

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Внимание: баллы в оценках не делятся!

Задача 1 (10.0 балла)

Задача 1.1 (3.0 балла)

Так как биконус катится по рейкам без проскальзывания, то его поступательная скорость v и угловая скорость вращения ω связаны через радиус качения r соотношением

$$v = \omega r. \quad (1)$$

Кинетическая энергия поступательного движения биконуса равна

$$W_k = \frac{mv^2}{2}, \quad (2)$$

а соответствующая энергия вращения записывается в виде

$$W_r = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (3)$$

где введен момент инерции биконуса

$$I = \frac{3}{10} mR^2. \quad (4)$$

Изменение потенциальной энергии биконуса в процессе движения составляет

$$W_p = -mgR \left(1 - \frac{r}{R}\right), \quad (5)$$

и по закону сохранения энергии должно выполняться соотношение

$$W_k + W_r = -W_p. \quad (6)$$

Из геометрических соотношений следует связь между радиусом качения r и координатой x

$$r = R \left(1 - \frac{x}{h} \tan \gamma\right), \quad (7)$$

так что, собирая вместе уравнения (1)-(7), получаем

$$v(x) = \sqrt{gD \frac{\frac{x}{h} \tan \gamma}{1 + \frac{3}{10} \left(1 - \frac{x}{h} \tan \gamma\right)^2}}. \quad (8)$$

В частности, для значения $x_0 = 50.0$ см вычисления дают

$$v_0 = v(x_0) = 42.2 \text{ см/с}. \quad (9)$$

Из тех же выражений (1)-(7) следует зависимость квадрата угловой скорости вращения от радиуса качения

$$\omega^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{mR^2}{I} \cdot \frac{\left(1 - \frac{r}{R}\right)}{\left(1 + \frac{mr^2}{I}\right)}, \quad (10)$$

которое имеет максимальное значение при $r = 0$, равное

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{20g}{3R}} = 40.4 \text{ рад/с}. \quad (11)$$

Интересно отметить, что биконус в этом положении фактически вращается на одном месте, то есть его поступательная скорость фактически обращается в нуль в соответствии с формулой (1).

Содержание	Баллы
Формула (1): $v = \omega r$	0.2
Формула (2): $W_k = \frac{mv^2}{2}$	0.2
Формула (3): $W_r = \frac{I\omega^2}{2}$	0.2
Формула (4): $I = \frac{3}{10} mR^2$	0.5
Формула (5): $W_p = -mgR \left(1 - \frac{r}{R}\right)$	0.2
Формула (6): $W_k + W_r = -W_p$	0.2
Формула (7): $r = R \left(1 - \frac{x}{h} \tan \gamma\right)$	0.5

Формула (8): $v(x) = \sqrt{gD \frac{\frac{x}{h} \tan \gamma}{1+0,3/(1-\frac{x}{h} \tan \gamma)^2}}$	0.2
Формула (9): $v_0 = 42.2 \text{ см/с}$	0.2
Формула (10): $\omega^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{mR^2}{I} \cdot \frac{(1-\frac{r}{R})}{(1+\frac{mr^2}{I})}$	0.2
Формула (11): $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{20g}{3R}}$	0.2
Численное значение в формуле (11): $\omega_{\max} = 40.4 \text{ рад/с}$	3.0
Итого	

Задача 1.2 (4.0 балла)

1) Полная внутренняя энергия системы в целом в процессе выравнивания температур не изменяется, так как она не совершает работу и к ней не подводится тепло, то есть

$$U = U_0. \quad (1)$$

Отсюда следует, что при перемещении перегородки не изменяются и давления газов в каждой из частей сосуда, которые равны между собой в данном квазистатическом процессе. Действительно, начальная внутренняя энергия системы равна

$$U_0 = \frac{C_V}{R} P_0 2V_0, \quad (2)$$

где

$$C_V = \frac{5}{2} R. \quad (3)$$

Внутренняя энергия в произвольный момент времени составляет

$$U = \frac{C_V}{R} P(2V_0), \quad (4)$$

где P – давление газа в обеих частях сосуда, которое получается из уравнений (1)-(4)

$$P = P_0, \quad (5)$$

то есть происходящие с газами процессы являются изобарными.

Запишем уравнение состояния идеального газа для каждой из частей сосуда в начальный момент времени

$$P_0 V_0 = \nu_1 R T_1, \quad (6)$$

$$P_0 V_0 = \nu_2 R T_2, \quad (7)$$

где ν_1 и ν_2 – количество молей азота в каждой из половин сосуда соответственно.

В конечном состоянии газ находится при некоторой температуре T_0 и его уравнение состояния имеет вид

$$P_0 2V_0 = \nu R T_0, \quad (8)$$

где полное число молей азота в сосуде равно

$$\nu = \nu_1 + \nu_2. \quad (9)$$

Из формул (6)-(9) определяем конечную температуру газа в сосуде

$$T_0 = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}. \quad (10)$$

Поскольку процесс изобарный, то количество теплоты Q , которым обмениваются газы

$$Q = C_P \nu_1 (T_0 - T_1) = \frac{7}{2} P_0 V_0 \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2} = 70.0 \text{ Дж}, \quad (11)$$

где

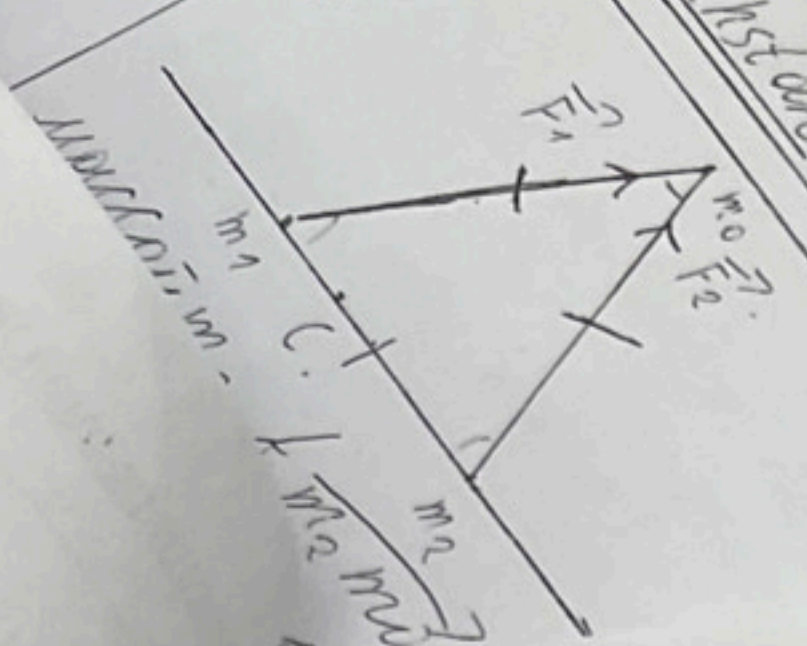
$$C_P = C_V + R. \quad (12)$$

2) При возвращении перегородки в исходное положение работа внешних сил будет минимальна, если процесс перемещения будет медленным, квазиравновесным без нарушения теплового равновесия между частями сосуда

$$T'_1 = T'_2 = T, \quad (13)$$

то есть в отличие от предыдущего случая в обеих частях сосуда одинаковым будет не давление, а температура, которая тем не менее будет изменяться.

Начальные объемы каждой из частей сосуда определяются законом Гей-Люссака и равны



XX Международная Жаутыковская Олимпиада/Теоретический тур

$$V_{01} = \frac{V_0 T_0}{T_1}, \quad (14)$$

$$V_{02} = \frac{V_0 T_0}{T_2}. \quad (15)$$

Обозначим давление в частях сосуда как P_1 и P_2 , а соответствующие объемы — V_1 и V_2 . В соответствии с уравнением состояния в произвольный момент времени должны выполняться соотношения

$$P_1 V_1 = \nu_1 R T, \quad (16)$$

$$P_2 V_2 = \nu_2 R T. \quad (17)$$

В данном процессе изменение внутренней энергии газа в системе равно

$$dU = \nu C_V dT, \quad (18)$$

и если газ совершает над внешними телами работу δA , то по первому началу термодинамики в условиях теплоизоляции сосуда в целом подводимое количество теплоты обращается в нуль

$$\delta Q = dU + \delta A = 0. \quad (19)$$

В квазистатическом процессе работа газа в целом складывается из работ газов в каждой из частей сосуда

$$\delta A = P_1 dV_1 + P_2 dV_2. \quad (20)$$

Записывая (18)-(20) совместно и используя уравнения (3), (6), (7), (9), (10), (14) и (15)-(17), получаем

$$\frac{5}{T_0} dT + \frac{T}{T_1 V_1} dV_1 + \frac{T}{T_2 V_2} dV_2 = 0, \quad (21)$$

интегрирование которого дает ответ

$$T_f = T_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{T_0}{5T_1}} \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{T_0}{5T_2}} = 290 \text{ К}. \quad (22)$$

Работа, совершаемая внешними силами над перегородкой для ее перемещения противоположна по знаку работе, совершаемой самим газом, поэтому из выражений (16) и (17) работа легко находится в виде

$$A' = -A = \Delta U = \nu C_V (T_f - T_0) = 5P_0 V_0 \frac{T_f - T_0}{T_0} = 4.04 \text{ Дж}. \quad (23)$$

2) Альтернативно решение. Процесс возвращения перегородки в исходное положение — адиабатический, т.е. происходит без изменения энтропии

$$S = \text{const}. \quad (24)$$

Полное изменение энтропии идеального газа в обеих частях сосуда равно:

$$\Delta S = \nu_1 C_V \ln \frac{T_f}{T_0} + \nu_1 R \ln \frac{V_0}{V_{01}} + \nu_2 C_V \ln \frac{T_f}{T_0} + \nu_2 R \ln \frac{V_0}{V_{02}} = 0, \quad (25)$$

откуда, используя (6), (7), (10), (14), (15) получаем конечную температуру системы

$$T_f = T_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{T_0}{5T_1}} \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{T_0}{5T_2}} = 290 \text{ К}. \quad (26)$$

Работа внешней силы расходуется на изменение внутренней энергии газа:

$$A' = \Delta U = (\nu_1 + \nu_2) C_V (T_f - T_0) = 5P_0 V_0 \frac{T_f - T_0}{T_0} = 4.04 \text{ Дж}. \quad (27)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $U = U_0$	0.1
Формула (2): $U_0 = \frac{C_V}{R} P_0 2V_0$	0.1
Формула (3): $C_V = \frac{5}{2} R$	0.1
Формула (4): $U = \frac{C_V}{R} P (2V_0)$	0.4
Формула (5): $P = P_0$	0.1
Формула (6): $P_0 V_0 = \nu_1 R T_1$	0.1
Формула (7): $P_0 V_0 = \nu_2 R T_2$	0.1
Формула (8): $P_0 2V_0 = \nu R T_0$	0.1
Формула (9): $\nu = \nu_1 + \nu_2$	0.1
Формула (10): $T_0 = \frac{2T_1 T_2}{T_1 + T_2}$	0.4

Формула (11): $Q = \frac{7}{2} P_0 V_0 \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2}$	0.4
Численное значение в формуле (11): $Q = 70.0$ Дж	0.1
Формула (12): $C_p = C_v + R$	0.1
Формула (13): $T = T_1 = T_2$	0.4
Формула (14): $V_{01} = \frac{V_0 T_0}{T_1}$	0.1
Формула (15): $V_{02} = \frac{V_0 T_0}{T_2}$	0.1
Формула (16): $P_1 V_1 = \nu_1 R T$	0.1
Формула (17): $P_2 V_2 = \nu_2 R$	0.1
Формула (18): $dU = \nu C_v dT$	0.1
Формула (19): $\delta Q = dU + \delta A = 0$	0.1
Формула (20): $\delta A = P_1 dV_1 + P_2 dV_2$	0.1
Формула (21): $\frac{5}{T_0} dT + \frac{T}{T_1 V_1} dV_1 + \frac{T}{T_2 V_2} dV_2 = 0$	0.2
Формула (22): $T_f = T_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{T_0}{5T_1}} \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{T_0}{5T_2}}$	0.2
Формула (23): $A' = \nu C_v (T_f - T_0) = 5 P_0 V_0 \frac{T_f - T_0}{T_0}$	0.2
Численное значение в формуле (23): $A' = 4.04$ Дж	0.2
Альтернативное решение 2)	0.4
Формула (13): $T = T_1 = T_2$	0.1
Формула (14): $V_{01} = \frac{V_0 T_0}{T_1}$	0.1
Формула (15): $V_{02} = \frac{V_0 T_0}{T_2}$	0.2
Формула (24): $S = const.$	0.4
Формула (25): $\Delta S = \nu_1 C_v \ln \frac{T_f}{T_0} + \nu_1 R \ln \frac{V_0}{V_{01}} + \nu_2 C_v \ln \frac{T_f}{T_0} + \nu_2 R \ln \frac{V_0}{V_{02}} = 0$	0.2
Формула (26): $T_f = T_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{T_0}{5T_1}} \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{T_0}{5T_2}}$	0.2
Формула (27): $A' = \nu C_v (T_f - T_0) = 5 P_0 V_0 \frac{T_f - T_0}{T_0}$	0.2
Численное значение в формуле (27): $A' = 4.04$ Дж	4.0
Итого	

Задача 1.3 (3.0 балла)

Мощность аккумуляторной батареи расходуется на механическую работу по подъёму груза, а также на мощность тепловых потерь на внутреннем сопротивлении батареи r и на омическом сопротивлении R обмотки двигателя. Если крутящий момент, необходимый для равномерного подъёма груза массы $m_1 = m$ равен M и вал при этом вращается с угловой скоростью $\omega_1 = \varphi/t_1$, где φ – угол поворота вала при подъёме груза на высоту h , то по закону сохранения энергии:

$$UI = M\omega_1 + I^2(r + R), \quad (1)$$

где U – ЭДС аккумулятора, I – сила тока, создающего необходимый для подъёма груза массы m крутящий момент.

С учётом пропорциональности крутящего момента силе тока

$$M = \alpha I, \quad (2)$$

где α – коэффициент пропорциональности, уравнение (1) переписывается в виде

$$U = \alpha\omega_1 + I(r + R). \quad (3)$$

Очевидно, что для равномерного подъёма груза массой $m_2 = 2m$ потребуется вдвое больший крутящий момент и, соответственно, вдвое больший ток. Если при этом скорость вращения вала равна $\omega_2 = \frac{\varphi}{t_2}$, где $t_2 = t_1 + \Delta t$ – время подъёма груза m_2 , то соответствующее уравнение имеет вид:

$$U = \alpha\omega_2 + 2I(r + R). \quad (4)$$

Для равномерного подъема груза массой $m_n = nm$ необходимый ток равен $I_n = nl$. Если этот груз поднимается за время t_n со скоростью $\omega_n = \frac{\varphi}{t_n}$, то соответствующее уравнение выглядит так:

$$U = \alpha\omega_n + nl(r + R). \quad (5)$$

Из уравнений (3)-(5) ω_n легко выражается через ω_1, ω_2 :

$$\omega_n = (n-1)\omega_2 - (n-2)\omega_1, \quad (6)$$

откуда время подъема груза массой m_n равно

$$t_n = \frac{t_1 t_2}{(n-1)t_1 - (n-2)t_2} = \frac{t_1 t_2}{t_2 - (n-1)\Delta t}. \quad (7)$$

Из условия

$$t_n > 0, \quad (8)$$

находим, что $n < \frac{t_2}{\Delta t} + 1$, а это означает, что количество грузов n не должно превышать

$$n_{max} = \left[\frac{t_2}{\Delta t} + 1 \right] = \left[\frac{t_1 + 2\Delta t}{\Delta t} \right] = [10,6 \dots] = 10. \quad (9)$$

Время подъема $n = n_{max}$ грузов составляет

$$t_{max} = \frac{t_1 t_2}{t_2 - (n_{max}-1)\Delta t} = \frac{t_1(t_1 + \Delta t)}{t_1 - (n_{max}-2)\Delta t} = 1.01 \cdot 10^3 \text{ с}. \quad (10)$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $UI = M\omega_1 + I^2(r + R)$	0.3
Формула (2): $M = \alpha I$	0.1
Формула (3): $U = \alpha\omega_1 + I(r + R)$	0.2
Формула (4): $U = \alpha\omega_2 + 2I(r + R)$	0.2
Формула (5): $U = \alpha\omega_n + nl(r + R)$	0.2
Формула (6): $\omega_n = (n-1)\omega_2 - (n-2)\omega_1$	0.2
Формула (7): $t_n = \frac{t_1 t_2}{(n-1)t_1 - (n-2)t_2} = \frac{t_1 t_2}{t_2 - (n-1)\Delta t}$	0.2
Формула (8): $t_n > 0$	0.4
Формула (9): $n_{max} = \left[\frac{t_2}{\Delta t} + 1 \right] = \left[\frac{t_1 + 2\Delta t}{\Delta t} \right]$	0.4
Численное значение в формуле (9): $n_{max} = 10$	0,2
Формула (10): $t_{max} = \frac{t_1 t_2}{t_2 - (n_{max}-1)\Delta t} = \frac{t_1(t_1 + \Delta t)}{t_1 - (n_{max}-2)\Delta t}$	0,4
Численное значение в формуле (10): $t_{max} = 1.01 \cdot 10^3 \text{ с}$	0,2
Итого	3.0

Задача 2. Точки Лагранжа (10.0 балла)

Задача двух тел.

2.1 Радиусы орбит тел равны расстояниям от тел до центра масс и определяются из уравнений

$$R_1 + R_2 = R_0, \quad (1)$$

$$m_1 R_1 = m_2 R_2, \quad (2)$$

откуда находим искомые радиусы траекторий

$$R_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} R_0, \quad (3)$$

$$R_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} R_0. \quad (4)$$

2.2 Для расчета угловой скорости вращения тел ω_0 запишем уравнение второго закона Ньютона для одного из тел, например для первого, в виде

$$m_1 \omega_0^2 R_1 = G \frac{m_1 m_2}{R_0^2}, \quad (5)$$

которое с учетом (3) дает

$$\omega_0 = \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{R_0^3}}. \quad (6)$$

Точки Лагранжа в системе трех тел.

2.3 Выражение для проекции силы, действующей на малое тело m_0 , следует из закона всемирного тяготения Ньютона, который с учетом направления сил дает

$$F_x = -G \frac{m_0 m_1}{|X+R_1|^3} (X+R_1) - G \frac{m_0 m_1}{|X-R_2|^3} (X-R_2). \quad (7)$$

С учетом безразмерных соотношений, приведенных в условии, получим выражение для проекции силы в относительных единицах

$$f_x = -\frac{1-\mu}{|x+\mu|^3} (x+\mu) - \frac{\mu}{|x-1+\mu|^3} (x-1+\mu). \quad (8)$$

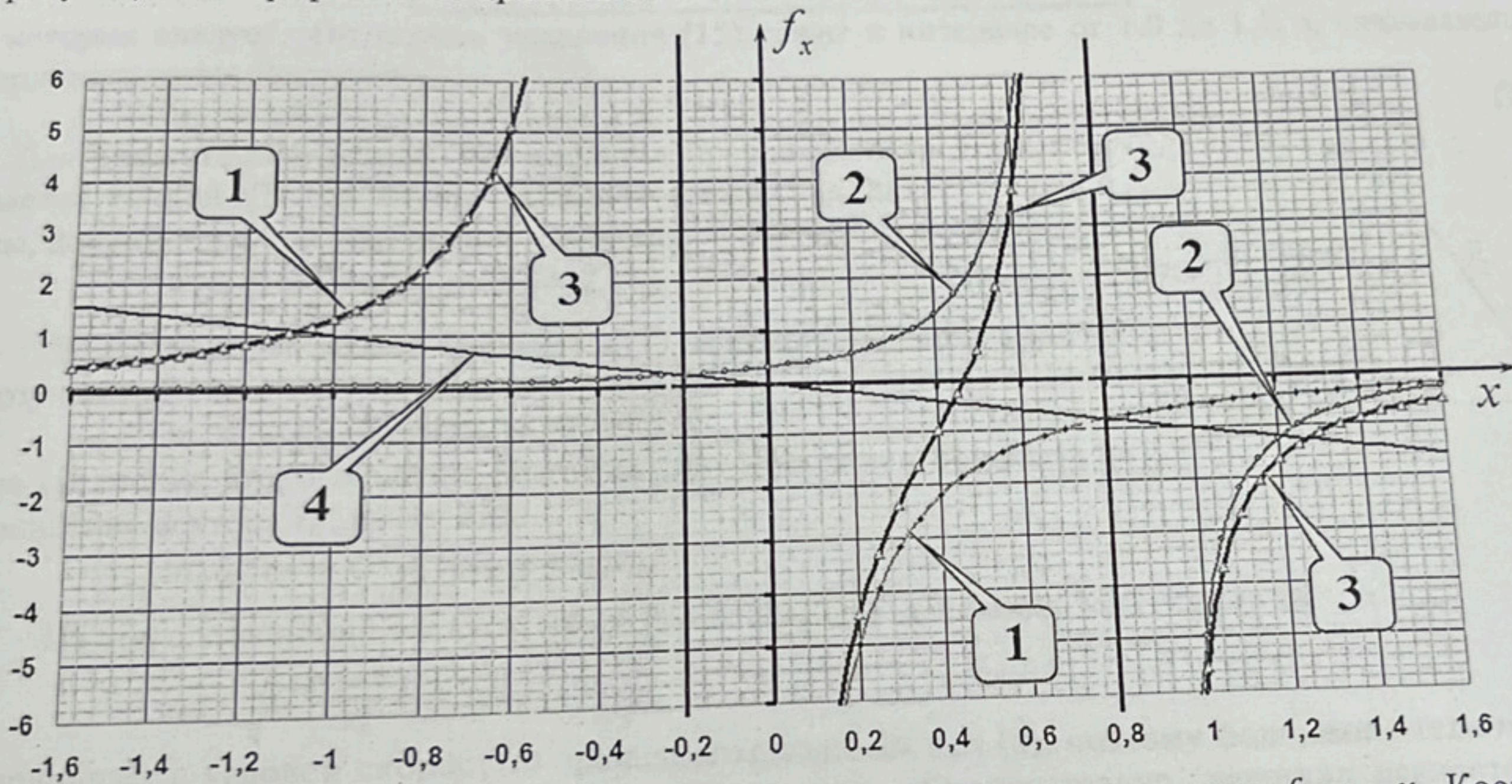
Уравнение второго закона Ньютона для малого тела имеет вид

$$-m_0 \omega_0^2 X = F_x, \quad (9)$$

обезразмерив которое на заданные величины, получим требуемое уравнение для определения координаты x

$$-x = -\frac{1-\mu}{|x+\mu|^3} (x+\mu) - \frac{\mu}{|x-1+\mu|^3} (x-1+\mu). \quad (10)$$

2.4 Для построения графика функции (8) достаточно построить графики функций описывающих притяжение к телу m_1 (две ветви с асимптотой при $x = -0.2$ – график 1 на рисунке) и притяжение к телу m_2 (две ветви с асимптотой при $x = 0.8$ – график 2 на рисунке) и просуммировать их (кривая 3 на рисунке). Этот график имеет три ветви.



2.5 На построенном графике проведем прямую, описываемую уравнением $f_x = -x$. Координаты точек пересечения этой прямой с графиком зависимости $f_x(x)$ являются действительными корнями уравнения (10), т.е. являются координатами точек Лагранжа, лежащих на оси X . Как следует из проведенного построения таких точек ровно 3.

2.6 Уравнение (10) является уравнением пятой степени, поэтому не может быть решено аналитически. Однако по условию требуется рассчитать численные значения с невысокой погрешностью. Для этого достаточно подсчитать численные значения силы, действующей на малое тело, с шагом изменения x , равным 0,1, и определить интервал, в котором находится соответствующий корень.

Рассчитаем значение координаты точки Лагранжа L_1 , находящейся между телами m_1 и m_2 .

Для этой точки уравнение (10) можно переписать в виде

$$x = \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} - \frac{\mu}{(1-\mu-x)^2}. \quad (11)$$

В Таблице ниже приведены значения левой и правой частей уравнения (11) при $\mu = 0.20$

x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$f(x)$	4,44	2,40	0,97	-0,59	-3,75

Из таблицы следует, что корень уравнения лежит в интервале от 0,4 до 0,5, т.е.

$$x_1 \approx 0.45. \quad (12)$$

Для координаты точки L_2 , лежащей за телом m_2 , имеем уравнение

$$x = \frac{1-\mu}{(x+\mu)^2} + \frac{\mu}{(x-1+\mu)^2},$$

а в следующей таблице рассчитаны значения левой и правой частей этого уравнения

(13)

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4
$f(x)$	5,56	2,70	1,66	1,16	0,87

Из данных этой таблицы следует, что корень этого уравнения лежит в интервале между 1.2 и 1.3, т.е.

$$x_2 \approx 1.25.$$

Наконец, для точки L_3 , лежащей за телом m_1 имеем уравнение (здесь изменено направление оси)

(14)

$$x = \frac{1-\mu}{(x-\mu)^2} + \frac{\mu}{(1-\mu+x)^2},$$

(15)

а в следующей таблице приведены результаты аналогичных расчетов

x	0,8	0,9	1	1,1	1,2
$f(x)$	2,30	1,70	1,31	1,04	0,85

из которых следует, что корень уравнения (15) лежит в интервале от 1.0 до 1.1, а, следовательно, координата точки Лагранжа L_3

$$x_3 \approx 1.05.$$

(16)

2.7 Для доказательства того, что вершина правильного треугольника является точкой Лагранжа L_4 , запишем выражение для суммарной силы, действующей на тело малой массы m_0 , в векторной форме:

$$\vec{F} = G \frac{m_0 m_1}{R_0^3} \vec{r}_1 + G \frac{m_0 m_2}{R_0^3} \vec{r}_2. \quad (17)$$

Выражение справа в формуле (17) выражается через радиус-вектор центра масс

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{r}_C, \quad (18)$$

тогда уравнение второго закона Ньютона для этого тела в проекции на направление вектора \vec{r}_C , имеет вид:

$$m_0 \omega^2 r_C = G \frac{m_0}{R_0^3} (m_1 + m_2) r_C. \quad (19)$$

Из этого уравнения следует, что угловая скорость движения тела m_0 равна

$$\omega = \sqrt{G \frac{m_1 + m_2}{R_0^3}} = \omega_0, \quad (20)$$

что совпадает с угловой скоростью вращения массивных тел (6), поэтому положение тела m_0 будет оставаться неизменным относительно массивных тел. Следовательно, вершина равностороннего треугольника действительно является точкой Лагранжа.

Точки Лагранжа в Солнечной системе.

2.8 Чтобы положение аппарата SOHO оставалось неизменным относительно Земли и Солнца, необходимо, чтобы он находился в точке Лагранжа L_1 . Для того, чтобы определить ее положение, надо решить уравнение (11). Рассчитаем значение параметра μ для системы Солнце – Земля:

$$\mu = \frac{M_2}{M_1 + M_2} = 3.00 \cdot 10^{-6}. \quad (21)$$

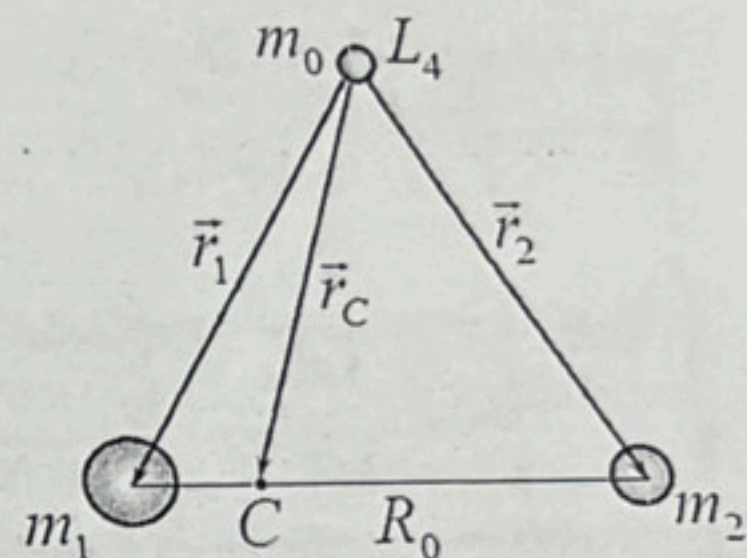
Это значение значительно меньше 1, поэтому расстояние l от аппарата до Земли значительно меньше радиуса земной орбиты. В использованной системе единиц обозначим $z = \frac{l}{R_0} = 1 - \mu - x$,

тогда из уравнения (11) получим

$$1 - \mu - z = \frac{1-\mu}{(1-z)^2} - \frac{\mu}{z^2}. \quad (22)$$

Так как $z, \mu \ll 1$, то можно воспользоваться разложением $\frac{1}{(1-z)^2} \approx 1 + 2z$ и в этом случае уравнение (22) существенно упрощается и из него находится $z = (\mu/3)^{1/3}$, то есть искомое расстояние равно

$$l_S = R_0 \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} = 1.50 \cdot 10^6 \text{ км}. \quad (23)$$



2.9 Очевидно, что телескоп «Джеймс Уэбб» находится в точке Лагранжа L_2 , поэтому для определения его положение надо решить уравнение (13), используя метод, аналогичный методу п. 2.8:

$$1 + z = \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{\mu}{z^2}, \quad (24)$$

т.е. космический телескоп находится на таком же расстоянии от Земли (только с другой стороны):

$$l_W = R_0 \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}} = 1.50 \cdot 10^6 \text{ км.} \quad (25)$$

2.10 Если астероид случайно окажется в точке Лагранжа L_4 , или симметричной ей точке L_5 для системы Юпитер-Солнце, то его положение относительно Юпитера и Солнца будет долгое время оставаться неизменным. Астероиды, находящиеся в других точках, будут постоянно изменять свое положение относительно Юпитера и Солнца. Следовательно, центры групп троянских астероидов находятся в боковых точках Лагранжа. Поэтому расстояние от Юпитера до этих точек равно расстоянию от Юпитера до Солнца. Масса Юпитера значительно меньше массы Солнца, поэтому расстояние между ними практически равно радиусу орбиты Юпитера, который можно найти, используя, третий закон Кеплера

$$l_J = R_0 \left(\frac{T_J}{T_0}\right)^{2/3} = 7.82 \cdot 10^8 \text{ км,} \quad (26)$$

где $T_0 = 1$ год – период вращения Земли вокруг Солнца.

	Содержание	Баллы	
	Формула (1): $R_1 + R_2 = R_0$	0.1	0.4
2.1	Формула (2): $m_1 R_1 = m_2 R_2$	0.1	
	Формула (3): $R_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} R_0$	0.1	
	Формула (4): $R_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} R_0$	0.1	
	2.2	Формула (5): $m_1 \omega_0^2 R_1 = G \frac{m_1 m_2}{R_0^2}$	0.1
Формула (6): $\omega_0 = \sqrt{G \frac{m_1+m_2}{R_0^3}}$		0.5	
2.3	Формула (7): $F_x = -G \frac{m_0 m_1}{ x+R_1 ^3} (x+R_1) - G \frac{m_0 m_2}{ x-R_2 ^3} (x-R_2)$	0.5	2.0
	Формула (8): $f_x = -\frac{1-\mu}{ x+\mu ^3} (x+\mu) - \frac{\mu}{ x-1+\mu ^3} (x-1+\mu)$	0.5	
	Формула (9): $-m_0 \omega_0^2 x = F_x$	0.5	
	Формула (10): $-x = -\frac{1-\mu}{ x+\mu ^3} (x+\mu) - \frac{\mu}{ x-1+\mu ^3} (x-1+\mu)$	0.5	
2.4	Положение вертикальных асимптот на графике	$3 \times 0.2 = 0.6$	0.8
	3 ветви графика	0.2	
2.5	На графике добавлена прямая $f_x = -x$	0.1	0.9
	Указаны три точки пересечения, соответствуют 3 точкам Лагранжа	$3 \times (0.1+0.2) = 0.9$	
2.6	За каждую точку: - указано положение; - найдено численное значение.	0.2	1.0
	Формула (17): $\vec{F} = G \frac{m_0 m_1}{R_0^3} \vec{r}_1 + G \frac{m_0 m_2}{R_0^3} \vec{r}_2$	0.2	
2.7	Формула (18): $m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{r}_C$	0.3	
	Формула (19): $m_0 \omega^2 r_C = G \frac{m_0}{R_0^3} (m_1 + m_2) r_C$	0.3	
2.8	Формула (20): $\omega = \sqrt{G \frac{m_1+m_2}{R_0^3}} = \omega_0$	0.2	1.6
	Численное значение (21): $\mu = 3.00 \cdot 10^{-6}$	0.2	
	Точное уравнение (22): $1 - \mu - z = \frac{1-\mu}{(1-z)^2} - \frac{\mu}{z^2}$		

	Формула (23): $l_S = R_0 \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$	0.7	
	Численное значение в формуле (23): $l_S = 1.50 \cdot 10^6$ км.	0.5	
2.9	Формула (24): $1 + z = \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{\mu}{z^2}$	0.2	1.4
	Формула (25): $l_W = R_0 \sqrt[3]{\frac{M_2}{3M_1}}$	0.7	
	Численное значение в формуле (25): $l_W = 1.50 \cdot 10^6$ км.	0.5	
2.10	Формула (26): $l_J = R_0 \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2/3}$	1.0	1.4
	Численное значение в формуле (26): $l_J = 7.82 \cdot 10^8$ км	0.4	
Итого			10.0

Задача 3. Геометрическая оптика и фотодетектор (10.0 баллов)

3.1 По закону отражения света выполняется соотношение

$$\alpha = \beta. \quad (1)$$

3.2 По закону преломления света Снеллиуса выполняется равенство

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (2)$$

3.3 При малых углах синусы можно заменить самим аргументами, что приводит к выражению

$$\alpha = n\beta. \quad (3)$$

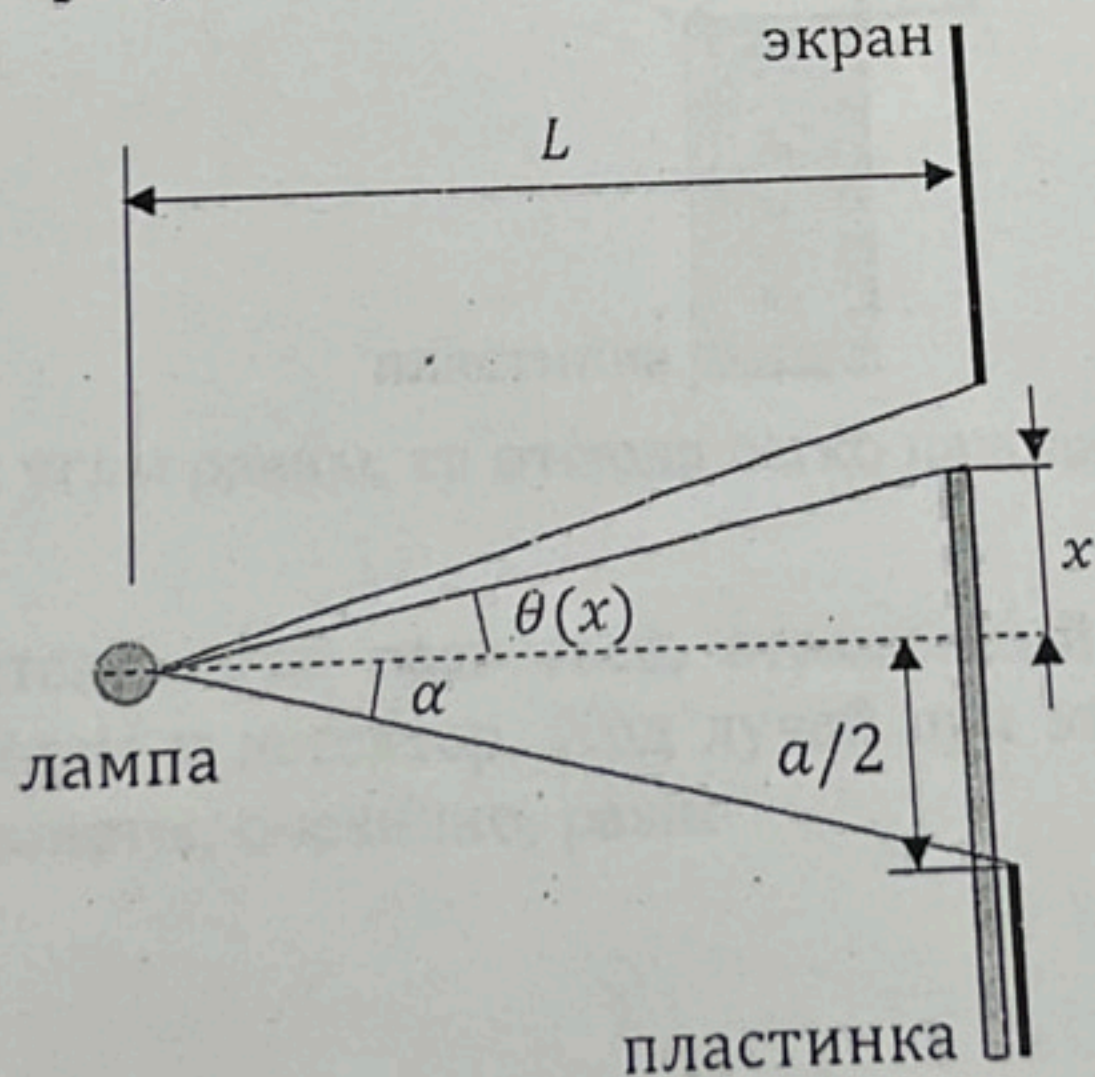
3.4 Поскольку лампа излучает по всем направлениям равномерно, то искомая мощность излучения составляет

$$W_\alpha = W \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (4)$$

Таким образом, мощность излучения лампы в определенном направлении определяется соответствующим углом.

Тонкая пластинка

3.5 Для решения задачи построим рисунок, показанный ниже.



Здесь использованы следующие обозначения для углов, которые в случае их малости находятся из соотношений:

$$\alpha = \frac{a}{2L}, \quad (5)$$

$$\theta(x) = \frac{x}{L}. \quad (6)$$

В соответствии с пунктом 3.4 регистрируемая детектором мощность излучения пропорциональна углу, поэтому формула для вычисления показаний миллиамперметра имеет вид

$$\Delta I(x) = I_0 \left(\frac{\alpha - \theta(x) + \tau(\alpha + \theta(x))}{2\alpha} - 1 \right) \quad \text{при} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}, \quad (7)$$

при этом очевидно, что

$$\Delta I(x) = 0$$

при $x < -\frac{a}{2}$,

(8)

$$\Delta I(x) = I_0(\tau - 1)$$

$$\text{при } x > \frac{a}{2}$$

(9)

График соответствующей функции представлен на рисунке ниже, при этом координаты двух характерных точек графика

$$\Delta I = 0.00 \text{ мА}$$

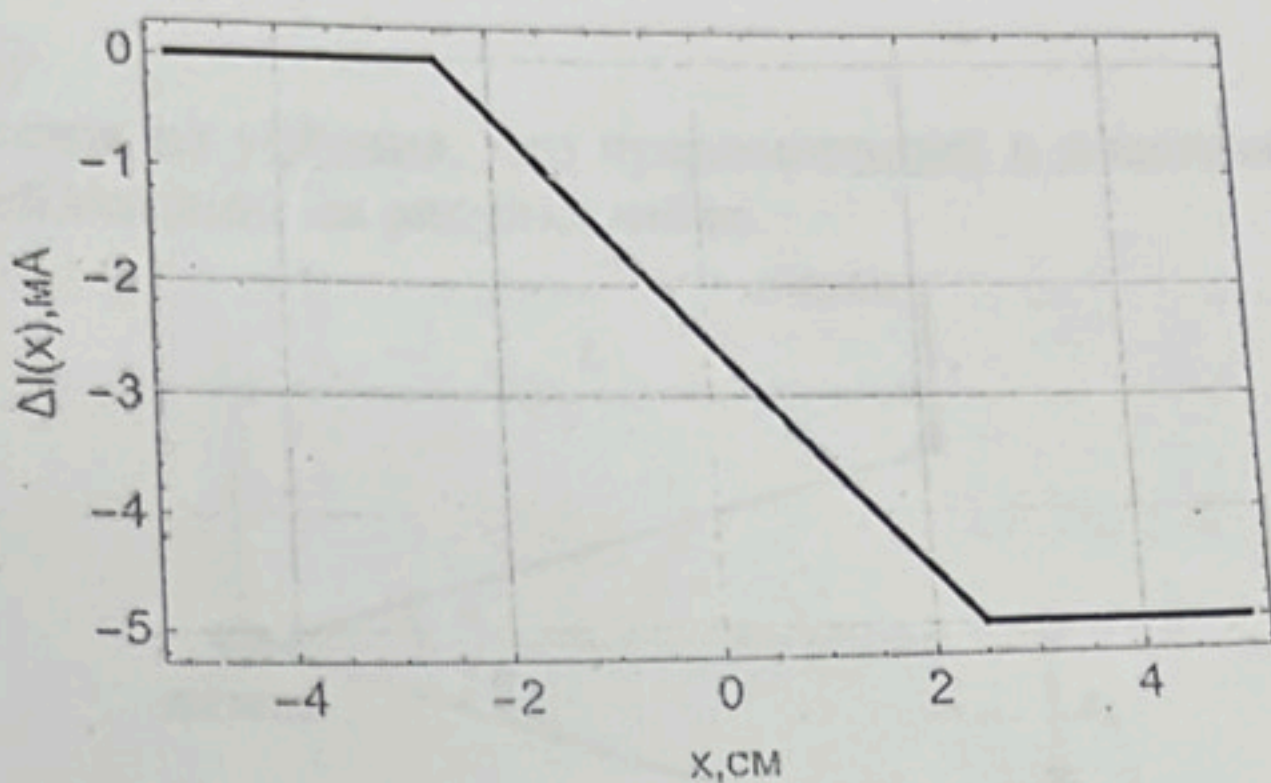
$$\text{при } x = -2.50 \text{ см,}$$

(10)

$$\Delta I = -5.00 \text{ мА}$$

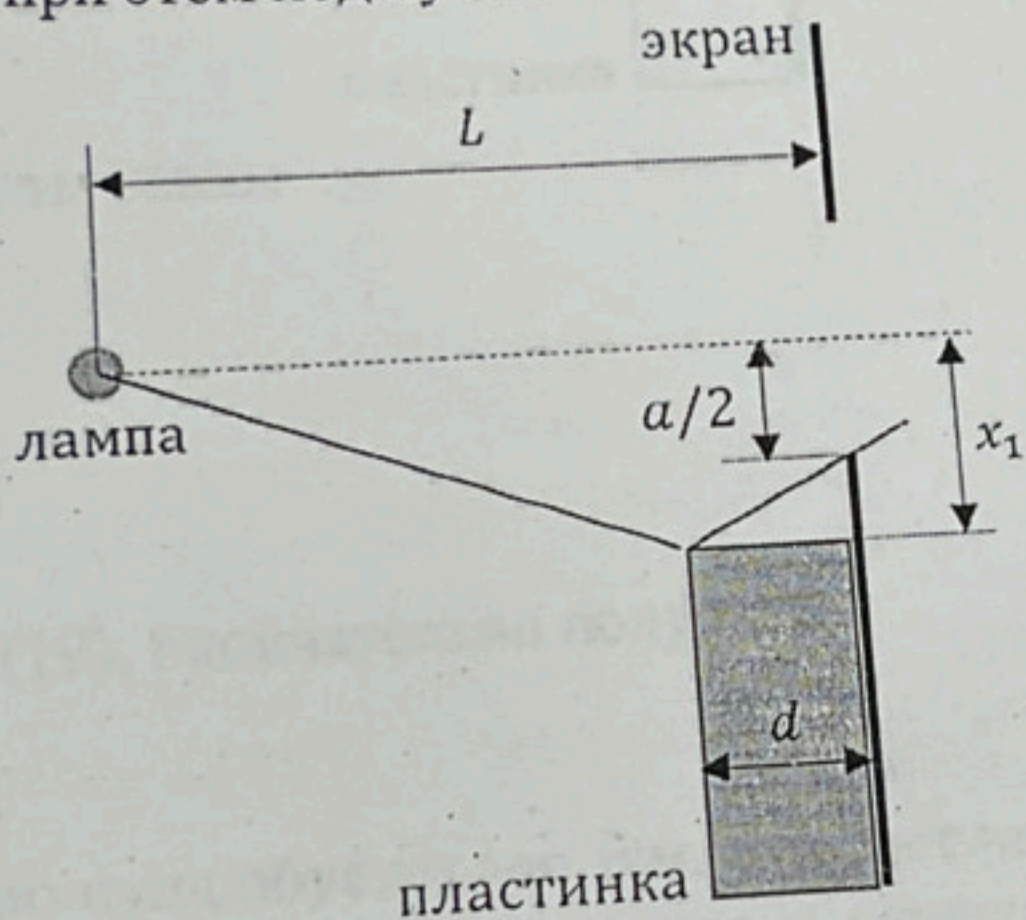
$$\text{при } x = 2.50 \text{ см.}$$

(11)



Толстая пластинка

3.6 Появление точки x_1 на графике связано с тем, что свет начинает дополнительно отражаться от горизонтальной части пластины, при этом ход луча от лампы до края щели показан на рисунке ниже.

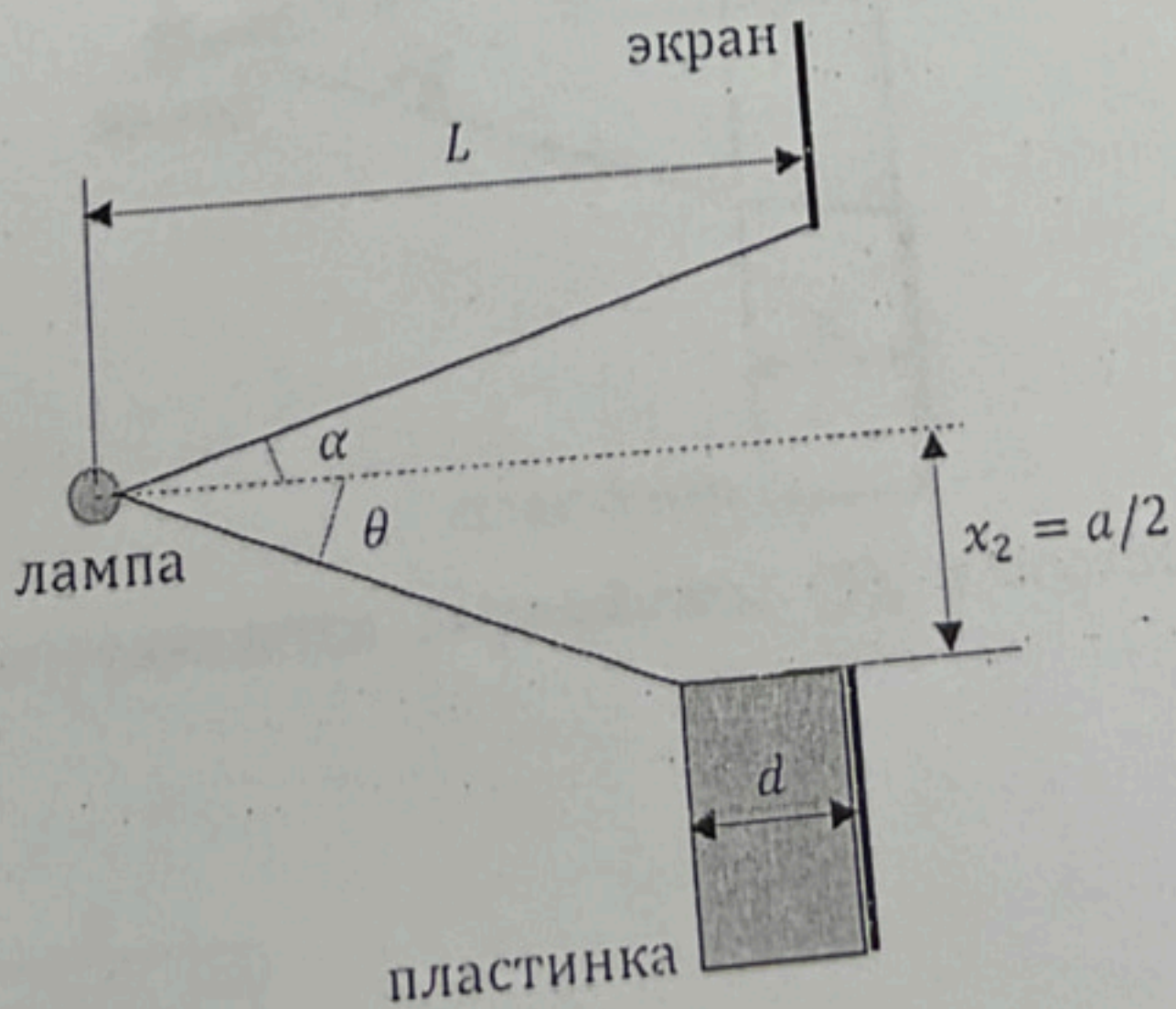


Поскольку при отражении углы равны, то отсюда легко находим искомую величину

$$x_1 = -\frac{a(L-d)}{2L-2d} \quad (12)$$

3.7 Первый максимум достигается, когда весь свет, отраженный горизонтальной поверхностью пластинки, попадает в щель и затем в детектор. Ход лучей при этом показан на рисунке ниже, а соответствующее значение координаты, очевидно, равно

$$x_2 = -\frac{a}{2} \quad (13)$$



Значение ΔI_{max} в точке x_2 находится из соотношения

$$\Delta I_{max} = I_0 \left(\frac{\alpha + \theta}{2\alpha} - 1 \right), \quad (14)$$

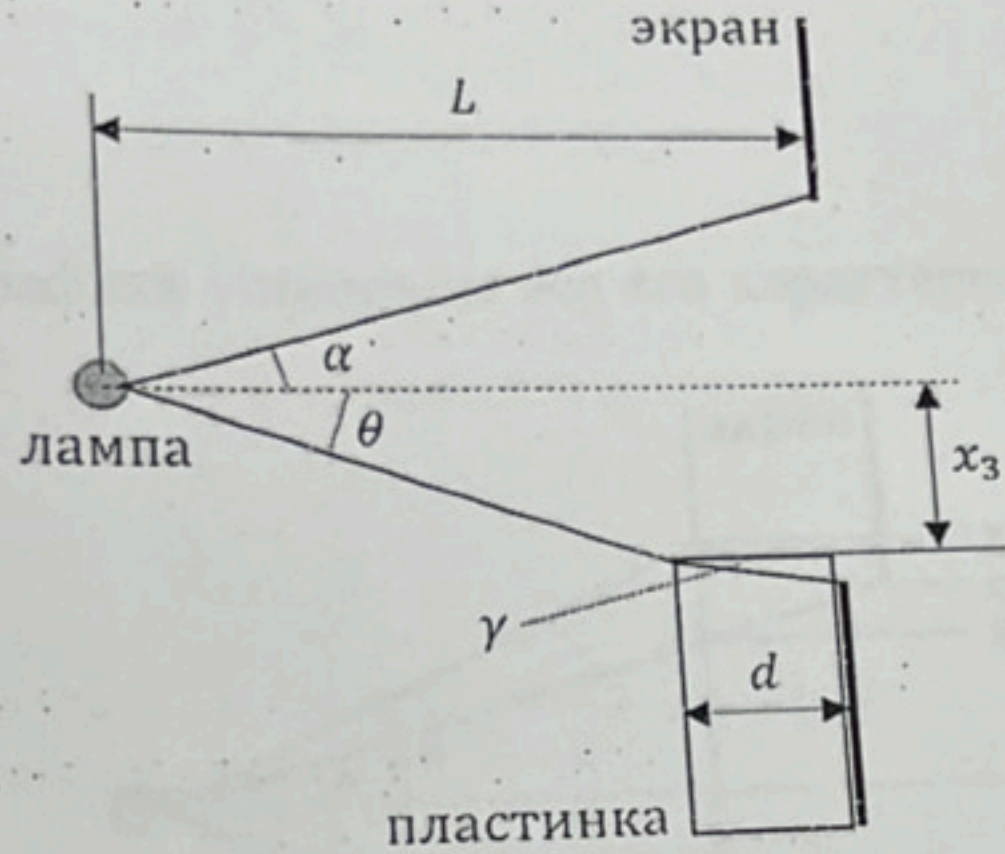
где величина угла α по-прежнему определяется выражением (5), а угол θ составляет

$$\theta = \frac{a}{2(L-d)}, \quad (15)$$

откуда окончательно получаем

$$\Delta I_{max} = \frac{I_0}{2} \frac{d}{(L-d)}, \quad (16)$$

3.9 Координата x_3 определяется из условия, что преломленный в пластине луч впервые попадает в нижний край щели, ход лучей показан на рисунке ниже.



Из рисунка следует, что углы равны

$$\theta = -\frac{x_3}{(L-d)}, \quad (17)$$

$$\gamma = \frac{\frac{a}{2} + x_3}{d}, \quad (18)$$

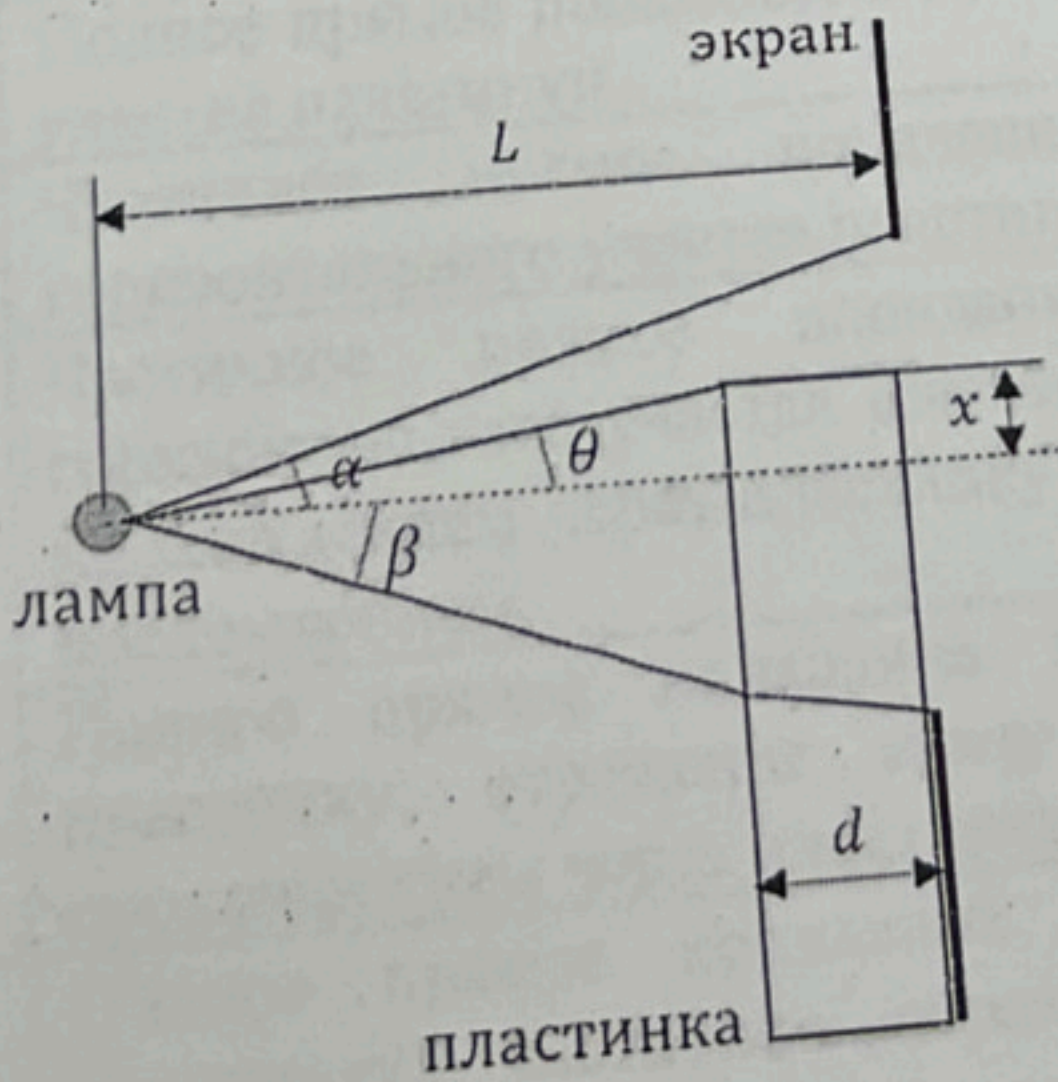
при этом по закону преломления

$$\theta = n\gamma. \quad (19)$$

Тогда из выражений (17)-(19), окончательно получаем

$$x_3 = -\frac{a}{2} \frac{(L-d)}{\left(L-d \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)}. \quad (20)$$

3.10 Участок от координаты x_3 до нуля обусловлен тем, что свет частично напрямую проходит через щель, а частично попадает через пластину, преломляясь и отражаясь в ней. Ход лучей показан на рисунке ниже.



Угол α по-прежнему определяется выражением (5), а соответствующие углы на рисунке

$$\theta = \frac{x}{(L-d)}, \quad (21)$$

$$\beta = -\frac{x_3}{(L-d)} = \frac{a}{2 \left(L-d \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right)}, \quad (22)$$

гда значение $\Delta I(x)$ принимает вид

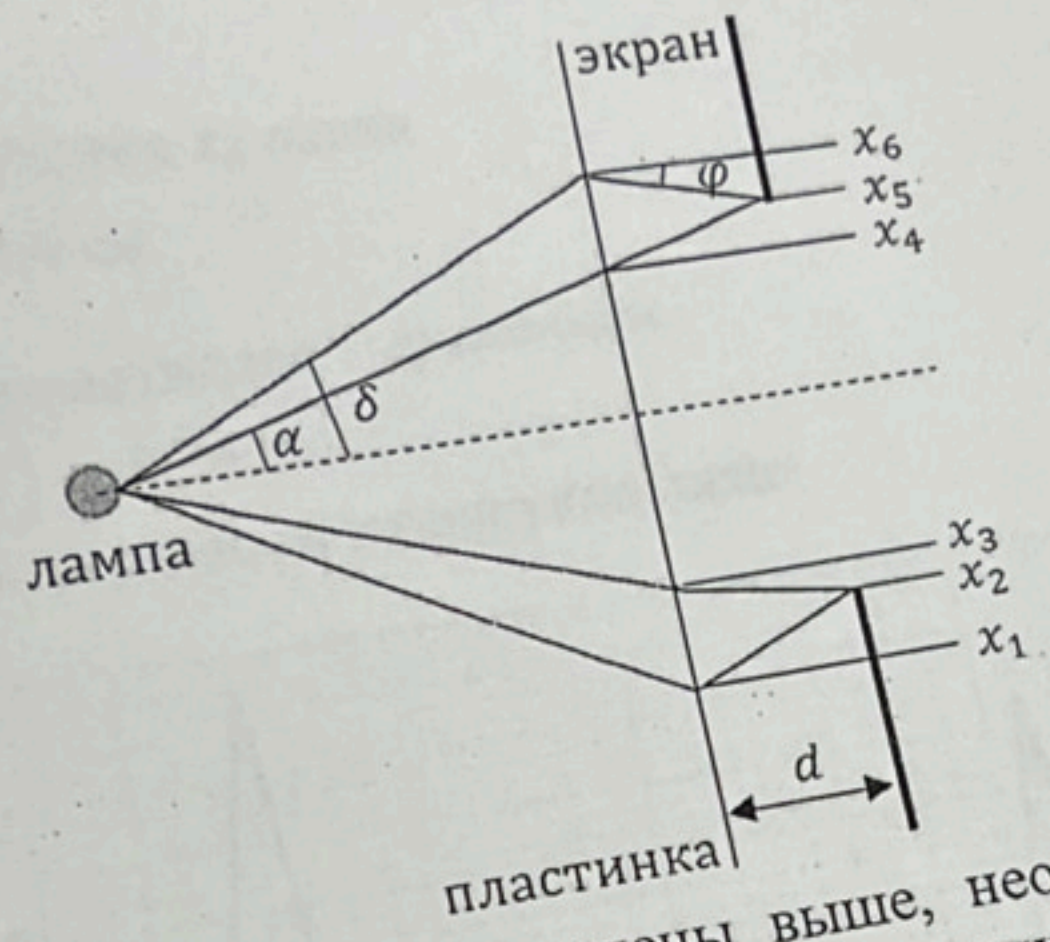
$$\Delta I(x) = I_0 \left(\frac{\alpha - \theta + \tau(\beta + \theta)}{2\alpha} - 1 \right), \quad (23)$$
 откуда получаем коэффициент наклона

$$\frac{d\Delta I(x)}{dx} = -I_0 \frac{(1-\tau)L}{a(L-d)}. \quad (24)$$

3.11 Исходя из приведенного в условии графика, имеем $x_1 = -2.50$ см, $x_2 = -2.00$ см, $x_3 = -1.75$ см, $\Delta I_{max} = 10.0$ мА и $d\Delta I(x)/dx = -1.20$ мА/см, получаем следующие значения искомых параметров

- $a = 4.0$ см, (25)
- $n = 1.3$, (26)
- $\tau = 0.96$, (27)
- $I_0 = 100$ мА, (28)
- $L/d = 6.0$. (29)

3.12 Для построения полного графика установим все его характерные точки, показанные на рисунке ниже как $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.



Координаты точек x_1, x_2, x_3 были определены выше, необходимо установить координаты других характерных точек. Для этого опишем появление различных ветвей графика, постепенно продвигая пластинку от отрицательных до положительных значений.

Координаты ветви графика	Физические процессы
от $-\infty$ до x_1	Полное прямое попадание в щель.
от x_1 до x_2	Полное прямое попадание в щель; отражение от горизонтального участка пластинки.
от x_2 до x_3	Частичное прямое попадание в щель; отражение от горизонтального участка пластинки.
от x_3 до x_4	Частичное прямое попадание в щель; отражение от горизонтального участка пластинки (сверху напрямую и снизу с прохождением через пластинку); прохождение через пластинку с преломлением.
от x_4 до x_5	Полное прямое попадание в щель с прохождением через пластинку; отражение снизу от горизонтального участка с прохождением через пластинку.
от x_5 до x_6	Полное прямое попадание в щель с прохождением через пластинку; частичное отражение снизу от горизонтального участка с прохождением через пластинку.
от x_6 до $+\infty$	Полное прямое попадание в щель с прохождением через пластинку.

Найдем координаты соответствующих характерных точек. Координата x_4 легко находится и равна

$$x_4 = \frac{aL-d}{2L} = 1.7 \text{ см,}$$

показания миллиамперметра определяются выражением

$$\Delta I_4 = I_0 \left(\frac{\tau(\alpha+\beta)}{2\alpha} - 1 \right) = -1.9 \text{ мА.} \quad (30)$$

Координата точки x_5 равна

$$x_5 = \frac{a}{2} = 2.0 \text{ см,} \quad (31)$$

а показания миллиамперметра определяются выражением

$$\Delta I_5 = I_0 \left(\frac{\tau(\alpha + \frac{a}{2(L-d)})}{2\alpha} - 1 \right) = 7.7 \text{ мА.} \quad (32)$$

Углы, обозначенные на рисунке равны

$$\delta = \frac{x_6}{L-d}, \quad (33)$$

$$\varphi = \frac{x_6 - \frac{a}{2}}{d} \quad (34)$$

и связаны соотношением

$$\delta = n\varphi. \quad (35)$$

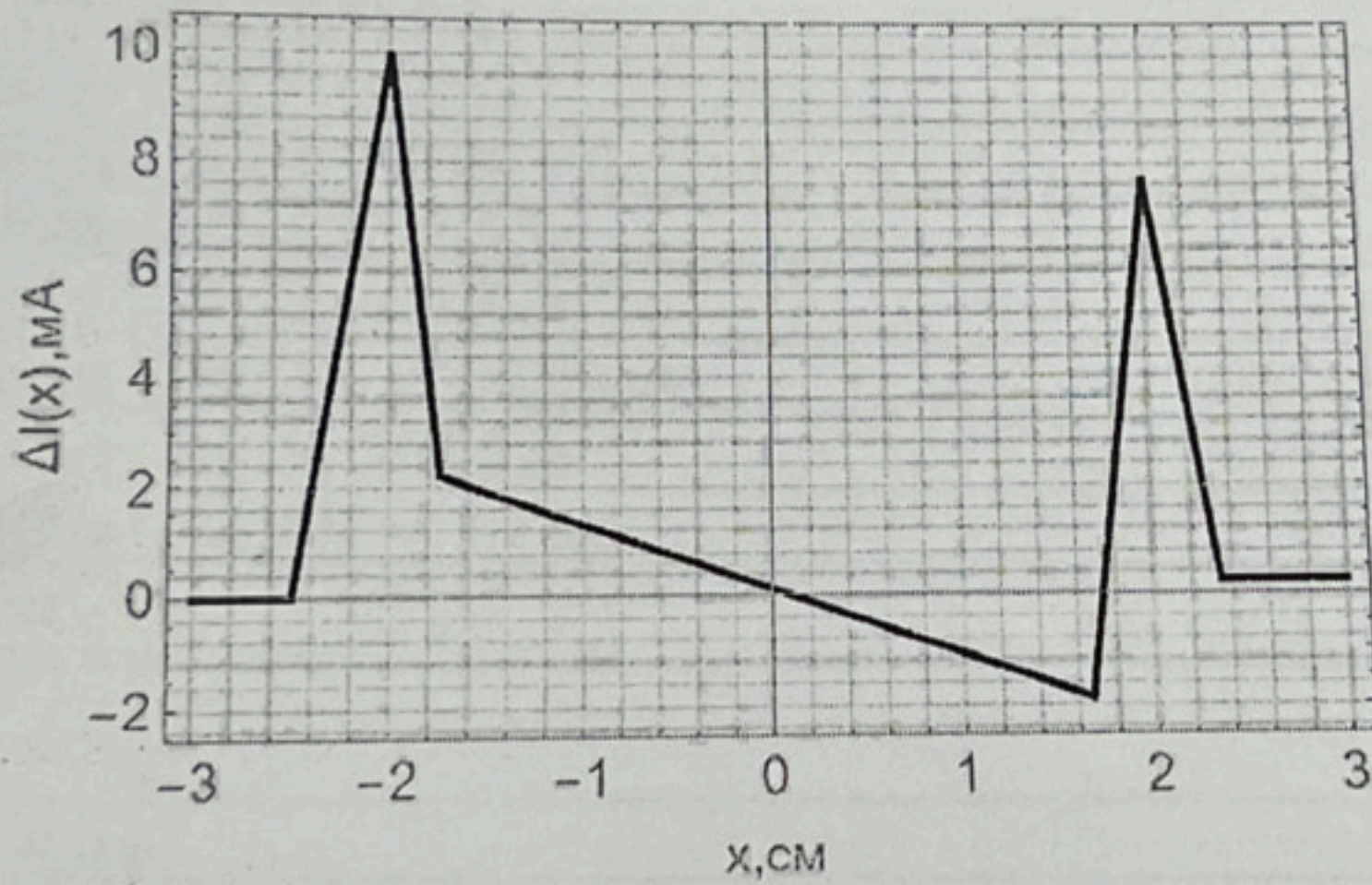
Таким образом, координата точки x_6 равна

$$x_6 = \frac{a}{2} \frac{(L-d)}{(L-d)(1+\frac{1}{n})} = 2.4 \text{ см,} \quad (36)$$

а показания миллиамперметра определяются выражением

$$\Delta I_6 = I_0 \left(\frac{\tau(\alpha+\delta)}{2\alpha} - 1 \right) = 0.24 \text{ мА.} \quad (37)$$

Полный график зависимости показан на рисунке ниже.



Содержание		Баллы		
3.1	Формула (1): $\alpha = \beta$	0.2	0.2	
3.2	Формула (2): $\sin \alpha = n \sin \beta$	0.2	0.2	
3.3	Формула (3): $\alpha = n\beta$	0.2	0.2	
3.4	Формула (4): $W_\alpha = W \frac{\alpha}{2\pi}$	0.4	0.4	
3.5	Формула (5): $\alpha = \frac{a}{2L}$	0.2	3.5	
	Формула (6): $\theta(x) = \frac{x}{L}$	0.2		
	Формула (7): $\Delta I(x) = I_0 \left(\frac{\alpha - \theta(x) + \tau(\alpha + \theta(x))}{2\alpha} - 1 \right)$	при $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$		0.4
	Формула (8): $\Delta I(x) = 0$	при $x < -\frac{a}{2}$		0.4
	Формула (9): $\Delta I(x) = I_0(\tau - 1)$	при $x > \frac{a}{2}$		0.4
	График: 0.5 за каждую верную прямую в числовых значениях			1.5
	Формула (10): $\Delta I = 0.00 \text{ мА}$	при $x = -2.50 \text{ см}$		0.2
	Формула (11): $\Delta I = -5.0 \text{ мА}$	при $x = 2.50 \text{ см}$		0.2

3.6	Формула (12): $x_1 = -\frac{a(L-d)}{2L-2d}$			
3.7	Формула (13): $x_2 = -\frac{a}{2}$			
3.8	Формула (14): $\Delta I_{max} = I_0 \left(\frac{\alpha+\theta}{2\alpha} - 1 \right)$	0.2	0.2	
	Формула (15): $\theta = \frac{a}{2(L-d)}$	0.1	0.1	
	Формула (16): $\Delta I_{max} = \frac{I_0}{2} \frac{d}{(L-d)}$	0.1	0.4	
Формула (17): $\theta = -\frac{x_3}{(L-d)}$	0.2			
3.9	Формула (18): $\gamma = \frac{a+x_3}{d}$	0.2	0.8	
	Формула (19): $\theta = n\gamma$	0.2		
	Формула (20): $x_3 = -\frac{a}{2} \frac{(L-d)}{(L-d(1-\frac{1}{n}))}$	0.2		
3.10	Формула (21): $\theta = \frac{x}{(L-d)}$	0.2		0.8
	Формула (22): $\beta = -\frac{x_3}{(L-d)} = \frac{a}{2(L-d(1-\frac{1}{n}))}$	0.2		
	Формула (23): $\Delta I(x) = I_0 \left(\frac{\alpha-\theta+\tau(\beta+\theta)}{2\alpha} - 1 \right)$	0.2		
	Формула (24): $\frac{d\Delta I(x)}{dx} = -I_0 \frac{(1-\tau)L}{a(L-d)}$	0.2		
3.11	Численное значение (25): $a = 4.0$ см	0.2	1.0	
	Численное значение (26): $n = 1.3$	0.2		
	Численное значение (27): $\tau = 0.96$	0.2		
	Численное значение (28): $I_0 = 100$ мА	0.2		
	Численное значение (29): $L/d = 6.0$	0.2		
3.12	Численное значение (30): $x_4 = 1.7$ см	0.2	2.2	
	Численное значение (31): $\Delta I_4 = -1.9$ мА	0.2		
	Численное значение (32): $x_5 = 2.0$ см	0.2		
	Численное значение (33): $\Delta I_5 = 7.7$ мА	0.2		
	Формула (34): $\delta = \frac{x_6}{L-d}$	0.2		
	Формула (35): $\varphi = \frac{x_6 - \frac{a}{2}}{d}$	0.2		
	Формула (36): $\delta = n\varphi$	0.2		
	Численное значение (37): $x_6 = 2.4$ см	0.2		
	Численное значение (38): $\Delta I_6 = 0.24$ мА	0.2		
	Правильные 4 прямые на графике от 0.00 до 3.00 см	4x0.1		
Итого			10.0	

