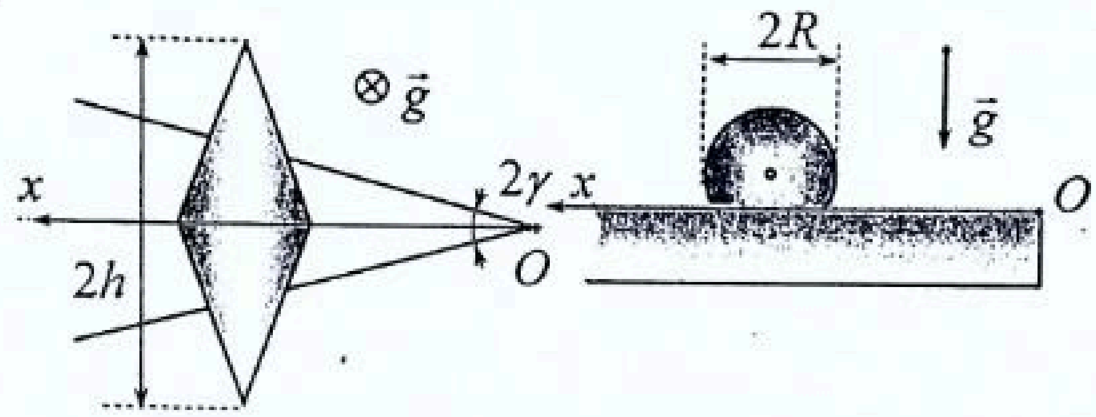
Задача 1 (10.0 балла)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

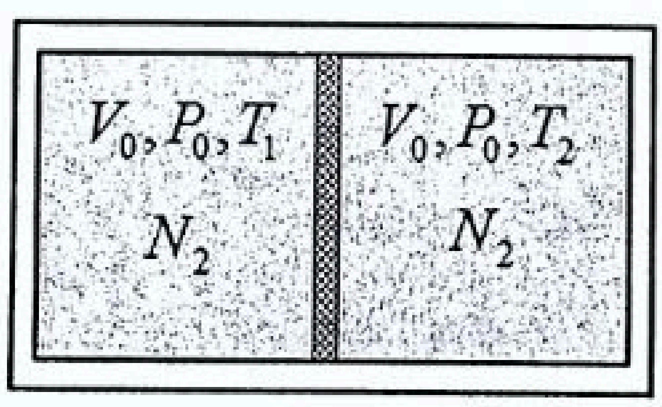
Задача 1.1 (3.0 балла)

На двух одинаковых горизонтальных V-образных рейках (см. рисунок ниже), образующих двугранный угол 2γ ($\tan\gamma = 0.100$), находится сплошной биконус с диаметром основания $D = 2R = 8.00$ см и расстоянием между вершинами $2h = 20.0$ см, представляющий собой два идентичных однородных конуса, жестко скрепленных своими основаниями. Вначале биконус удерживают так, что его центр масс находится над вершиной двугранного угла симметрично относительно его биссекториальной плоскости. Затем его отпускают, и он начинает катиться по рейкам без проскальзывания. Найдите зависимость скорости поступательного движения биконуса $v(x)$ от координаты x, отсчитываемой по горизонтали от вершины двугранного угла до центра масс биконуса. Рассчитайте величину скорости биконуса v_0 при $x_0 = 50.0$ см. Определите максимальную угловую скорость ω_{max}, которую достигнет биконус в процессе движения. Считайте, что высота реек превышает радиус основания конуса, а ускорение свободного падения равно $g = 9.80$ м/с².



Задача 1.2 (4.0 балла)

Теплоизолированный сосуд объёмом $2V_0 = 2.00$ л разделён тонкой невесомой подвижной теплопроводящей перегородкой на две равные части, в каждой из которых находится азот N_2 при давлении $P_0 = 100$ кПа. Начальная температура азота в одной из половин сосуда равна $T_1 = 240$ К, а в другой – $T_2 = 360$ К. В результате теплообмена перегородка начинает медленно перемещаться без трения. 1) Определите количество теплоты Q, которым обменяются части сосуда к моменту установления полного термодинамического равновесия; 2) Рассчитайте минимальную работу A', которую необходимо совершить, чтобы вернуть перегородку в исходное положение. Теплоёмкостями сосуда и перегородки пренебречь.



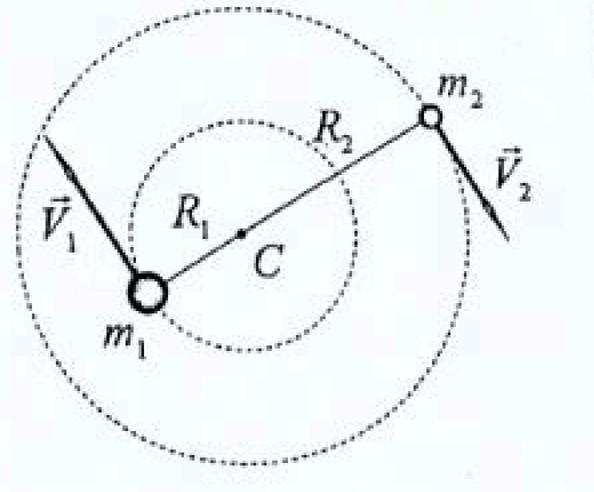
Задача 1.3 (3.0 балла)

Электродвигатель, подключенный к аккумуляторной батарее, поднимает с постоянной скоростью груз массы m на некоторую высоту h за время $t_1 = 1.00$ мин. При этом груз привязывается к нити, наматывающейся на равномерно вращающийся вал электродвигателя. Время подъёма двух грузов суммарной массы $2m$ на ту же высоту оказалось на $\Delta t = 7.00$ с больше. 1) Найдите максимальное количество n_{max} грузов одинаковой массы m, которые способен поднять такой электродвигатель; 2) Рассчитайте время t_{max}, которое потребуется электродвигателю для равномерного подъёма максимального количества грузов n_{max} на высоту h. Считайте, что крутящий момент электродвигателя пропорционален току, протекающему по его обмотке.

Задача 2. Точки Лагранжа (10.0 балла)

Задача двух тел.

Рассмотрим задачу двух тел. Два массивных тела, масса одного из них которых равна m_1, а второго – $m_2 < m_1$, движутся только под действием силы гравитационного взаимодействия по круговым орбитам вокруг общего центра масс C. Расстояние между телами остается неизменным и равным R_0.



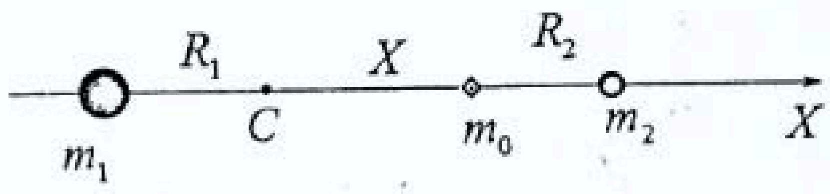
2.1 Найдите радиусы траекторий тел R_1 и R_2. Ответ выразите через величины R_0, m_1, m_2.

2.2 Найдите угловую скорость движения тел ω_0. Ответ выразите через величины R_0, m_1, m_2 и гравитационную постоянную G.

Точки Лагранжа в системе трех тел.

Точки Лагранжа, точки либрации (лат. librātiō – раскачивание) или L-точки – точки в пространстве системы двух массивных тел, в которых третье тело с пренебрежимо малой массой, не испытывающее воздействия никаких других сил, кроме гравитационных со стороны двух первых, может оставаться неподвижным относительно этих тел.

Добавим в рассмотренную выше систему третье тело, масса которого m_0 значительно меньше масс первых двух тел, $m_0 \ll m_1, m_2$. Введем ось X, вдоль прямой, проходящей через тела m_1, m_2, как показано на рисунке. Начало отсчета совместим с центром масс C. Для упрощения математических преобразований используйте следующие величины:



- в качестве единицы длины используйте расстояние R_0 между телами m_1, m_2; положение малого тела определяется безразмерной координатой $x = X/R_0$, которая может изменяться от минус до плюс бесконечности.
- в качестве единицы силы используйте величину $F_0 = m_0\omega_0^2 R_0$;
- введем безразмерный параметр $\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$.

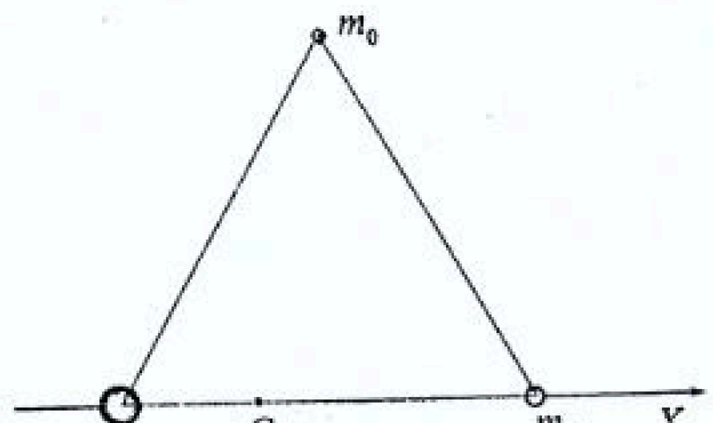
2.3 Получите точное уравнение для определения координат x точек Лагранжа, лежащих на оси X. В это уравнение, помимо искомой координаты x, должен входить только параметр μ.

2.4 Постройте схематический график зависимости проекции на ось X силы F_x, действующей на малое тело со стороны двух массивных тел при $\mu = 0.20$. Ответ выразите через относительные единицы $f_x = F_x/F_0$ и $x = X/R_0$.

2.5 Определите возможное число точек Лагранжа, которые существуют на оси X.

2.6 Рассчитайте численные значения координат этих точек с погрешностью, не превышающей $\Delta x = 0.05$, если $\mu = 0.20$.

2.7 Докажите, что точка, лежащая в вершине правильного треугольника, построенного на отрезке m_1, m_2, является точкой Лагранжа.



Точки Лагранжа в Солнечной системе.

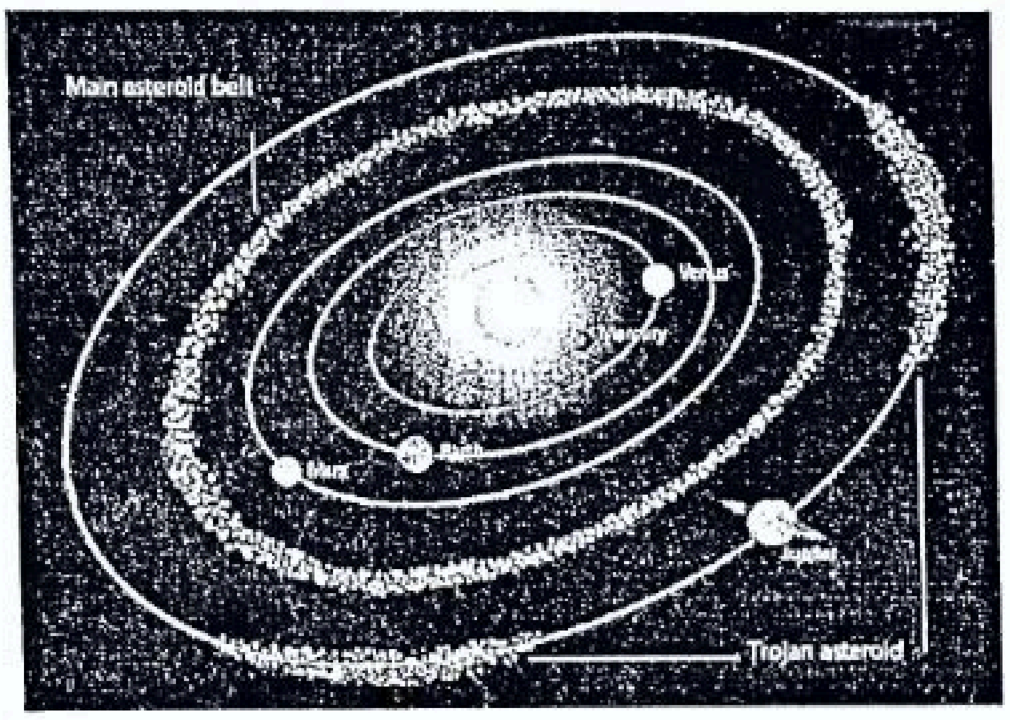
Для расчетов используйте следующие численные значения астрономических величин: масса Солнца $M_1 = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг; масса Земли $M_2 = 5.97 \cdot 10^{24}$ кг; орбиту Земли можно считать окружностью с радиусом $R_0 = 1.50 \cdot 10^8$ км; период обращения Юпитера вокруг Солнца составляет 11.9 земных года.

SOHO – космический аппарат для наблюдения за Солнцем, совместный проект ЕКА и НАСА который был запущен 2 декабря 1995 года и приступил к работе в мае 1996 года. Аппарат находится на прямой, соединяющей Солнце и Землю, его положение относительно Земли остается практически неизменным с течение времени.

2.8 Определите, на каком расстоянии l_S от Земли находится аппарат SOHO. Формулу выразите через отношение масс Земли и Солнца и радиус земной орбиты, Рассчитайте численное значение этого расстояния.

25 декабря 2021 года с космодрома Куру при помощи ракеты «Ариан-5» был успешно запущен космический аппарат, снабженный инфракрасным телескопом «Джеймс Уэбб». В январе 2022 года этот аппарат вышел в точку своей постоянной дислокации. Положение телескопа будет оставаться практически неизменным относительно Земли, причем все время он будет находиться в тени Земли.

2.9 Определите, на каком расстоянии l_W от Земли находится телескоп «Джеймс Уэбб». Формулу выразите через отношение масс Земли и Солнца и радиус земной орбиты, Рассчитайте численное значение этого расстояния.



Малые планеты, называемые астероидами, распределены в Солнечной системе крайне неравномерно: помимо известного пояса астероидов, расположенного между орбитами Марса и Юпитера, имеются две большие группы астероидов, движущиеся вблизи орбиты Юпитера. Эти группы астероидов называют «троянскими».

2.10 Рассчитайте расстояния l_J от Юпитера до центров групп троянских астероидов.

Задача 3. Геометрическая оптика и фотодетектор (10.0 баллов)

В данной задаче будет исследованы законы геометрической оптики с помощью фотодетектора, который представляет собой прибор для преобразования световой энергии в электрическую. Будем считать, что поглощающая поверхность фотодетектора является плоской и при его подключении к миллиамперметру он показывает величину тока, пропорциональную мощности поглощаемого электромагнитного излучения.

Геометрическая оптика – раздел оптики, изучающий законы распространения света в прозрачных средах, отражения света от зеркально-отражающих поверхностей и принципы построения изображений при прохождении света в оптических системах без учёта его волновых свойств. Основное понятие геометрической оптики – это световой луч. При этом подразумевается, что направление потока лучистой энергии (ход светового луча) не зависит от поперечных размеров пучка света. Вспомним необходимые для данной задачи законы геометрической оптики.

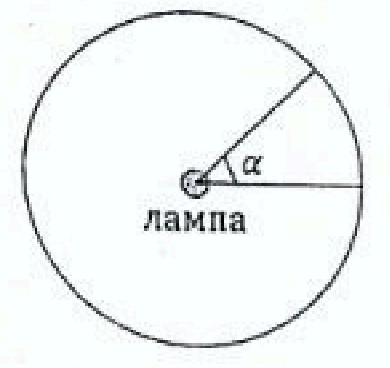
3.1 При отражении от плоской поверхности падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости с нормалью в точке падения. Пусть падающий луч составляет с нормалью угол α, а отраженный луч – угол β. Запишите соотношение между этими углами.

3.2 При падении света из воздуха на плоскую поверхность материала с показателем преломления n падающий и преломленный лучи также лежат в одной плоскости с нормалью в точке падения. Пусть падающий луч составляет с нормалью угол α, а преломленный луч – угол β. Запишите соотношение между этими углами.

В дальнейшем в данной задаче мы будем рассматривать только ситуации, в которых в процессах преломления света вышеупомянутые углы малы и можно пользоваться приближением параксиальной оптики.

3.3 Перепишите ответ к пункту 3.2 в случае малых углов падения и преломления.

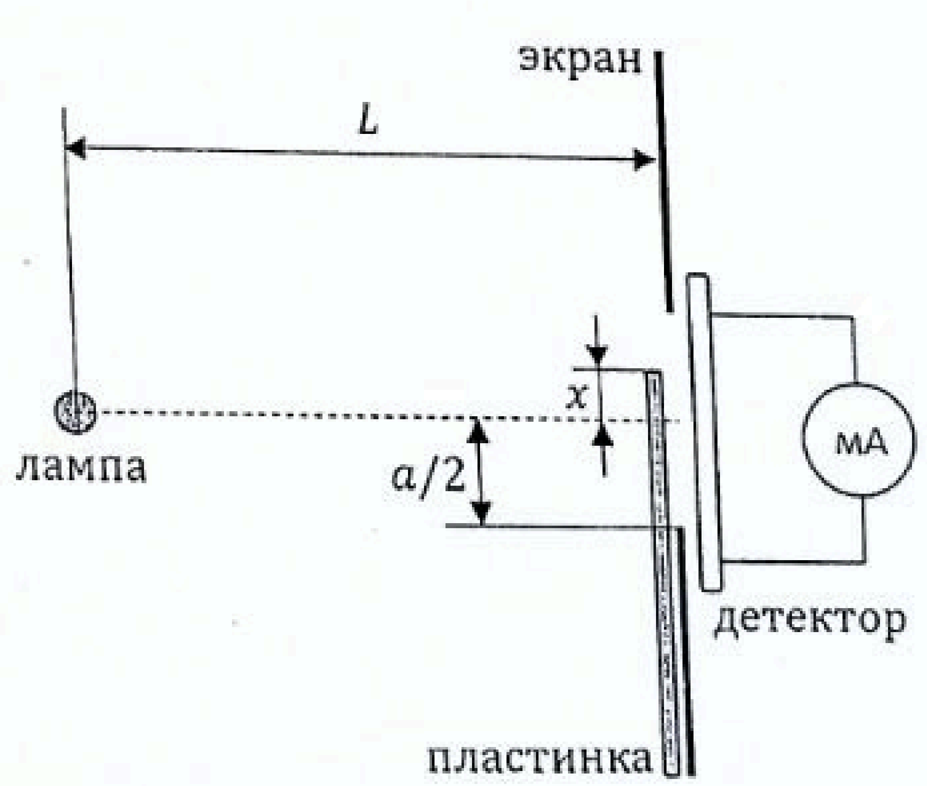
В данной задаче в качестве источника излучения будет использоваться очень длинная тонкая цилиндрическая лампа, поверхность которой излучает одинаково по всем направлениям.



3.4 Пусть мощность излучения лампы со всей ее поверхности составляет W. Определите мощность излучения W_α, сконцентрированную в плоском угле α как показано на рисунке.

Тонкая пластинка

Пусть описанный выше источник света освещает непрозрачный экран, в котором проделана прямоугольная щель шириной $a = 5.00$ см. Лампа располагается параллельно краям щели прямо напротив ее центра на расстоянии $L = 100$ см, а сразу за щелью располагается поверхность фотодетектора таким образом, что она улавливает весь световой поток, прошедший через щель. Сам фотодетектор подключен к миллиамперметру. Вдоль экрана может параллельно перемещаться тонкая прямоугольная пластина, верхний край которой параллелен краям щели, при этом материал пластинки является полупрозрачным с коэффициентом пропускания $\tau = 0{,}500$. В отсутствии пластинки миллиамперметр показывает значение тока $I_0 = 10.0$ мА.



3.5 Пусть теперь x – координата от центра щели до края пластинки с вертикально направленной вверх осью. Постройте график зависимости отклонения показаний миллиамперметра $\Delta I(x)$ в миллиамперметрах от начального показания I_0 от координаты x в интервале от -5.00 см до 5.00 см. Явно укажите координаты всех характерных точек графика.

Толстая пластинка

Оставим схему наблюдения прежней, но заменим тонкую пластинку на толстую пластинку толщиной d, при этом его горизонтальная поверхность является идеально отражающим зеркалом с обеих сторон, а коэффициент преломления материала составляет n. Для данной части считайте численные значения параметров a, L, τ и I_0 неизвестными. Для наглядности схема расположения показана на рисунке 1, а на рисунке 2 показаны соответствующие результаты измерений в диапазоне изменения координаты x от -3.00 см до 0.00 см и отмечены три характерные точки графика x_1, x_2, x_3. Здесь $\Delta I(x)$ – отклонения показаний миллиамперметра в миллиамперметрах от начального показания I_0 в отсутствии пластинки.

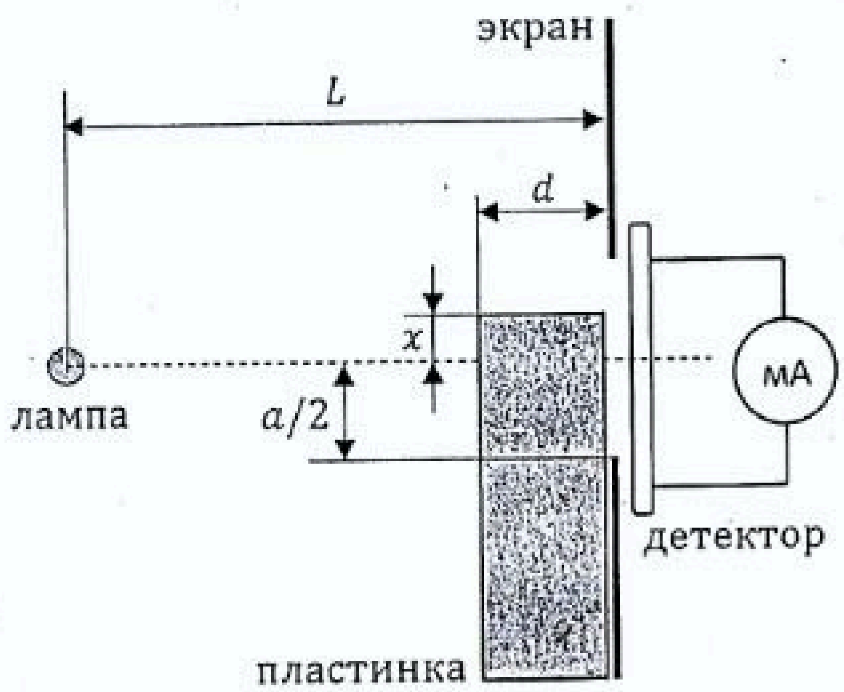


Рисунок 1. Схема проведения измерений.

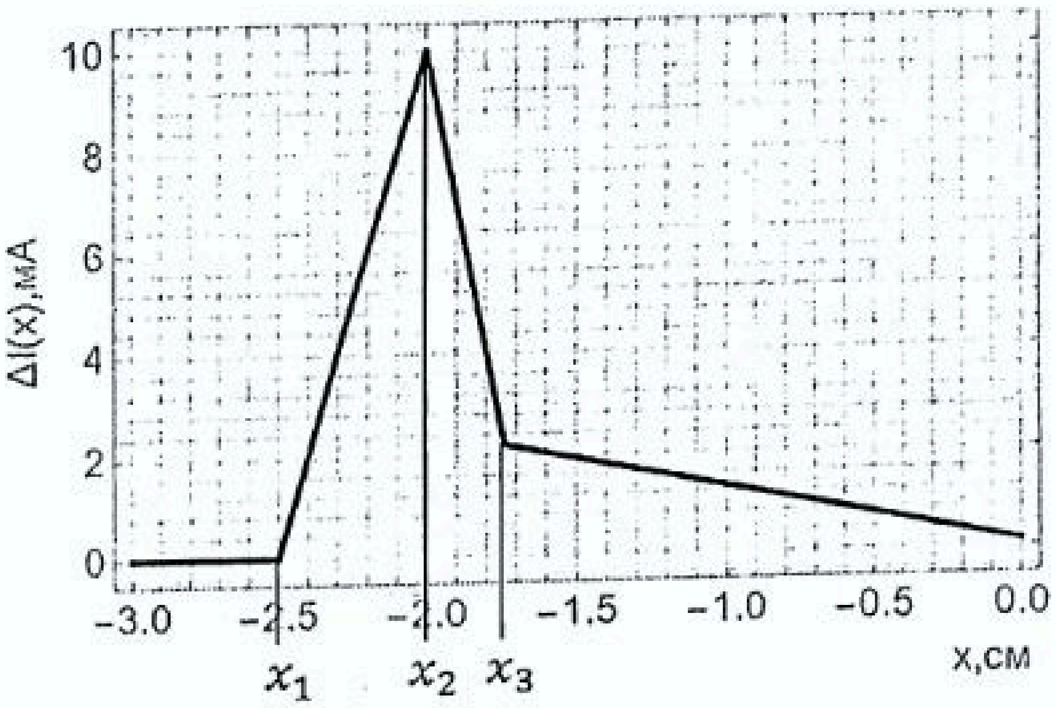


Рисунок 2. Результаты измерений.

3.6 Выразите значения координаты точки x_1 через величины a, L, d, n, τ.

3.7 Выразите значения координаты точки x_2 через величины a, L, d, n, τ.

3.8 Выразите значение ΔI_{max} в точке x_2 через величины a, L, d, n, τ и I_0.

3.9 Выразите значения координаты точки x_3 через величины a, L, d, n, τ.

3.10 Найдите коэффициент наклона прямой $d\Delta I(x)/dx$ на участке правее точки x_3 и выразите его через величины a, L, d, n, τ, I_0.

3.11 Исходя из графика и параметров, полученных в 3.6-3.10, определите численные значения параметров a, n, τ, I_0, а также отношение L/d.

3.12 Исходя из полученных числовых данных, постройте правую часть графика при изменении координаты x от 0.00 см до 3.00 см, указав координаты всех характерных точек на графике.

Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих интегралов:

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$ – константа, C – произвольная постоянная;

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, где C – произвольная постоянная;

$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2}x^2$, для $|x| \ll 1$ и любых γ;

$\tan x \approx \sin x \approx x$, для $|x| \ll 1$;

$\ln(1+x) \approx x$, для $|x| \ll 1$.