,0 см	0,2	
	Верхняя граница диапазона не менее 15,0 см	0,2	
	Получена нелинейная зависимость, близкая к гиперболической	0,1	
Построение графика (оси подписаны и оцифрованы, нанесены все точки в соответствии с таблицей, проведена сглаживающая кривая)	0,1+0,2+0,2=0,5		
3.2	<i>Оценивается, если степень -1, оценены результаты измерений</i>		1,5
	Получено значение $q=-1$	0,5	
	Проведена линеаризация в двойном логарифмическом масштабе (проведен расчет) (обратные величины, с доказательством прохождения через нуль);	0,5 (0,2+0,2)	
	Построен график линеаризованной зависимости (оси подписаны и оцифрованы, нанесены все точки в соответствии с таблицей, проведена сглаживающая прямая)	0,1+0,2+0,2=0,5	
3.3	<i>Если расстояние между нитями отличается от 10 см, результат делится на 2</i>		2,5
	За каждое измерение 0,15 (в сумме не более 1,5; попадание в диапазон 20%, если измерялось время менее 10 колебаний, по 0,1 за измерение)	0,15x10=1,5	
	Нижняя граница диапазона не более 6,5 см	0,2	
	Верхняя граница диапазона не менее 14,0 см	0,2	
	Получена нелинейная зависимость выпуклость вниз	0,1	

	Построение графика (оси подписаны и оцифрованы, нанесены все точки в соответствии с таблицей, проведена сглаживающая кривая)	$0,1+0,2+0,2=0,5$	
3.4	Проведена линеаризация (рассчитаны квадраты периодов и расстояний)	0,3	1,0
	Построен график линеаризованной зависимости	$0,1+0,2+0,2=0,5$	
	Получена прямая линия	0,2	
3.5	Оценивается, если оценены пп. 3.3 – 3.4		1
	Получены численные значения коэффициентов (в диапазоне 20%, не указана размерность -0,1)	$2 \times 0,4 = 0,8$	
	Рассчитаны погрешности коэффициентов	$2 \times 0,1 = 0,2$	
	Расчет по МНК коэффициент 1; графически, усреднением по всем точкам – 0,8; по двум точкам – 0,5;		
<b>Часть 4. Смешанные колебания</b>			
	Оценивается, если оценены результаты измерений		
4.1	За каждое измерение 0,2 (в сумме не более 2,0; попадание в диапазон 30%)	$0,2 \times 10 = 2,0$	4
	Есть две ветви зависимости (не менее 2 точек на каждой)	1,0	
	Нижняя граница диапазона не более 11 см	0,2	
	Верхняя граница диапазона не менее 15 см	0,2	
	Получено число $N > 50$	0,3	
	Резкое возрастание (круче линейного)	0,1	
	Есть «неизмеряемая» область в середине диапазона	0,2	
4.2	Проведен расчет периодов (диапазон – 20%) по 0,05 за каждую точку, не менее 3 знаков после запятой)	$0,05 \times 10 = 0,5$	0,5
4.3	Предложена линеаризация (обратные величины числа колебаний от отношения периодов, разности периодов); Проведен теоретический расчет числа колебаний, проведено сравнение с результатами эксперимента	0,5 $0,2+0,1=0,3$	1,5
	Проведен расчет линеаризованной зависимости	0,2	
	Построен график линеаризованной зависимости	0,4	
	Построен график результатов измерений	0,2	
	Получен график, похожий на график функции модуль числа.	0,3	
	Правильное положение минимума графика	0,1	
	<b>ВСЕГО</b>		<b>20,0</b>