

THEORETICAL COMPETITION

February 2, 2023

Please read this first:

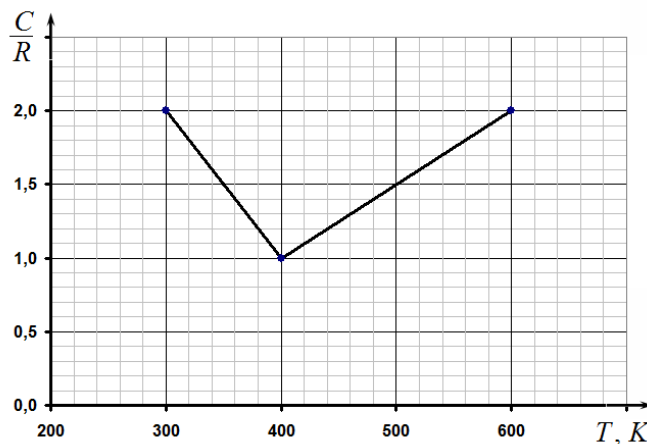
1. The duration of the theoretical competition is 4 hours. There are three problems.
2. You can use your own calculator for numerical calculations.
3. You are provided with *Writing sheet* and additional white sheets of paper. You can use the additional sheets of paper for drafts of your solutions, but these sheets will not be graded. Your final solutions should be written on the *Writing sheets*. Please use as little text as possible. You should mostly use equations, numbers, figures, and plots.
4. Use only the front side of *Writing sheets*. Write only inside the boxed areas.
5. Start putting down your solution to each problem on a new *Writing sheet*.
6. Fill in the boxes at the top of each *Writing sheet* with your country (**Country**), your student code (**Student Code**), problem number (**Question Number**), the progressive number of each *Writing sheet* (**Page Number**), and the total number of *Writing sheets* used (**Total Number of Pages**). If you use some blank *Writing sheets* for notes that you do not wish to be graded, put a large X across the entire sheet and do not include it in your numbering.

Problem 1 (10.0 points)

This problem consists of three independent parts.

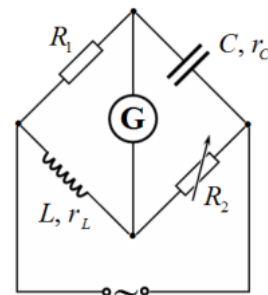
Problem 1.1 (4.0 points)

One mole of an ideal monatomic gas, located in the cylinder under the piston, is quasi-statically heated from the temperature $T_1 = 300$ K to $T_2 = 600$ K, changing its volume in such a way that the dependence of the heat capacity C of the gas on its temperature has the form shown in the figure below. Find the work done on the gas from the state in which the graph of its volume versus temperature reaches a local maximum, to the state in which the same graph reaches a local minimum. Express your answer in joules assuming that $R = 8.31$ J/K is the universal gas constant.



Problem 1.2 (3.0 points)

The figure on the right shows an AC bridge circuit. The resistance $R_1 = 2.5$ k Ω , the inductance $L = 1$ H, the resistance of the inductance $r_L = 1$ Ω are all known. At the frequency of the alternating sinusoidal voltage $\nu = 100$ Hz, the balance of the bridge occurs at $R_2 = 800$ Ω . It turns out that when the frequency of the alternating current is doubled, the balance of the bridge is not violated. Find the leakage resistance r_c of the capacitor and its capacitance C .



Problem 1.3 (4.0 points)

The Nobel Prize in Physics for 2019 was awarded to the Swiss astronomers M. Mayor and D. Queloz for the discovery of non-luminous satellite planets (exoplanets) around stars. Consider the planet Jupiter in our solar system as an exoplanet for the Sun. The orbital period of Jupiter is $T_J = 11.9$ year at a mass of $M_J = 1.90 \cdot 10^{27}$ kg, while the mass of the Sun is equal to $M_S = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg. Consider also known the speed of the Earth on its orbit $v_E = 29.8$ km/s, and assume that the orbits of all planets are circular. Let an observation be carried out by a spectrometer located far away from outside the solar system so that the observer is in the plane of motion of the Sun–Jupiter system. Find the minimum resolution of the spectrometer R_{\min} , which allows one to positively detect the presence of the massive exoplanet Jupiter near the Sun. Consider the speed of light to be $c = 2.99 \cdot 10^8$ m/s.

Note: The resolution of a spectrometer is its ability to distinguish between two closely spaced spectral lines, which is characterized by a dimensionless parameter $R = \lambda / \Delta\lambda$, where $\Delta\lambda$ denotes the smallest difference between the wavelengths of two lines still recorded as separate by the instrument, and λ stands for the average wavelength of those two resolvable lines.

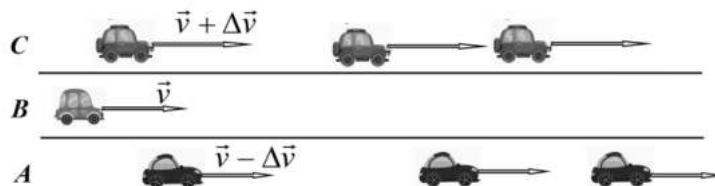
Problem 2. Fermi acceleration (10.0 points)

Cosmic rays contain extremely high energy particles. A possible mechanism for the appearance of such particles is called Fermi acceleration.

Fermi acceleration is a stochastical mechanism for the acceleration that charged particles experience when they are repeatedly reflected, usually by magnetic mirrors. In this problem, we consider the main ideas underlying this paradoxical, at first glance, phenomenon.

Why are there more oncoming cars than overtaking cars?

On a motorway with three lanes **A**, **B**, **C**, cars move at a constant speed in one direction: along the central lane **B**, a car moves at a speed of $v = 90$ km/h; cars move along lane **A** at speeds $v - \Delta v = 80$ km/h; cars move along lane **C** at speeds $v + \Delta v = 100$ km/h. The distance between cars is the same on each of lanes **A** and **C**, the number of cars per unit of lane length for each of them is $n = 5.0 \text{ km}^{-1}$.

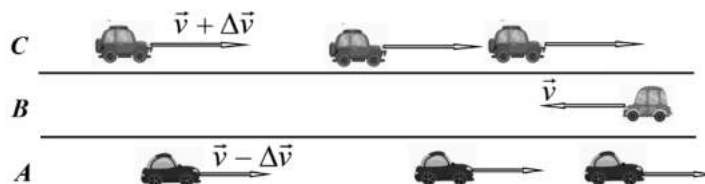


Consider the car moving in lane **B**.

2.1 Calculate how many cars N_1 in lane **A** overtake the car **B** within the time period of $t = 1.0$ min, as well as the time τ_1 between two consecutive overtakes.

2.2 Calculate how many cars N_2 in lane **C** overtake the car in lane **B** within the time period of $t = 1.0$ min, as well as the time τ_2 between two consecutive overtakes.

Now let the car move in lane **B** towards the cars moving in lanes **A** and **C**. The speeds of all cars and their density on each lane remain the same.

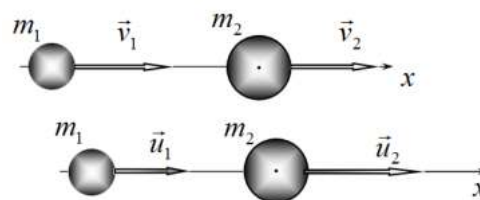


2.3 Calculate the number of cars N_3 in lane **A** and N_4 in lane **C** that the car **B** encounters within the time period of $t = 1.0$ min, as well as the corresponding times τ_3 and τ_4 between two consecutive encounters.

Elastic collision

In this part, we consider the classical problem of elastic collision of two bodies. The main purpose of this consideration is to determine the conditions under which the kinetic energy of one of the selected bodies increases as a result of the collision.

Two elastic balls, whose masses are equal to m_1 and m_2 , respectively, move along the axis x . The speed of the first ball before the collision is v_1 , whereas the speed of the second is v_2 . Let us denote the speeds of the balls after an absolutely elastic central collision as u_1 and u_2 , respectively. The speeds of the balls should be understood as the projections of their velocities on the x axis, therefore, they can be both positive and/or negative.



2.4 Express the velocities of the balls u_1 and u_2 after the collision in terms of their velocities before the collision v_1 and v_2 , as well as their masses.

Let us denote the ratio of the ball masses as $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, the ratio of the speeds of the first ball after and before the collision as $\eta_1 = \frac{u_1}{v_1}$ and the ratio of the velocities of the balls before the collision as $\eta_2 = \frac{v_2}{v_1}$. For definiteness, consider that $v_1 > 0$.

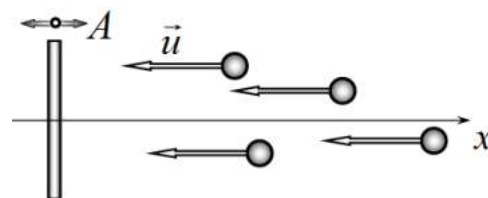
2.5 Draw a set of graphs that represents the dependence of the parameter η_1 on the parameter η_2 for all characteristic values of the ball mass ratios μ .

2.6 Find the relation between the parameters η_2 and μ , at which the first ball increases its energy as a result of the collision.

2.7 Consider the case of a light ball colliding with a heavy one such that $m_2 \gg m_1$. In this limiting case, find the speed of the first ball \tilde{u}_1 after the collision and determine the range of velocities η_2 of the heavy ball before the collision, at which the energy of the light ball increases as a result of the collision.

The simplest Fermi acceleration model

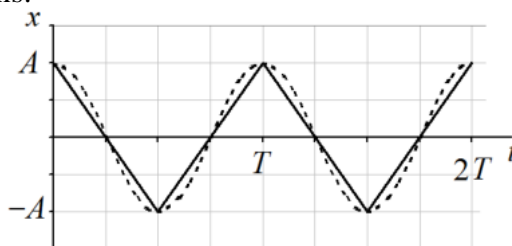
A massive plate, located perpendicular to the x axis, performs harmonic oscillations in the direction of the x axis. The oscillation amplitude is A with the period being T . Light balls move with equal speeds u in the direction of the plate along the x axis such that the times of ball arrivals to the still plate are randomly and uniformly distributed.



2.8 Express the maximum speed of the plate V_0 in terms of the amplitude and period of its oscillations.

2.9 Calculate the fraction φ of incident balls that are to increase their kinetic energy after the collision. Express your answer in terms of u and V_0 . For a numerical estimate, consider the following two cases separately: a) $u = 1.5V_0$; b) $u = 0.50V_0$.

Let us approximate the harmonic law of the plate motion by a piecewise linear function, see the figure below, i.e. assume that the modulus of the plate speed remains constant at the same values of the amplitude and period of oscillations.



2.10 Express the value of the plate speed modulus V in terms of the amplitude and period of its oscillations.

2.11 Calculate how many times $\varepsilon = \frac{E}{E_0}$ the average energy of the incident balls changes, where E_0 is the kinetic energy of the balls before the collision, and E symbolizes the average energy of the balls after the collision with the oscillating plate. For a numerical estimate, consider the following two cases separately: a) $u = 1.5V$; b) $u = 0.50V$.

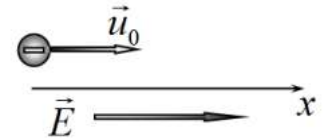
Problem 3. Magnetron (10.0 points)

Both electric and magnetic fields act on moving charged particles, which in a certain way change the character of their motion. Everywhere below it is assumed that charged particles move in a vacuum, and the radiation of electromagnetic waves can be neglected.

In this problem, the motion of electrons, which are classical point-like particles, is considered. When carrying out numerical calculations, consider, where necessary, that an electron has a negative electric charge, whose modulus is equal to $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, and its mass is $m = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. The electric and magnetic constants are equal $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ and $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \text{ H/m}$, respectively, the Boltzmann constant is denoted as $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.

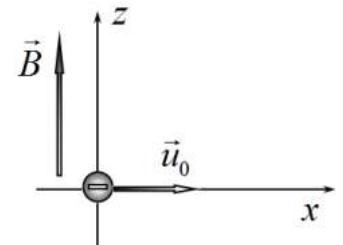
Electron motion in electric and magnetic fields

At the initial moment of time $t = 0$ an electron is at rest at the origin of coordinates, and a uniform electric field with the strength E is applied along the positive direction of the x axis. The electron is given an initial velocity u_0 , also directed in the positive direction of the x axis.

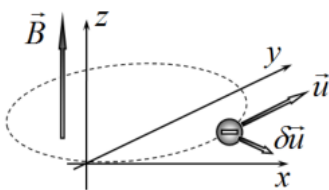


3.1 Determine the maximum value of the electron coordinate x_{max} for the entire time of its motion.

Now, at the initial moment of time $t = 0$, an electron is at rest at the origin of coordinates, and a uniform magnetic field with the induction B is applied along the positive direction of the z axis. The electron is given an initial velocity u_0 directed in the positive direction of the x axis.

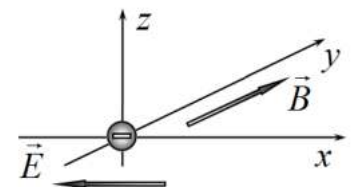


3.2 Determine the maximum value of the electron coordinate x_{max} for the entire time of its motion.

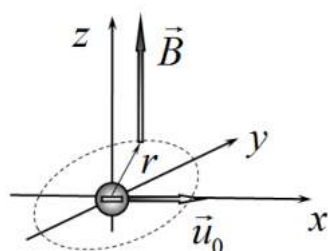


3.3 In the process of moving along the trajectory, at some moment of time, an additional velocity δu is given to the electron in the direction perpendicular to its current velocity u and lying in the plane of its initial trajectory, such that $\delta u \perp u$. Determine the period of the arisen two-dimensional oscillations of the electron with respect to its initial unperturbed trajectory.

Again, at the initial moment of time $t = 0$ an electron is at rest at the origin of coordinates, and a uniform electric field with the strength E is applied along the negative direction of the x axis. In addition, a uniform magnetic field with induction B is created along the positive direction of the y axis. The electron is released with the zero initial velocity.



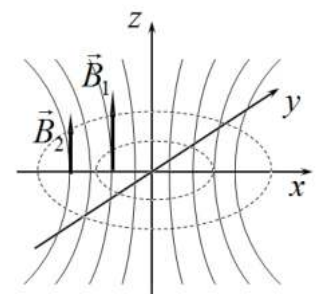
3.4 Determine the maximum value of the electron coordinate x_{max} for the entire time of its motion.



At the initial moment of time $t = 0$ an electron is at rest at the origin of coordinates, and a magnetic field is applied along the positive direction of the z axis, such that the induction in the plane xy depends on the distance r to the z axis according to the law $B = \alpha r = \alpha(x^2 + y^2)^{1/2}$. The electron is given an initial velocity directed in the positive direction of the x axis.

3.5 Determine the maximum distance r_{max} from the electron to the z axis for the entire time of its motion.

In some region of space, an axisymmetric magnetic field is created with respect to the z axis. At the moment of time $t = 0$, the magnetic field is absent, and then it begins to slowly increase, such that at all points in the xy plane the field induction vector is directed along the z axis. After a certain period of time, the induction of the magnetic field reaches its final value and ceases to change. The final field distribution in the xy plane has the form



$$B(r) = \begin{cases} B_1, & 0 < r \leq r_1 \\ B_2, & r_1 < r \leq r_2, \\ 0, & r > r_2 \end{cases}$$

where r denotes the distance to the z axis, r_1 and r_2 are known quantities.

At a moment in time $t = 0$, the electron is at rest at some point lying in the xy plane. When the field is turned on, the electron begins to move along a circle in the xy plane, whose center lies on the z axis.

3.6 Determine under what conditions for the ratio B_1 / B_2 the described situation turns possible.

Cylindrical magnetron

Magnetron is an electronic electrovacuum device, in which the amount of flowing current is controlled by electric and magnetic fields. Let us consider the simplest magnetron, consisting of a conducting coaxial long cylindrical cathode and anode with radii $a = 3.00 \cdot 10^{-1}$ mm and $b = 6.00$ mm, respectively, located inside a vacuum tube. The lamp is placed in the center of a cylindrical solenoid, whose axis coincides with the axes of the cathode and anode, and the number of turns is $N = 2590$ with the length being equal $L = 210$ mm and the diameter of $D = 105$ mm. The potential difference between the cathode and the anode is constant and equal to $V_0 = 75.0$ V. Consider that the electrons leaving the cathode are formed due to thermionic emission and have a zero initial velocity, neglect the space charge of the electron cloud in the lamp.

3.7 Calculate the potential difference V between the cathode and a point in space located at a distance $r = 3.00$ mm from the common axis of the solenoid and the lamp.

3.8 Calculate the smallest solenoid current I_{\min} at which the current in the magnetron between the cathode and anode vanishes completely.

3.9 Find the condition for the cathode temperature T , under which the initial electron velocity can indeed be considered zero.

Mathematical hints for the theoretical problems

The following formulas may be useful:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ where } n \neq -1 \text{ is a fixed number, } C \text{ refers to an arbitrary constant;}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \text{ where } C \text{ stands for an arbitrary constant;}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{3/2}} + C, \text{ where } a, C \text{ stand for arbitrary constants;}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ for } |x| \ll 1 \text{ and arbitrary } \gamma;$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ for } |x| \ll 1.$$

ТЕОРИЯЛЫҚ ТУР**2 ақпан, 2023 жыл****Алдымен мынаны оқып шығыңыз:**

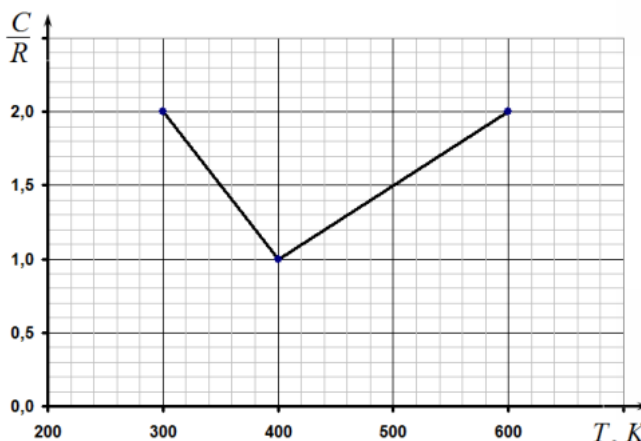
1. Теориялық тур үш тапсырмадан тұрады. Турдың ұзақтығы 4 сағат.
2. Есептеу үшін өзіңіздің калькуляторыңызды пайдалануға болады.
3. Сізге бос қағаз және **Жазу парақтары (Writing sheets)** беріледі. Бос қағаз парақтарын өз қалауыңызша пайдалануға болады, олар тексерілмейді. Жазу парақтарында жұмысты тексеру кезінде бағаланатын есептердің шешімдері жазылуы тиіс. Шешімдеріңізде ауызша сипаттамаларды мүмкіндігінше аз пайдаланыңыз. Шешіміңізді түсіндіру үшін негізінен өрнектерді, сандарды, әріптерді, суреттерді және графиктерді пайдаланғаныңыз жөн.
4. Жазу парақтарының (**Writing sheets**) тек алдыңғы бетін пайдаланыңыз, артына жазуға болмайды. Жазу кезінде белгіленген рамкадан шықпаңыз.
5. Әрбір жаңа есептің шешімін жаңа парақтан (**Writing sheets**) бастау керек.
6. Әрбір пайдаланылған жазу парақтарында, бұл үшін берілген бағандарда сіз еліңізді (**Country**), кодыңызды (**Student Code**), есептің реттік нөмірін (**Question Number**), әрбір парақтың ағымдағы нөмірін (**Page Number**) және барлық есептерді шешуде пайдаланылған парақтардың жалпы санын (**Total Number of pages**) көрсетуіңіз керек. Жауабыңызға кейбір қолданылған Жазу парақтарын (**Writing sheets**) қосуды қаламасаңыз, оларды бүкіл парақтың үстінен үлкен крестпен сызып тастаңыз және оларды парақтардың жалпы санына қоспаңыз.

1-есеп (10,0 ұпай)

Бұл тапсырма бір-бірімен байланысы жоқ үш бөліктен тұрады.

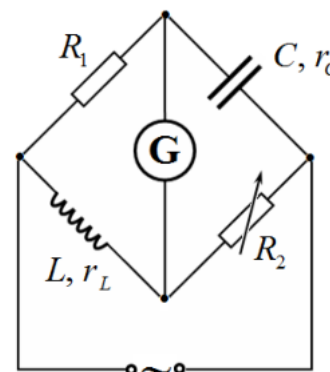
1.1 есеп (3,0 ұпай)

Поршень астындағы цилиндрде орналасқан идеал бір атомдық газдың бір молын $T_1=300$ К температурасынан $T_2=600$ К -ге дейін квазистатикалық түрде қыздырады және бұл кезде оның көлемін бұл газдың жылу сыйымдылығының температураға тәуелділігі төмендегі суретте көрсетілгендей етіп өзгертеді. Осы жағдайдағы газ көлемінің температураға тәуелділік графигінің максимумға жеткен күйінен сол графикдің минимумға жеткен күйіне дейінгі аралықта газға жасалған жұмысты табыңыз. Жауабыңызды джоульмен көрсетіңіз, әмбебап газ тұрақтысын $R=8.31$ Дж/К.



Есеп 1.2 (3.0 ұпай)

Суретте айнымалы ток көпірі тізбегі көрсетілген. Мұндағы кедергі $R_1 = 200 \Omega$, индуктивтілік $L = 1 \text{ Гн}$, индуктив катушкасының кедергісі $r_L = 0 \Omega$. Айнымалы синусоидалық кернеудің $v = 100$ жиілігінде көпірдегі тепе-теңдік кедергі $R_2 = 800 \Omega$ болғанда жүзеге асады. Айнымалы токтың жиілігін екі есе арттырғанда көпірдегі тепе теңдік бұзылмайды екен. Конденсатордың C сыйымдылығын және конденсатордан r_C ағу кедергісін анықтаңыз.



Есеп 1.3 (4.0 ұпай)

2019 жылғы физика бойынша Нобель сыйлығы швейцариялық астрономдар М.Майджор мен Д.Квелоға жұлдыздардың айналасында жарықырамайтын серіктер (экзопланеталар) бар екенін ашқаны үшін берілді. Осы тұрғыдан күн жүйесіндегі Юпитер планетасын Күннің экзопланетасы ретінде қарастырайық. Юпитердің айналу периоды $T_{\text{Ю}} = 11.9$ жыл, массасы $M_J = 1.90 \cdot 10^{27}$, ал Күннің массасы $M_S = 1.99 \cdot 10^{30}$. Жердің өз орбитасымен қозғалу жылдамдығы $v_E = 29.8$ екенін белгілі деп есептеңіз. Планеталардың орбиталары шеңбер болсын. Бақылаушы Күн-Юпитер жүйесінің қозғалыс жазықтығында болсын және бақылауды күн жүйесінен тыс жерде орналасқан спектрометр арқылы жүзеге асырсын. Күннің жанында массивті экзопланета Юпитердің бар екендігін анықтауға мүмкіндік беретін спектрометрдің минималды ажыратқыштық қабілеті R_{min} -ді табыңыз. Жарық жылдамдығы $c = 3.00 \cdot 10^8$.

Ескерту: Спектрометрдің ажыратқыштық қабілеті деп оның жақын орналасқан екі спектр сызығын ажырата алу мүмкіндігін сипаттайтын өлшем бірліксіз мынадай параметрді айтады

$R = \lambda / \Delta\lambda$, мұндағы $\Delta\lambda$ – спектрометр жеке сызықтар деп тіркей алатын екі спектр сызығының толқын ұзындығының айырымы, λ – ажыратылатын екі сызықтың орташа толқын ұзындығы.

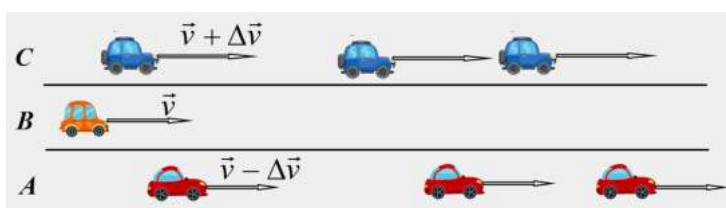
Есеп 2. Ферми үдеуі (10.0 ұпай)

Ғарыштық сәулелердің құрамында өте жоғары энергиялы бөлшектер бар. Мұндай бөлшектердің пайда болуының мүмкін механизмі Ферми үдеуі деп аталады.

Ферми үдеуі – зарядталған бөлшектер әдетте магниттік айнадан қайта-қайта шағылысқан кезде пайда болатын стохастикалық үдеу механизмі. Бұл есепте біз бір қарағанда қарама-қайшылықты болып көрінетін осы құбылыстың негізінде жатқан идеяларды қарастырамыз.

Неліктен бағытас көліктерге қарағанда қарсы келе жатқан көліктер көп?

A, *B*, *C* деп белгіленген үш жолы бар автомагистральмен бір бағытта тұрақты жылдамдықтармен автомобильдер қозғалып келеді: ортадағы *B* жолымен келе жатқан автомобильдердің жылдамдығы $v = 90$ км/сағ, *A* жолымен жүріп келе жатқан автомобильдердің жылдамдығы $v - \Delta v = 90$ км/сағ, ал *C* жолымен келе жатқан автомобильдердікі $v + \Delta v = 100$ км/сағ. *A* және *C* жолдарының әр қайсысымен келе жатқан автомобильдердің өзара ара қашықтары бірдей. Ол жолдардың бірлік ұзындығындағы автомобильдердің саны $n = 50$ км⁻¹

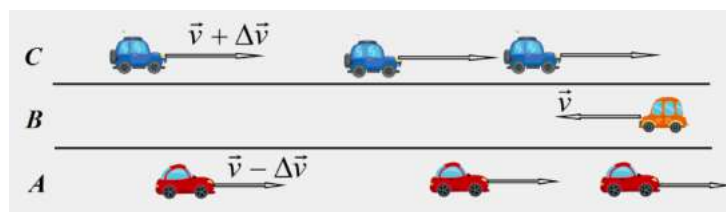


B жолымен жүріп келе жатқан автомобильді қарастыралық.

2.1 $t = \frac{1}{n}$ уақытта *A* жолымен келе жатқан қанша N_1 автомобиль *B* жолымен келе жатқан автомобильді басып озатынын анықтаңыз және қатар екі басып озудың арасындағы τ_1 уақытты анықтаңыз.

2.2 $t = \frac{1}{n}$ уақытта *C* жолымен келе жатқан қанша N_2 автомобиль *B* жолымен келе жатқан автомобильді басып озатынын анықтаңыз және қатар екі басып озудың арасындағы τ_2 уақытты анықтаңыз.

Енді *B* жолымен келе жатқан автомобиль *A* және *C* жолымен келе жатқан автомобильдерге қарсы бағытта қозғалсын. Автомобильдердің жылдамдықтары және жол бойындағы тығыздықтары бұрынғы жағдайдағыдай.

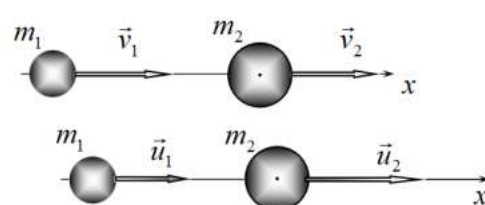


2.3 $t = \frac{1}{n}$ уақытта *A* жолымен келе жатқан қанша N_3 автомобиль және *C* жолымен келе жатқан қанша N_4 автомобиль *B* жолымен келе жатқан автомобильді кездестіреді? Қатар екі кездесуге сәйкес келетін τ_3 және τ_4 уақыт мәндерін анықтаңыз.

Серпімді соқтығысу

Есептің бұл бөлімінде екі дененің серпімді соқтығысуын қарастырамыз. Бұл қарастырудың негізгі мақсаты соқтығысудың нәтижесінде тандалған денелердің біреуінің кинетикалық энергиясының өсу шартын анықтау болып табылады.

Массалары m_1 және m_2 серпімді шарлар x осінің бойымен қозғалады. Соқтығысқанға дейінгі бірінші шардың жылдамдығы v_1 , ал екіншісінікі – v_2 . Абсолют серпімді орталық соқтығысудан кейінгі сәйкес шариктердің жылдамдықтарын u_1 және u_2 деп белгілейміз. Шариктердің жылдамдығы деп олардың x осіне



проекциясын түсіну қажет, сондықтан ол оң да, теріс те болуы мүмкін.

2.4 Шариктердің соқтығысқаннан кейінгі u_1 және u_2 жылдамдықтарын олардың соқтығысқанға дейінгі v_1 және v_2 жылдамдықтары және массалары арқылы өрнектеп жазыңыз.

Шариктердің массаларының қатынасын $\mu = \frac{m_2}{m_1}$ деп белгілейміз, бірінші шариктің

соқтығысқанға дейінгі жылдамдығының соқтығысқаннан кейінгі жылдамдығына қатынасы $\eta_1 = \frac{u_1}{v_1}$,

ал шариктердің соқтығысқанға дейінгі жылдамдықтарының қатынасы $\eta_2 = \frac{v_2}{v_1}$. Нақтылық үшін $v_1 > 0$ деп есептеңіз.

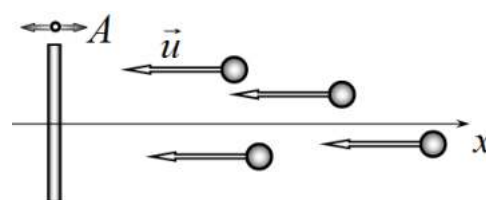
2.5 Шариктер массасының μ қатынасының әртүрлі мүмкін мәндері үшін η_1 параметрінің η_2 параметрінен тәуелділігінің графиктерін тұрғызыңыз.

2.6 η_2 және μ параметрлерінің арасында қандай қатынас болған кезде бірінші шарик соқтығысудың нәтижесінде өзінің энергиясын арттырады?

2.7 Жеңіл шариктің ауыр шарикпен соқтығысуын қарастырыңыз, яғни $m_2 \gg m_1$. Осы шектік жағдайдағы бірінші шариктің соқтығысқаннан кейінгі \tilde{u}_1 жылдамдығын және соқтығысу нәтижесінде жеңіл шариктің энергиясы артатын η_2 -нің мәндерінің аймағын анықтаңыз.

Ферми үдеуінің қарапайым моделі

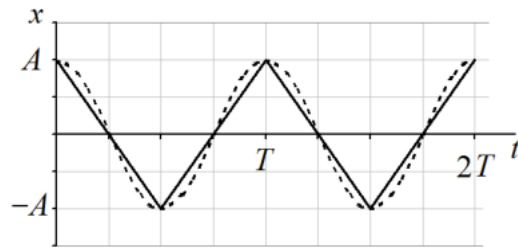
x осьіне перпендикуляр орналасқан ауыр плита x осьі бағытында гармоникалық тербелістер жасайды. Тербеліс амплитудасы A , ал периоды T . Плитаға қарата x осьі бойымен жеңіл шарлар бірдей u жылдамдықпен қозғалады. Шарлардың плитаға келу уақыты кездейсоқ және біркелкі таралған.



2.8 Плитаның қозғалысының V_0 максималды жылдамдығын оның тербелісінің амплитудасы және периоды арқылы анықтаңыз.

2.9 Соқтығысқаннан кейін ұшып келе жатқан шариктердің қандай φ бөлігі өзінің энергиясын арттыратынын анықтаңыз. Жауаптарыңызды μ және V_0 арқылы өрнектеп жазыңыз. Мынадай екі жағдай үшін: а) $\mu = 1.5V_0$; б) $\mu = 0.50V_0$ нақтылы есептеулер жүргізіңіз.

Плита қозғалысының гармоникалық заңын бөлікті-сызықтық функциямен жуықтаймыз, төмендегі суретті қараңыз, яғни амплитудасы мен тербеліс периоды бірдей мәндерінде плитаның қозғалыс жылдамдығының модулі тұрақты болып қалады деп есептейміз.



2.10 Плитаның V жылдамдық модулінің мәнін оның тербелістерінің амплитудасы мен периоды бойынша өрнектеңіз.

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0}$$

2.11 Түскен шарлардың орташа энергиясы $\varepsilon = \frac{E}{E_0}$ қанша есе өзгертінін есептеңіз, мұндағы E_0 – шарлардың соқтығысқанға дейінгі кинетикалық энергиясы, E – тербелмелі плиткемен соқтығысқаннан кейінгі шарлардың орташа энергиясы. Мынадай екі жағдайлар үшін: а) $u = 1.5V$; б) $u = 0.50V$ нақтылы есептеулер жүргізіңіздер.

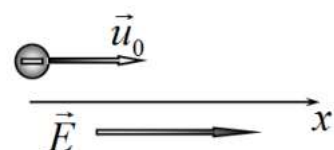
Есеп 3. Магнетрон (10.0 ұпай)

Электр және магнит өрістері оларда қозғалатын зарядталған бөлшектерге әсер етеді, бұл олардың қозғалысының сипатын белгілі бір түрде өзгертеді. Төмендегі барлық қарастыруларда зарядталған бөлшектер вакуумда қозғалады, ал электромагниттік сәуле шығаруды елемеге болады. деп есептелінеді.

Бұл есепте классикалық нүктелік бөлшек деп есептеуге болатын электрондардың қозғалысы қарастырылады. Сандық есептеулерді жүргізгенде, қажет болған жағдайда электронның теріс $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ заряды бар екенін ескеріңіз, ал оның массасы $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$. Электр және магнит тұрақтылары $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ и $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$, Больцман тұрақтысы $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$.

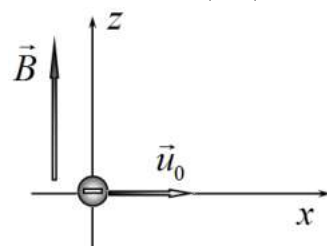
Электр және магнит өрістеріндегі электрондардың қозғалысы

Бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінде электрон координаттың бас нүктесінде тыныштықта тұр, ал x осының оң бағытында кернеулігі E болатын біртекті электр өрісі бар. Электронға x осының оң бағытында u_0 бастапқы жылдамдық береді.



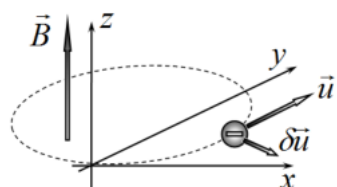
3.1 Электронның бүкіл қозғалған уақытындағы координаттың ең үлкен x_{\max} мәнін анықтаңыз.

Бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінде электрон координаттың бас нүктесінде тыныштықта тұрсын, ал z осының оң бағытында индукциясы B біртекті магнит өрісі берілген болсын. Электронға x осының оң бағытымен бағытталған u_0 бастапқы жылдамдық береді.

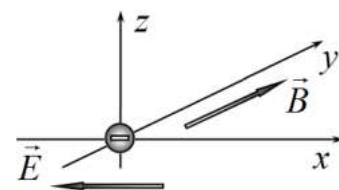


3.2 Электронның бүкіл қозғалған уақытындағы координаттың ең үлкен x_{\max} мәнін анықтаңыз.

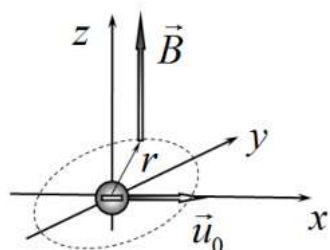
3.3 Өз траекториясымен қозғалып келе жатқан электронға уақыттың бір мезетінде оның сол мезеттегі u жылдамдығына перпендикуляр бағытта және оның алғашқы траекториясы жатқан жазықтықта қосымша δu жылдамдығы беріледі және $\delta u \ll u$. Электронның бастапқы ұйытқымаған траекториясына қатысты екі өлшемді тербелісінің периодын анықтаңыз.



Бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінде электрон координаттың бас нүктесінде тыныштықта тұр, ал x осының теріс бағытында кернеулігі E болатын біртекті электр өрісі бар. Сонымен қатар, y осының оң бағыты бойынша индукциясы B біртекті магнит өрісі берілген. Электронды бастапқы жылдамдықсыз босатады.



3.4 Электронның бүкіл қозғалған уақытындағы координаттың ең үлкен x_{\max} мәнін анықтаңыз.

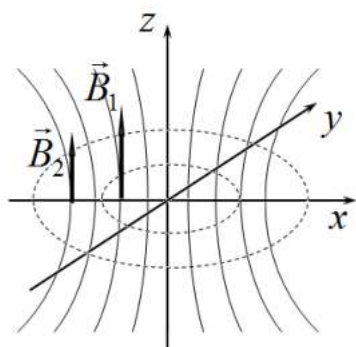


Бастапқы $t = 0$ уақыт мезетінде электрон координаттың бас нүктесінде тыныштықта тұрсын, z осының оң бағытында магнит индукциясы u жазықтығында z осынен r ара қашықтықтан мына түрде $B = \alpha r = \alpha(x^2 + y^2)^{1/2}$ тәуелді магнит өрісі берілсін. Электронға x осының оң бағытында u_0 бастапқы жылдамдығы беріледі.

3.5 Қозғалыс кезіндегі электроннан z осыне дейінгі ең үлкен r_{\max} ара қашықтығын анықтаңыз.

Кеңістіктің бірқатар бөлігінде z осыне қатысты оське симметриялы магниттік өріс тұғызылған. Уақыттың $t = 0$ мезетінде магниттік өріс жоқ, ал содан соң жайлап өсе бастайды және

өрістің магнит индукциясы x жазықтығының кез келген нүктесінде z осімен бағытталған. Біраз уақыттан соң магнит индукциясы өзінің шектік мәніне жетеді де, одан әрі өспейді. Және де өрістің x жазықтығында таралуы мынадай:



$$B = \begin{cases} B_1, & 0 < r < r_1 \\ B_2, & r_1 < r < r_2 \\ 0, & r > r_2 \end{cases},$$

мұндағы r – сол z осьіне дейінгі ара қашықтық, ал r_1 және r_2 – белгілі шамалар.

Уақыттың $t = 0$ мезетінде электрон x жазықтығының қандай да бір нүктесінде тыныштықта тұр. Өріс қосылған кезде электрон x жазықтығында жатқан, центрі z осьіндегі шеңбер бойынша қозғала бастайды.

3.6 B_1 / B_2 қатынасының қандай мәнінде жоғарыда айтылған қозғалыс мүмкін болады?

Цилиндрлік магнетрон

Магнетрон – электрондық электровакуумдық қондырғы, ондағы өтетін тоқтың шамасы электр және магнит өрісі арқылы реттеледі. Вакуумдық лампаның ішінде орналасқан, осьтері бір-біріне сәйкес, радиустары $a = 3.00 \cdot 10^{-1}$ және $b = 6.00$ болатын цилиндрлік катод пен анодтан тұратын, қарапайым магнетронды қарастыралық. Лампа осы катод пен анодтың осьтерімен сәйкес келетін цилиндр соленоидтың ортасында орналасқан. Соленоидтың орам саны $N = 2590$, ұзындығы $L = 3.00$ м и диаметрі – $D = 1.00$ м. Анод пен катодтың арасындағы потенциалдар айырымы $V_a = 15.0$ В. Катодтан шығатын электрондар термоэлектрондық эмиссияның салдарынан пайда болады, бастапқы жылдамдығы нөлге тең деп есептеңіз және электрондық лампадағы кеңістіктік зарядтарды ескермеңіз.

3.7 Лампа мен соленоидтың ортақ осьінен $r = 3.00$ қашықтықта орналасқан нүкте мен катод арасындағы V потенциалдар айырымын есептеңіз.

3.8 Магнетрондағы катод пен анодтың арасындағы ток нөлге тең болатын соленоидтың ең аз I_{\min} тогын есептеңіз.

3.9 Катодтың T температурасы үшін электрондардың жылдамдығы шын мәнінде нөлге тең болатын шартты табыңыз.

Теориялық есептерді шешуге арналған математикалық кеңес

Сіздерге төмендегі интегралдарды білу қажет болуы мүмкін:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \neq -1 \text{ және } C - \text{ произвольная постоянная;}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ где } C - \text{ бос мүше;}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{3/2}} + C, \text{ мұндағы } a, C - \text{ бос мүшелер;}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ кез келген } \gamma \text{ және } |x| \ll 1 \text{ үшін;}$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ бұл } |x| \ll 1 \text{ үшін.}$$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

2 февраля 2023 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

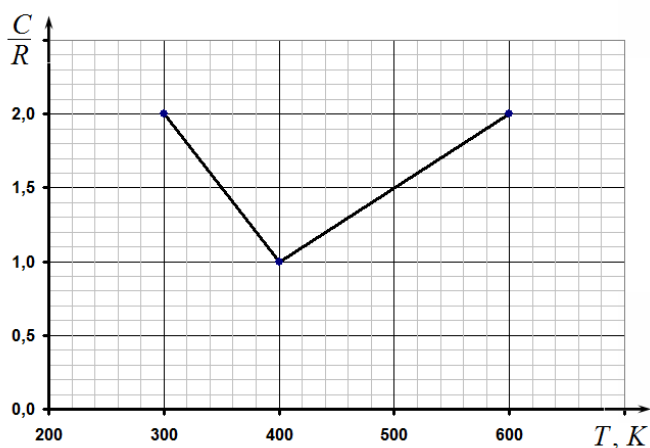
1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор.
3. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
4. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
5. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
6. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.

Задача 1 (10.0 балла)

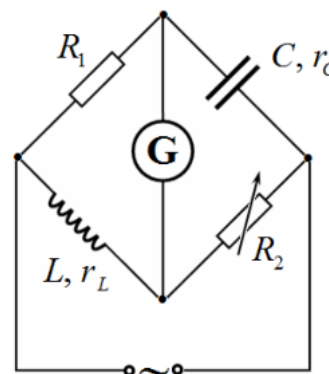
Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача 1.1 (3.0 балла)

Один моль идеального одноатомного газа, находящийся в цилиндре под поршнем, квазистатически нагревают от температуры $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К, изменяя объем таким образом, что зависимость теплоёмкости газа C от температуры имеет вид, показанный на рисунке. Найдите работу, совершённую над газом от состояния, в котором график зависимости его объёма от температуры достигал локального максимума, до состояния, в котором этот же график достигал локального минимума. Ответ выразите в джоулях, считая универсальную газовую постоянную равной $R = 8.31$ Дж/К.

**Задача 1.2 (3.0 балла)**

На рисунке показана схема моста переменного тока. Сопротивление $R_1 = 2.5$ кОм, индуктивность $L = 1$ Гн, сопротивление катушки индуктивности $r_L = 1$ Ом. На частоте переменного синусоидального напряжения $\nu = 100$ Гц баланс моста наступает при $R_2 = 800$ Ом. Оказалось, что при увеличении частоты переменного тока в два раза баланс моста не нарушается. Найдите сопротивление утечки r_c конденсатора и его емкость C .

**Задача 1.3 (4.0 балла)**

Нобелевская премия по физике за 2019 г. была присуждена швейцарским астрономам М. Майору и Д. Кело за открытие несветящихся спутников (экзопланет) у звёзд. Рассмотрим планету Юпитер в нашей солнечной системе как экзопланету для Солнца. Период обращения Юпитера составляет $T_J = 11.9$ года при массе $M_J = 1.90 \cdot 10^{27}$ кг, а масса Солнца равна $M_S = 1.99 \cdot 10^{30}$ кг. Считайте также известной скорость движения Земли по орбите $v_E = 29.8$ км/с, а орбиты планет предполагайте круговыми. Пусть наблюдение проводится спектрометром далеко из-за пределов солнечной системы так, что наблюдатель находится в плоскости движения системы Солнце–Юпитер. Найдите минимальную разрешающую способность спектрометра R_{\min} , которая позволяет определить наличие у Солнца массивной экзопланеты Юпитер. Считайте скорость света равной $c = 2.99 \cdot 10^8$ м/с.

Примечание: разрешающей способностью спектрометра называется его способность различать две близко расположенные спектральные линии, которая характеризуется безразмерным параметром $R = \lambda / \Delta\lambda$, где $\Delta\lambda$ – наименьшая разность длин волн двух линий еще регистрируемых прибором как отдельные, λ – средняя длина волны двух разрешаемых линий.

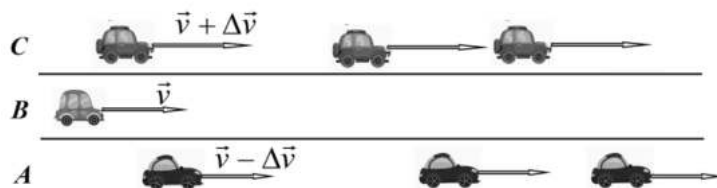
Задача 2. Ускорение Ферми (10.0 балла)

В космических лучах обнаруживаются частицы, обладающие чрезвычайно большой энергией. Возможный механизм появления таких частиц называется ускорением Ферми.

Ускорение Ферми – это стохастический механизм ускорения, которое заряженные частицы испытывают при многократном отражении, обычно от магнитного зеркала. В данной задаче рассматриваются основные идеи, лежащие в основе этого, парадоксального на первый взгляд, явления.

Почему встречных машин больше, чем попутных?

По автомагистрали, имеющей три полосы **A**, **B**, **C**, движутся с постоянной скоростью в одном направлении автомобили: по центральной полосе **B** автомобиль движется со скоростью $v = 90$ км/ч; по полосе **A** движутся автомобили со скоростями $v - \Delta v = 80$ км/ч; по полосе **C** движутся автомобили со скоростями $v + \Delta v = 100$ км/ч. Расстояние между автомобилями одинаковое на каждой из полос **A** и **C**, число автомобилей на единицу длины полосы для каждой из них составляет $n = 5.0$ км⁻¹.

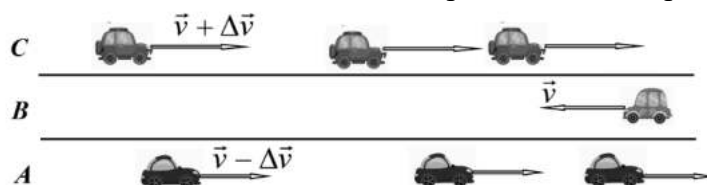


Рассмотрим автомобиль, движущийся по полосе **B**.

2.1 Рассчитайте, сколько автомобилей N_1 , движущихся по полосе **A**, обгоняет автомобиль **B** за время $t = 1.0$ мин, а также время τ_1 между двумя последовательными обгонами.

2.2 Рассчитайте, сколько автомобилей N_2 , движущихся по полосе **C**, которые обгоняют автомобиль на полосе **B** за время $t = 1.0$ мин, а также время τ_2 между двумя последовательными обгонами.

Пусть теперь автомобиль движется по полосе **B** навстречу автомобилям, движущимся по полосам **A** и **C**. Скорости автомобилей и их плотность на дороге остаются прежними.

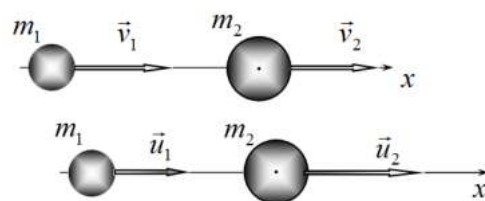


2.3 Рассчитайте числа автомобилей N_3 , движущихся по полосе **A**, и N_4 , движущихся по полосе **C**, которые встречает автомобиль **B** за время $t = 1.0$ мин, а также соответствующие времена τ_3 и τ_4 между двумя последовательными встречами.

Упругое столкновение

В данной части рассмотрим классическую задачу об упругом столкновении двух тел. Основной целью данного рассмотрения является определение условий, при которых кинетическая энергия одного из выбранных тел возрастает в результате удара.

Два упругих шарика, массы которых равны m_1 и m_2 , движутся вдоль оси x . Скорость первого шарика до столкновения равна v_1 , скорость второго – v_2 . Обозначим скорости шариков после абсолютно упругого центрального столкновения u_1 и u_2 , соответственно. Под скоростями шариков следует понимать проекции скоростей на ось x , поэтому они могут быть как положительными, так и отрицательными.



>

2.4 Выразите скорости шариков u_1 и u_2 после удара через их скорости до удара v_1 и v_2 , а также массы шариков.

Обозначим отношение масс шариков как $\mu = \frac{m_2}{m_1}$, отношение скорости первого шарика после

и до удара как $\eta_1 = \frac{u_1}{v_1}$ и отношение скоростей шариков до удара как $\eta_2 = \frac{v_2}{v_1}$. Для определенности

считайте, что $v_1 > 0$.

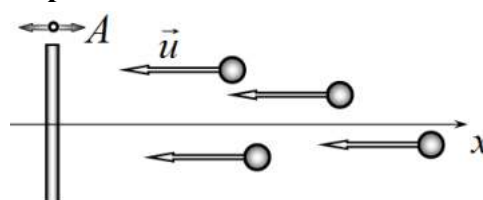
2.5 Постройте семейство графиков зависимостей параметра η_1 от параметра η_2 для всех характерных значений отношений масс шариков μ .

2.6 Найдите соотношение между параметрами η_2 и μ , при котором первый шарик увеличивает свою энергию в результате столкновения.

2.7 Рассмотрите случай столкновения легкого шарика с тяжелым $m_2 \gg m_1$. Найдите в этом предельном случае скорость первого шарика после столкновения \tilde{u}_1 и определите область значений скоростей тяжелого шарика η_2 до столкновения, при которых энергия легкого шарика возрастает в результате столкновения.

Простейшая модель ускорения Ферми

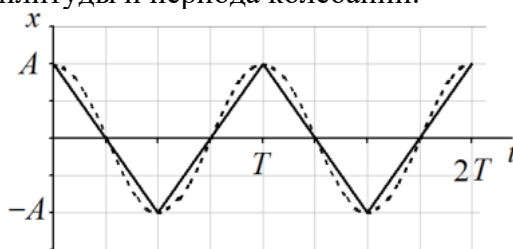
Массивная плита, расположенная перпендикулярно оси x , совершает гармонические колебания в направлении оси x . Амплитуда колебаний равна A , их период – T . В направлении плиты вдоль оси x с одинаковыми скоростями u движутся легкие шарики. Времена подлета шариков к плите являются случайными и равномерно распределенными.



2.8 Выразите максимальную скорость движения плиты V_0 через амплитуду и период ее колебаний.

2.9 Рассчитайте долю φ налетающих шариков, которые после столкновения увеличат свою кинетическую энергию. Ответ выразите через u и V_0 . Для численной оценки отдельно рассмотрите два случая: а) $u = 1.5V_0$; б) $u = 0.50V_0$.

Аппроксимируем гармонический закон движения плиты кусочно-линейной функцией, смотрите рисунок ниже, то есть будем считать, что модуль скорости V движения плиты остается постоянным при тех же значениях амплитуды и периода колебаний.



2.10 Выразите значение модуля скорости движения плиты V через амплитуду и период ее колебаний.

2.11 Рассчитайте, во сколько раз изменится средняя энергия налетающих шариков $\varepsilon = \frac{E}{E_0}$, где

E_0 – кинетическая энергия шариков до столкновения, E – средняя энергия шариков после столкновения с колеблющейся плитой. Для численной оценки отдельно рассмотрите два случая: а) $u = 1.5V$; б) $u = 0.50V$.

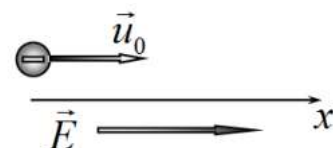
Задача 3. Магнетрон (10.0 баллов)

И электрическое и магнитное поля воздействуют на движущиеся в них заряженные частицы, которые определенным образом меняют характер своего движения. Всюду в дальнейшем предполагается, что заряженные частицы движутся в вакууме, а излучением электромагнитных волн можно пренебречь.

В данной задаче рассматривается движение электронов, которые представляют собой классические точечные частицы. При проведении численных расчетов считайте, где необходимо, что электрон обладает отрицательным электрическим зарядом, модуль которого равен $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ Кл, а его масса равна $m = 9.11 \cdot 10^{-31}$ кг. Электрическая и магнитная постоянные равны $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м и $\mu_0 = 1.26 \cdot 10^{-6}$ Гн/м, постоянная Больцмана $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

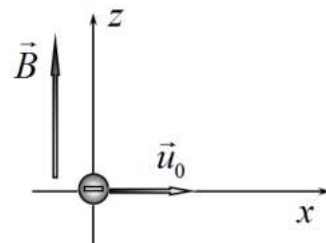
Движение электрона в электрическом и магнитном полях

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ электрон покоится в начале координат, а вдоль положительного направления оси x приложено однородное электрическое поле напряженностью E . Электрону сообщают начальную скорость u_0 , также направленную в положительном направлении оси x .

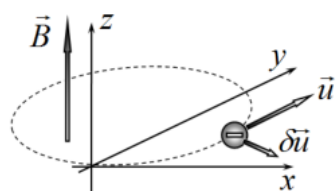


3.1 Определите максимальное значение координаты электрона x_{\max} за все время его движения.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ электрон покоится в начале координат, а вдоль положительного направления оси z приложено однородное магнитное поле с индукцией B . Электрону сообщают начальную скорость u_0 , направленную в положительном направлении оси x .

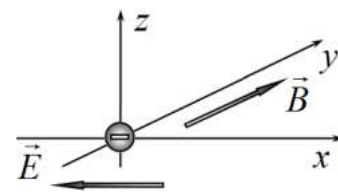


3.2 Определите максимальное значение координаты электрона x_{\max} за все время его движения.

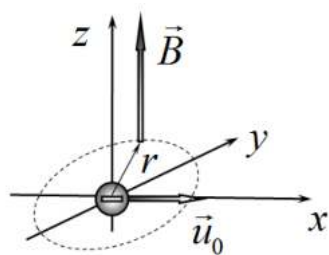


3.3 В процессе движения по траектории электрону в некоторый момент времени сообщили дополнительную скорость δu в направлении, перпендикулярном его текущей скорости u и лежащем в плоскости его начальной траектории, причем $\delta u \perp u$. Определите период возникших двумерных колебаний электрона относительно его первоначальной невозмущенной траектории.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ электрон покоится в начале координат, а вдоль отрицательного направления оси x приложено однородное электрическое поле напряженностью E . Помимо этого, вдоль положительного направления оси y создано однородное магнитное поле с индукцией B . Электрон освобождают с нулевой начальной скоростью.



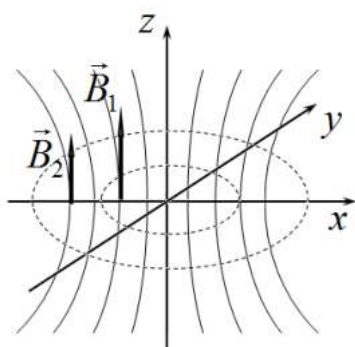
3.4 Определите максимальное значение координаты электрона x_{\max} за все время его движения.



Пусть в начальный момент времени $t = 0$ электрон покоится в начале координат, а вдоль положительного направления оси z приложено магнитное поле, индукция которого в плоскости xu зависит от расстояния r до оси z по закону $B = \alpha r = \alpha(x^2 + y^2)^{1/2}$. Электрону сообщают начальную скорость u_0 , направленную в положительном направлении оси x .

3.5 Определите максимальное расстояние r_{\max} от электрона до оси z в процессе его движения.

В некоторой области пространства создается осесимметричное относительно оси z магнитное поле. В момент времени $t = 0$ магнитное поле отсутствует, а затем начинает медленно нарастать, причем во всех точках плоскости xy вектор индукции поля направлен вдоль оси z . По прошествии некоторого промежутка времени индукция магнитного поля достигает предельного значения и перестает изменяться. При этом в плоскости xy распределение поля имеет вид



$$B = \begin{cases} B_1, & 0 < r < r_1 \\ B_2, & r_1 < r < r_2, \\ 0, & r > r_2 \end{cases}$$

где r – расстояние до оси z , а r_1 и r_2 – известные величины.

В момент времени $t = 0$ электрон покоится в некоторой точке, лежащей в плоскости xy . При включении поля электрон начинает двигаться по окружности в плоскости xy , центр которой находится на оси z .

3.6 Определите, при каком отношении B_1 / B_2 возможно описанное движение электрона.

Цилиндрический магнетрон

Магнетрон – электронный электровакуумный прибор, величина протекающего тока в котором управляется электрическим и магнитным полем. Рассмотрим простейший магнетрон, состоящий из проводящих соосных длинных цилиндрических катода и анода с радиусами $a = 3.00 \cdot 10^{-1}$ мм и $b = 6.00$ мм соответственно, расположенных внутри вакуумной лампы. Лампа находится в центре цилиндрического соленоида, ось которого совпадает с осями катода и анода, а число витков составляет $N = 2590$, длина равна $L = 210$ мм и диаметр – $D = 105$ мм. Разность потенциалов между катодом и анодом постоянна и равна $V_0 = 75.0$ В. Считайте, что покидающие катод электроны образуются вследствие термоэлектронной эмиссии и имеют нулевую начальную скорость, а также пренебрегайте пространственным зарядом электронов в лампе.

3.7 Рассчитайте разность потенциалов V между катодом и точкой в пространстве, расположенной на расстоянии $r = 3.00$ мм до общей оси лампы и соленоида.

3.8 Рассчитайте наименьший ток соленоида I_{\min} , при котором ток в магнетроне между катодом и анодом обращается в ноль.

3.9 Найдите условие для температуры катода T , при выполнении которого начальную скорость электронов действительно можно считать нулевой.

Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих интегралов:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ где } n \neq -1 \text{ и } C \text{ – произвольная постоянная;}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C, \text{ где } C \text{ – произвольная постоянная;}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2 + a^2)^{3/2}} + C, \text{ где } a, C \text{ – произвольные постоянные;}$$

$$(1+x)^\gamma \approx 1 + \gamma x + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2} x^2, \text{ для } |x| \ll 1 \text{ и любых } \gamma;$$

$$\ln(1+x) \approx x, \text{ для } |x| \ll 1.$$