

ТЕОРИЯЛЫҚ ТУРДЫҢ ЕСЕПТЕРІНІҢ ШЕШІМІ

Назар аударыңыз: ұпайлар бағаға бөлінбейді

Тапсырма 1 (10.0 ұпай)

Тапсырма 1.1 (4.0 ұпай)

Термодинамиканың бірінші бастамасынан белгілі

$$\delta Q = dU + dA, \tag{1}$$

мұндағы δQ - берілген жылу мөлшері, dU – ішкі энергия өзгерісі, dA – газдың жасаған жұмысы.

Идеал газдың бір молі үшін бұл шамаларды белгілі P қысым кезіндегі көлем dV және температура dT өзгерісі түрінде келесі түрде жазуға болады

$$\delta A = pdV, \tag{2}$$

$$dU = C_v dT. \tag{3}$$

Жылу сыйымдылығының анықтамасы бойынша бізде бар

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \tag{4}$$

онда (1)-(4) қатынасынан аламыз

$$p \frac{dV}{dT} = C - C_v, \tag{5}$$

тең тұрақты көлемдегі бір атомды газдың молярлық жылу сыйымдылығында

$$C_v = \frac{3}{2} R. \tag{6}$$

Шартта берілген графиктен көруге болады, мына температурада

$$T_1^* = 350 \tag{7}$$

жылу сыйымдылық $C = C_v$ және, сәйкесінше, $\frac{dV}{dT} = 0$. Осы температура арқылы өткенде туынды $\frac{dV}{dT}$ белгісі плюс минусқа өзгереді. Бұл осы температурада газ көлемі жергілікті максимумға жетеді

дегенді білдіреді: $T_{\max} = T_1^* = 350$

Мына температурада

$$T_2^* = 400 \tag{8}$$

туынды $\frac{dV}{dT}$ да нөлге тең және осы нүктеден өткенде оның туынды белгісі минусан плюсқа

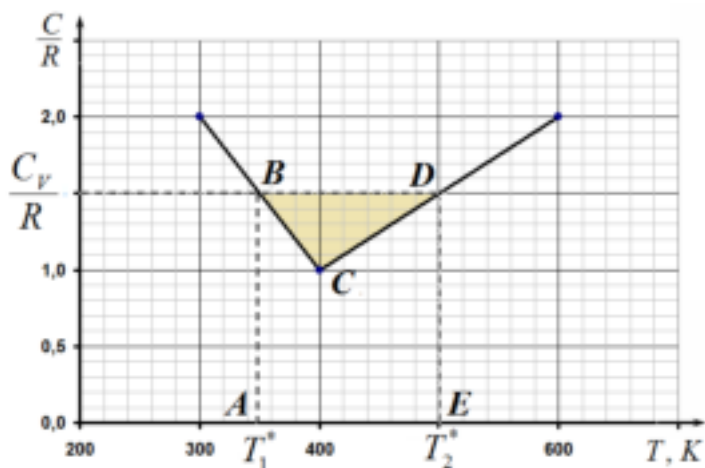
өзгереді. Бұл T_2^* жергілікті көлемнің минимум

нүктесі екенін білдіреді: $T_{\min} = T_2^* = 400$

$T_1^* = 350$ -ден до $T_2^* = 400$ -ге

дейінгі бөлікте газ Q жылу мөлшерін алады,

$C(T)$ тәуелділігінің ауданына сандық түрде тең, яғни $ABCDE$ фигураның ауданы болып табылады. Ішкі энергия өзгерісі



$\Delta U = C_V(T_2^* - T_1^*)$ $ABDE$ тіктөртбұрышының ауданына сандық түрде тең. Термодинамиканың бірінші бастамасынан $A = \Delta U - Q$, сондықтан T_1^* -ден T_2^* -ге дейінгі газда атқарылған жұмыс сандық жағынан $ABDE$ тіктөртбұрышының аудандары мен $ABCDE$ фигурасы арасындағы айырмашылыққа тең, яғни. BDC штрихталған фигураның ауданы:

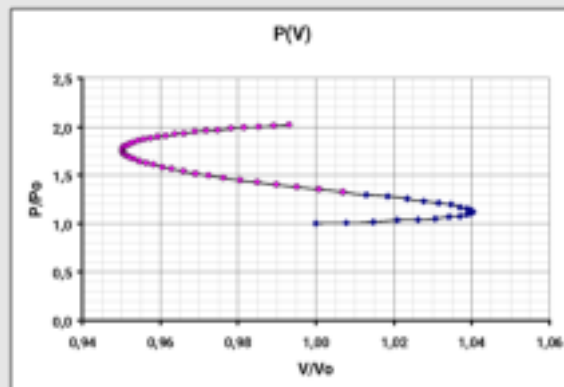
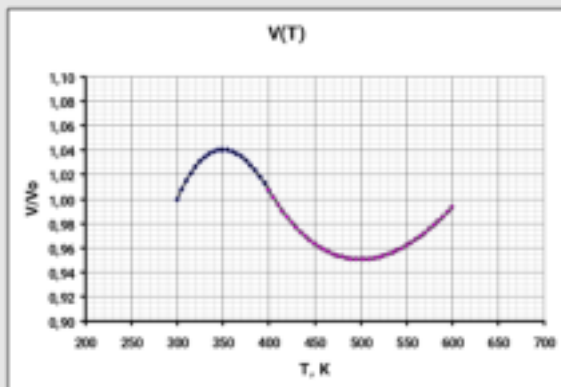
$$A = \frac{1}{4} R(T_{\max} - T_{\min}) = 312 \tag{9}$$

Қосымша: айқын тәуелділік $V(T)$:

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{7/2} \exp\left(-\frac{T - T_1}{\Delta T_1}\right), \text{ егер } T_1 = 300 \leq T \leq 400 \text{ К және } \Delta T_1 = 100 \text{ К};$$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{7/2} \exp\left(\frac{T - T_0}{\Delta T_2}\right), \text{ егер } T_0 = 500 \leq T \leq 600 \text{ К және } \Delta T_2 = 200 \text{ К}.$$

Газды қыздыру процесіндегі $V(T)$ және $P(V)$ тәуелділіктері төмендегі суреттерде көрсетілген.

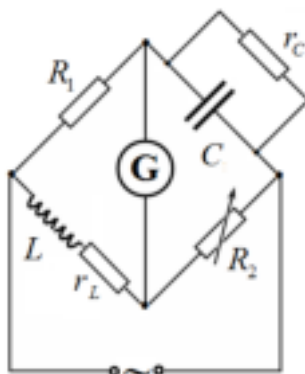


Мазмұны	Ұпайлар
Формула (1): $\delta Q = dU + dA$	0.2
Формула (2): $\delta A = p dV$	0.2
Формула (3): $dU = C_V dT$	0.2
Формула (4): $C = \frac{\delta Q}{dT}$	0.2
Формула (5): $p \frac{dV}{dT} = C - C_V$	0.4
Формула (6): $C_V = \frac{3}{2} R$	0.2
Формула (7): $T_1^* = 300$	0.4
Формула (8): $T_2^* = 500$	0.4
Формула (9): $A = \frac{1}{4} R(T_{\max} - T_{\min})$	0.2
(9) формуланың сандық мәні: $A = 312$	0.4

Барлығы	3.0
---------	-----

Тапсырма 1.2 (3.0 ұпай)

Көпірдің эквивалентті тізбегі төмендегі суретте көрсетілген, ол идеалды емес индуктивтілік тізбегі эквивалентті екенін ескереді - бұл идеалды катушкалар L және резистор r_L тізбектей жалғанған; ағып тұрған конденсатордың эквивалентті тізбегі идеалды конденсатор C -ға параллель қосылған r_C резисторы болып табылады.



Шешім 1. Күрделі сандардағы көпір балансының шарты былай жазылады

$$Z_L Z_C = R_1 R_2, \tag{1}$$

мұндағы кедергілер сәйкесінше

$$Z_L = r_L + i\omega L \tag{2}$$

және

$$Z_C = \frac{r_C}{1 + i\omega C r_C} \tag{3}$$

(1)-(3) өрнектерді түрлендірулерден кейін аламыз:

$$i\omega(L - R_1 R_2 C) = r_L - \frac{R_1 R_2}{r_C} \tag{4}$$

Жиілікті өзгерткенде, теңдеудің екі жағы да нөлге тең болса, бұл теңдік бұзылмайды, сондықтан

$$C = \frac{L}{R_1 R_2} = 0,5 \text{ Ф} \tag{5}$$

$$r_C = \frac{R_1 R_2}{r_L} = 10 \text{ Ом} \tag{6}$$

Шешім 2. Конденсатордағы кернеу болсын

$$U_C = U_0 \cos \omega t \tag{1}$$

содан кейін ол арқылы ток өтеді

$$I_C = -C\omega \sin \omega t \tag{2}$$

және оның ағып кету кедергісі арқылы өтетін ток

$$I_C = \frac{U_0 \sin \omega t}{r_C} \tag{3}$$

Конденсатор бар тұтқа арқылы өтетін жалпы ток тең

$$I_1 = I_C + I_{r_c}, \tag{4}$$

және көпір теңдестірілген болғандықтан, сол ток R_1 кедергісі арқылы өтеді, демек,

$$U_{R_1} = I_1 R_1 \tag{5}$$

екінші жағынан, бұл кернеу индуктивтілігі

$$U_L = U_{R_1}, \tag{6}$$

иықтағы кернеуінің төмендеуіне тең, ол үшін кернеудің төмендеуі

$$U_L = \frac{dI_2}{dt} + I_2 r_L, \tag{7}$$

өрнегімен берілген, онда ток күші

$$I_2 = I_{R_2} = \frac{U_C}{R_2} \tag{8}$$

баланстық теңдеуімен берілген, себебі

$$U_{R_1} = U_C \tag{9}$$

(1)-(9) теңдеулерді бірге жинап, аламыз

$$\left(-\frac{\omega L}{R_2} + C\omega R_1 \right) U_0 \sin \omega t = \left(\frac{R_1}{r_c} - \frac{r_L}{R_2} \right) U_0 \cos \omega t$$

(10)

Бұл теңдіктен теңдеудің екі жағы да нөлге тең болса, жиілікке тәуелсіз тепе-теңдік шарты орындалатынын көруге болады, яғни жауабын аламыз.

$$C = \frac{L}{R_1 R_2} = \omega \delta \Phi$$

(11)

$$r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L} = \omega \delta \Omega$$

(12)

Мазмұны	Ұпайлар
Шешім 1	
Эквивалентті диаграмма: Барлық элементтер дұрыс орналастырылған	0.5
Формула (1): $Z_L Z_C = R_1 R_2$	0.3
Формула (2): $Z_L = r_L + i\omega L$	0.3
Формула (3): $Z_C = \frac{r_c}{1 + i\omega C r_c}$	0.3
Формула (4): $i\omega(L - R_1 R_2 C) = r_L - \frac{R_1 R_2}{r_c}$	0.4
Формула (5): $C = \frac{L}{R_1 R_2}$	0.4
Сандық мән формула (5)-те: $C = \omega \delta \Phi$	0.2

Формула (6): $r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L}$	0.4
Сандық мән формула (6)-да: $r_c = \text{МОМ}$	0.2
Барлығы	3.0
Шешім 2	
Эквивалентті диаграмма: Барлық элементтер дұрыс орналастырылған	0.5
Формула (1): $U_C = U_0 \cos \omega t$	0.1
Формула (2): $I_C = -C \omega \cos \omega t$	0.1
Формула (3): $I_{r_c} = \frac{U_0 \cos \omega t}{r_c}$	0.1
Формула (4): $I_1 = I_C + I_{r_c}$	0.1
Формула (5): $U_{R_1} = I_1 R_1$	0.1
Формула (6): $U_L = U_{R_1}$	0.1
Формула (7): $U_L = \frac{dI_2}{dt} + I_2 r_L$	0.1
Формула (8): $I_2 = I_{R_2} = \frac{U_C}{R_2}$	0.1
Формула (9): $U_{R_2} = U_C$	0.1
Формула (10): $\left(-\frac{\omega L}{R_2} + C \omega R_1 \right) U_0 \sin \omega t = \left(\frac{R_1}{r_c} - \frac{r_L}{R_2} \right) U_0 \cos \omega t$	0.4
Формула (11): $C = \frac{L}{R_1 R_2}$	0.4
Сандық мән формула (11)-де: $C = \omega L \Phi$	0.2
Формула (12): $r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L}$	0.4
Сандық мән формула (12)-де: $r_c = \text{МОМ}$	0.2
Барлығы	3.0

Тапсырма 1.3 (4.0 ұпай)

Массасы m планета Күнді айналмалы орбита радиусы R бойынша v жылдамдықпен қозғалсын, онда планетаның радиалды бағытқа проекциясында қозғалыс теңдеуі былай жазылады

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM_S}{R^2}, \tag{1}$$

одан

$$v = \sqrt{G \frac{M_s}{R}}, \tag{2}$$

мұндағы G – гравитациялық тұрақты .

J индексі бар Юпитер және E индексі бар Жер үшін формуланы (2) жазып, бөлгеннен кейін аламыз

$$\frac{v_J}{v_E} = \sqrt{\frac{R_E}{R_J}}, \tag{3}$$

ал екінші жағынан, Кеплердің үшінші заңына сәйкес, T_E және T_J айналу периодтарының қатынасы үшін бізде бар

$$\frac{T_E^2}{T_J^2} = \frac{R_E^3}{R_J^3} \tag{4}$$

Юпитердің қозғалысын спектрометрмен анықтау мүмкін емес, бірақ ол Күн үшін де жасалуы мүмкін, өйткені ол Күн-Юпитер жүйесінің массалар центрін де айналып өтеді. Күннің жылдамдығына мына өрнектен оңай табуға

$$v_s = v_J \frac{M_J}{M_s} \tag{5}$$

Күн жүйенің жалпы масса центрі айналасында қозғалатындықтан және бақылаушы бір жазықтықта орналасқандықтан, Доплер эффектінің формуласы бойынша анықтау кезінде келесі шарт орындалады

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v_s}{c} \tag{6}$$

(3)-(6) теңдеулерді бірге жинап, соңғы жауапты аламыз

$$R_{\min} = \frac{M_s}{M_J} \left(\frac{T_J}{T_E} \right)^{1/3} \frac{c}{2v_E} = 1.20 \cdot 10^7 \tag{7}$$

Бұл рұқсат әлемнің әртүрлі елдерінде шығарылған көптеген заманауи спектрометрлер үшін қол жетімді.

Мазмұны	Ұпайлар
Формула (1): $\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM_s}{R^2}$	0.2
Формула (2): $v = \sqrt{G \frac{M_s}{R}}$	0.2
Формула (3): $\frac{v_J}{v_E} = \sqrt{\frac{R_E}{R_J}}$	0.2
Формула (4): $\frac{T_E^2}{T_J^2} = \frac{R_E^3}{R_J^3}$	0.4
Формула (5): $v_s = v_J \frac{M_J}{M_s}$	1.0

Формула (6): $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v_S}{c}$	1.0
Формула (7): $R_{\min} = \frac{M_S}{M_J} \left(\frac{T_J}{T_E} \right)^{1/3} \frac{c}{2v_E}$	0.5
Сандық мән формула (7)-де: $R_{\min} = 1.20 \cdot 10^7$	0.5
Барлығы	4.0

Тапсырма 2. Ферми үдеуі (10.0 ұпай)

Неліктен өтіп бара жатқан көліктерге қарағанда қарсы келе жатқан көліктер көп?

2.1 t уақыт ішінде B жолағындағы көлік өзінен

$$l = (v - (v - \Delta v))t = \Delta v t \tag{1}$$

қашықтықта тұрған көліктерді ғана басып озады. Сондықтан бұл көліктердің саны

$$N_1 = n l = n \Delta v t \approx 0.83 \tag{2}$$

Бірін-бірі озу арасындағы уақыт

$$\tau_1 = \frac{1}{n \Delta v} = 0.0272 \text{ с} \tag{3}$$

2.2 Ұқсас пайымдаулар басып озулар саны мен басып озулар арасындағы уақыт өзгеріссіз қалады деген қорытындыға әкеледі, яғни.

$$N_2 = n l = n \Delta v t \approx 0.83 \tag{4}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{n \Delta v} = 0.0272 \text{ с} \tag{5}$$

2.3 Қарсы келе жатқан көліктердің санына қарай қозғалу кезінде және қатарынан екі кездесу арасындағы уақыт мына формулалар бойынша есептеледі:

$$N_{3,4} = n(v + (v \pm \Delta v))t = n(2v \pm \Delta v)t$$

$$\tau_{3,4} = \frac{1}{n(2v \pm \Delta v)} \tag{6}$$

және сандық есептеулер келесі мәндерді береді

$$N_3 = 14.2; \quad \tau_3 = 4.2 \text{ с};$$

$$N_4 = 15.8; \quad \tau_4 = 3.8 \text{ с}. \tag{7}$$

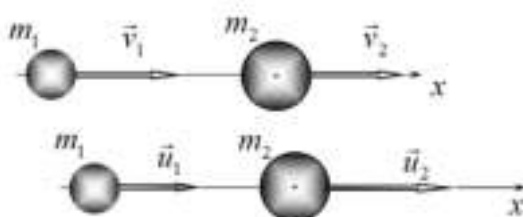
Серпінді соқтығыс

2.4 Импульстің сақталу заңын

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{8}$$

және механикалық энергияның сақталу заңын жазамыз

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \tag{9}$$



Осы теңдеулерді мына түрде қайттан жазамыз

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2$$

(10)

ал, екінші теңдеуді біріншіге бөліп, мына нәтижені аламыз

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2$$

(11)

Осы теңдіктен $u_2 = v_1 + u_1 - v_2$ өрнектеп, импульстің сақталу заңын теңдеуге қоямыз

$$(m_1 + m_2)u_1 = (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2,$$

(12)

осыдан шығады

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

(13)

Екінші шардың жылдамдығын (13) формуладағы «1» және «2» индекстерін өзгерту арқылы оңай алуға болады.

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

(14)

2.5 (13) формуланы пайдаланып, қажетті параметрлер арасындағы тәуелділіктің айқын түрін аламыз

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_2}{v_1} = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 - \frac{m_2}{m_1}} + \frac{2 \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow$$

$$\eta_1 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} + \frac{2\mu}{1 + \mu} \eta_2$$

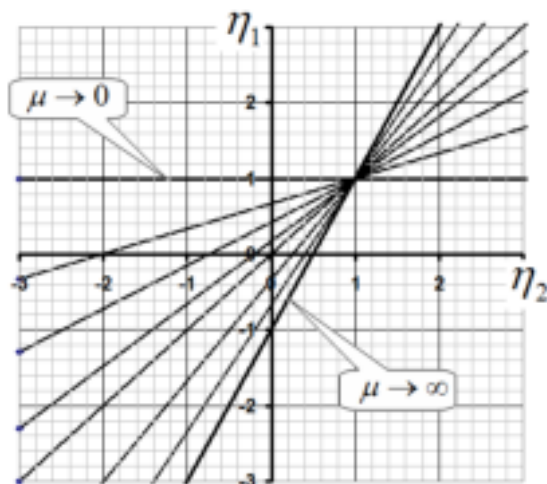
(15)

Как Алынған өрнектен шығатындай, μ массалық қатынасының кез келген мәндері үшін $\eta_1(\eta_2)$ тәуелділігі сызықты, яғни. оның графигі түзу болады. Бұл түзулердің барлығы $\eta_1 = 1; \eta_2 = 1$ нүктесі арқылы өтетінін байқау да қиын емес. $\mu \rightarrow 0$ нүктесінде көлбеу коэффициенті $\eta_1 = 1$ нөлге ұмтылады, яғни тәуелділік графигі көлденең түзуге ұмтылады. $\mu \rightarrow \infty$ нүктесінде қалаған тәуелділік ұмтылады:

$$\eta_1 = -1 + 2\eta_2$$

(16)

Бұл функциялардың графиктік тобы төмендегі суретте көрсетілген.



2.6 Шардың кинетикалық энергиясы, егер соққыдан кейінгі доптың жылдамдығының модулі соққыға дейінгі жылдамдық модулінен үлкен болса, яғни теңсіздіктер орындалса артады

$$|\eta_1| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 > 1 \\ \eta_1 < -1 \end{cases}$$

(17)

η_1 шамасы үшін орнына (15) өрнегін қойып, теңсіздіктерді аламыз

$$\begin{cases} \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu} \eta_2 > 1 \\ \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu} \eta_2 < -1 \end{cases}$$

(18)

Бұл теңсіздіктер келесі қатынастар арқылы шешіледі:

а)

$$\eta_2 > 1,$$

(19)

яғни бұл шартты орындау үшін екінші доп біріншісін қуып жетуі керек;

б)

$$\eta_2 < -\frac{1}{\mu},$$

(20)

бұл жағдайда екінші доп қарай жылжу керек және оның жылдамдығының модулі көрсетілген мәннен асып кетуі керек.

2.7 Шектеу жағдайында $m_2 \gg m_1$ соқтығысқаннан кейінгі бірінші доптың жылдамдығы

$$\bar{v}_1 = -v_1 + 2v_2,$$

(21)

яғни бірінші доптың жылдамдығы таңбасын өзгертеді (доп шағылысады) және оның модулі екінші ауыр доптың жылдамдығынан екі есеге өзгереді.

Жеңіл шар өзінің жылдамдығын және, демек, кинетикалық энергиясын арттырады, егер:

а) ауыр доп оны қуып жетеді (артынан соғу) $v_2 > 1$;

б) ауыр доп оған қарай жылжиды $v_2 < 0$.

Ферми үдеуінің ең қарапайым моделі

2.8 Плитаның қозғалыс заңын дәстүрлі түрде жазамыз

$$x(t) = A \cos(\omega t),$$

(22)

онда жылдамдықтың уақытқа тәуелділігі функция арқылы сипатталады

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t),$$

(23)

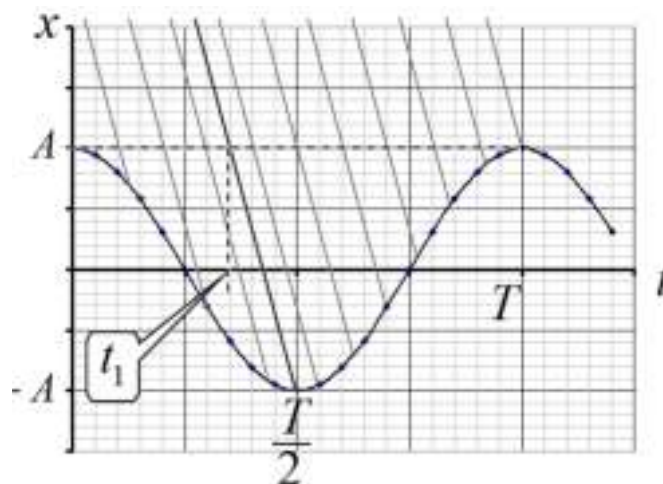
сондықтан платформаның максималды жылдамдығы

$$V_0 = A\omega = 2\pi \frac{A}{T}.$$

(24)

2.9 Бұл сұраққа жауап беру үшін платформалық тербелістердің бір кезеңін қарастыру жеткілікті. Платформа координатасының уақытқа (22) тәуелділігінің графигін тұрғызайық және оған

$x = x_0 - ut$ түзу болып келетін түскен бөлшектердің координаталарының уақытқа тәуелділік графиктерін салайық.



Суретте $u > V_0$ жағдай көрсетілген. Соққы нәтижесінде платформа T осінің оң бағытына қарай жылжыған сәттерде платформамен соқтығысатын бөлшектер жылдамдығын арттырады, бұл жағдайда соқтығыстар $\frac{T}{2}$ және T уақыт аралығында болуы керек. Дегенмен, соқтығыс уақыттары біркелкі бөлінген кездейсоқ шама емес, бірақ пластинаның өзіне жақындау уақыттары біркелкі бөлінген, сондықтан $x = A$ жазықтықты қарастырамыз, жақындау уақыттары бірдей ықтимал.

Платформамен соқтығысқан бөлшектің қозғалыс заңын сипаттайтын түзу жүргізейік $t = \frac{T}{2}$ уақытында (суретте – жуан сызық). Бұл бөлшек $x = A$ жазықтығымен кесіп өткен уақыт моментін t_1 деп белгілейік. Осы нүктеден кейін платформамен соқтығысқан бөлшектер жылдамдығы мен энергиясын арттырады. Бірақ бұл бөлшектер t_1 және T уақыт интервалында $x = A$ жазықтығын кесіп өтеді, сондықтан бұл бөлшектердің үлесі келесідей есептеледі

$$\eta = \frac{T - t_1}{T}.$$

(25)

Бұл бөлшектің қозғалыс заңынан t_1 уақыт моментін табу оңай

$$t_1 = \frac{T}{2} - \frac{2A}{u},$$

(26)

онда үдетілген бөлшектердің үлесі тең болады

$$\eta = \frac{T - t_1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2A}{uT} = \frac{1}{2} + \frac{V_0}{\pi u}$$

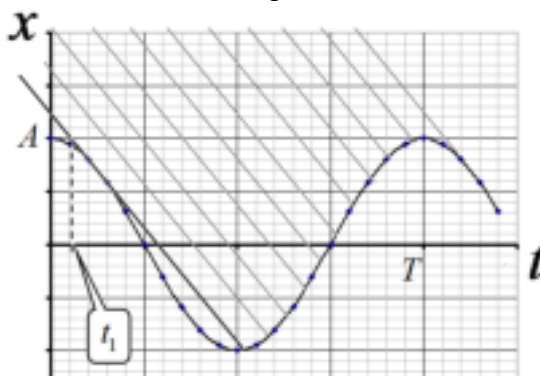
(27)

Мұнда (24) формуладан келетін қатынасты қолданамыз.: $\frac{2A}{T} = \frac{V_0}{\pi}$. Көрсетілген $u = 1.5V_0$ сандық мәнін ауыстырсақ, мынаны аламыз:

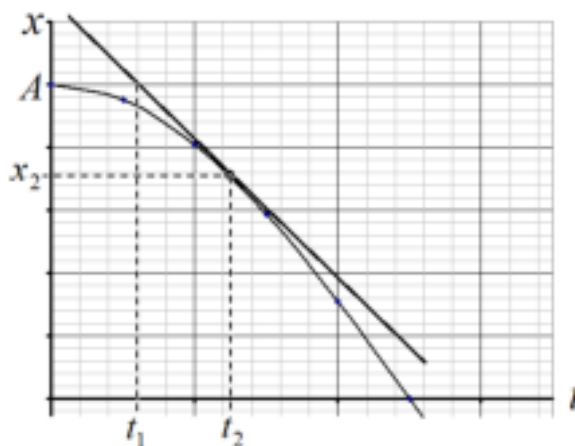
$$\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.5\pi} \approx 0.71$$

(28)

Төмендегі суретте көрсетілген $u < V_0$ -де біршама басқа жағдай орын алады.



Бұл жағдайда үдетілген және тежелген бөлшектер арасындағы t_1 «шектері» төмендегі суретте көрсетілгендей платформаның қозғалыс заңының графигіне жанама болатын түзу сызықпен анықталады.



Екі функцияның графиктері t_2 уақытында тиіп тұрғанда, функциялардың өздерінің де, олардың туындыларының да мәндері сәйкес келеді, яғни платформа мен шардың жылдамдықтары, сондықтан

$$-A\omega \sin(\omega t_2) = -u$$

(29)

одан табамыз

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{u}{A\omega} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{u}{V_0}$$

(30)

$$x_2 = A \cos \omega t_2 = A \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_2} = A \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}}$$

(31)

Бұл өрнектер $x = A$ жазықтыққа жақындау уақытын анықтауға мүмкіндік береді

$$t_1 = t_2 - \frac{A - x_2}{u} = \frac{T}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right)$$

(32)

Осы уақыттың тербеліс кезеңіне қатынасы платформамен соқтығысатын, оны қуып жететін бөлшектердің үлесін анықтайды, сондықтан олардың энергиясы төмендейді:

$$1 - \eta = \frac{1}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right) \approx 0.04$$

(33)

сондықтан соққыдан кейін энергиясы өсетін бөлшектердің үлесі тең

$$\eta \approx 0.96$$

(34)

2.10 3 Тербелістің бір кезеңінде платформа $4A$ жолымен жүреді, сондықтан оның жылдамдығының модулі тең,

$$V = \frac{4A}{T}$$

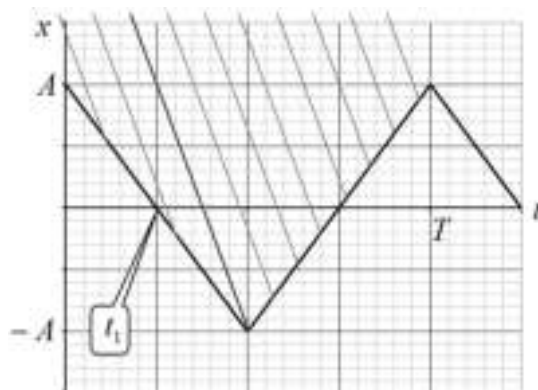
(35)

2.11 Шардың жылдамдығы платформаның жылдамдығынан үлкен болған кезде, соғу нәтижесінде энергиясы артқан шарлардың үлесі (27) формулаға ұқсас формула бойынша есептеледі:

$$\eta = \frac{T - t_1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2A}{uT} = \frac{1}{2} + \frac{V}{2u}$$

(36)

және сәйкес сурет төменде көрсетілген.



Платформа жылдамдығының модулі тұрақты деп қабылданғандықтан, соққыдан кейінгі бөлшектердің жылдамдығының модулі тең болады

$$u_+ = u + 2V$$

(37)

0-ден t_1 -ге дейінгі уақыт аралығында платформамен соқтығысқан бөлшектердің жылдамдықтары тең болады.

$$u_- = u - 2V$$

(38)

Осылайша, соққыдан кейінгі бөлшектердің орташа энергиясы тең болады

$$E = \eta \frac{mu_+^2}{2} + (1 - \eta) \frac{mu_-^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{V}{2u} \right) (u + 2V)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{V}{2u} \right) (u - 2V)^2 \right) =$$

$$= \frac{mu^2}{4} \left(\left(1 + \frac{V}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2 + \left(1 - \frac{V}{u} \right) \left(1 - 2 \frac{V}{u} \right)^2 \right) = \frac{mu^2}{2} \left(1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2 \right)$$

(39)

және, демек, орташа энергияның ұлғаюы тең

$$\varepsilon = 1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2 \approx 4.6$$

(40)

Бөлшектердің жылдамдығы платформаның жылдамдығынан аз болса, онда барлық бөлшектер платформамен кері бағытта соқтығысады, сондықтан барлық бөлшектер жылдамдығы мен энергиясын арттырады. Соқтығысқаннан кейін бөлшектердің жылдамдықтары $u_+ = u + 2V$ және олардың энергиясына тең болады

$$E = \frac{m}{2} (u + 2V)^2 = \frac{mu^2}{2} \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2$$

(41)

және, демек, соқтығысудан кейінгі және соқтығысқа дейінгі бөлшектердің энергияларының қатынасы тең

$$\varepsilon = \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2 = 25.0$$

(42)

	Мазмұны	Ұпайлар	
2.1	Формула (2): $N_1 = n\Delta vt$	0.1	0.4
	Сандық мәні формула (2)-де: $N_1 \approx 0.83$	0.1	
	Формула (3): $\tau_1 = \frac{1}{n\Delta v}$	0.1	
	Сандық мәні формула (3)-те: $\tau_1 = 0.0272 \text{ с}$	0.1	
2.2	Формула (4): $N_2 = n\Delta vt$	0.1	0.4
	Сандық мәні формула (4)-те: $N_2 \approx 0.83$	0.1	
	Формула (5): $\tau_2 = \frac{1}{n\Delta v}$	0.1	
	Сандық мәні формула (5)-те: $\tau_2 = 0.0272 \text{ с}$	0.1	

2.3	$N_{3,4} = n(2v \pm \Delta v)t$ $\tau_{3,4} = \frac{1}{n(2v \pm \Delta v)}$ Формулы (6):	0.4	0.8
	Сандық мәні формула (7)-де: $N_3 = 14.2; \quad \tau_3 = 4.2 \text{ с};$ $N_3 = 15.8; \quad \tau_3 = 3.8 \text{ с}.$	0.4	
2.4	Формула (8): $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$	0.1	0.6
	Формула (9): $\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$	0.1	
	Формула (13): $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$	0,2	
	Формула (14): $u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$	0,2	
2.5	Формула (15): $\eta_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu} \eta_2$	0.2	1.6
	Диаграммада тек түзу сызықтар бар, әйтпесе диаграмма бағаланбайды	0.2	
	Барлық түзулер $\eta_1 = 1; \eta_2 = 1$ нүкте арқылы өтеді	0.4	
	$\eta_1 = 1$ түзу бар	0.2	
	$\eta_1 = -1 + 2\eta_2$ түзу бар	0.4	
	Барлық сызықтар $\eta_1 = 1$ және $\eta_1 = -1 + 2\eta_2$ арасында орналасқан	0,2	
2.6	Теңсіздік (7): $ \eta_1 > 1 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 > 1 \\ \eta_1 < -1 \end{cases}$	0.2	0.4
	Теңсіздік (19): $\eta_2 > 1$	0.1	
	Теңсіздік (20): $\eta_2 < -\frac{1}{\mu}$	0.1	
2.7	Формула (21): $\bar{u}_1 = -v_1 + 2v_2$	0.1	0.3
	Теңсіздік а): $v_2 > 1$	0.1	
	Теңсіздік б): $v_2 < 0$	0.1	
2.8	Формула (22): $x(t) = A \cos(\omega t)$	0.1	0.4
	Формула (23): $v(t) = -A\omega \sin(\omega t)$	0.1	

	Формула (24): $V_0 = A\omega = 2\pi \frac{A}{T}$	0,2	
2.9	Формула (25): $\eta = \frac{T-t_1}{T}$	0,3	2.7
	Формула (26): $t_1 = \frac{T}{2} - \frac{2A}{u}$	0,3	
	Формула (27): $\eta = \frac{1}{2} + \frac{V_0}{\pi u}$	0,3	
	Сандық мәні формула (28)-де: $\eta \approx 0.71$	0,3	
	Формула (29): $-A\omega \sin(\omega x_2) = -u$	0,2	
	Формула (30): $t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{u}{A\omega} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{u}{V_0}$	0,2	
	Формула (31): $x_2 = A\sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}}$	0,3	
	Формула (32): $t_1 = \frac{T}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right)$	0,3	
	Формула (33): $1 - \eta = \frac{1}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right)$	0,3	
Сандық мәні формула (34)-те: $\eta \approx 0.96$	0,2		
2.10	Формула (35): $V = \frac{4A}{T}$	0,2	0.2
2.11	Формула (36): $\eta = \frac{1}{2} + \frac{V}{2u}$	0,3	2.2
	Формула (37): $u_+ = u + 2V$	0,2	
	Формула (38): $u_- = u - 2V$	0,2	
	Формула (39): $E = \eta \frac{mu_+^2}{2} + (1-\eta) \frac{mu_-^2}{2}$	0,3	
	Формула (40): $\varepsilon = 1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2$	0,3	
	Сандық мәні формула (40)-та: $\varepsilon \approx 4.6$	0,2	
	Формула (41): $E = \frac{m}{2} (u + 2V)^2$	0,2	
	Формула (42): $\varepsilon = \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2$	0,3	
Сандық мәні формула (42)-де: $\varepsilon = 25.0$	0,2		
Барлығы			10.0

Тапсырма 3. Магнетрон

Электр және магнит өрістеріндегі электрондардың қозғалысы

3.1 Біртекті электр өрісінің әсерінен электрон тұрақты үдеумен қозғалады

$$a = \frac{eE}{m}, \quad (1)$$

ол x осінің теріс бағытына бағытталған, сондықтан қол жеткізілген координатаның максималды мәні өрнекпен анықталады

$$x_{\max} = \frac{u_0^2}{2a} = \frac{mu_0^2}{2eE}. \quad (2)$$

3.2 Біртекті магнит өрісінде қозғалған кезде Лоренц күші электронға әсер етеді, тең

$$F_L = eu_0B \quad (3)$$

және ол радиусы R Ньютонның екінші заңынан анықталған шеңбер бойымен қозғалады

$$m \frac{u_0^2}{R} = F_L \quad (4)$$

Одан шығады

$$R = \frac{mu_0}{eB} \quad (5)$$

Бұл жағдайда координатаның максималды мәні тең болатыны анық

$$x_{\max} = R = \frac{mu_0}{eB} \quad (6)$$

3.3 Есеп зертханалық анықтамалық жүйеде оңай шешіледі, онда электрон төменгі түрінде (5) формуламен анықталған жиілікпен шеңбер бойымен қозғалады.

$$\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{eB}{m} \quad (7)$$

Электронға шамалы қосымша жылдамдық берілгенде, ол бастапқыға жақын және онымен диаметральді қарама-қарсы екі нүктеде қиылысатын шеңбер бойымен қозғалады, бұл периодты жабық екі өлшемді траектория бойынша қозғалыс ретінде қарастырылуы мүмкін.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB} \quad (8)$$

3.4 Координат x максималды болған кезде, z бөлшегінің жылдамдығы z осі бойымен бағытталған және энергияның сақталу заңы бойынша тең

$$eEx_{\max} = \frac{mu^2}{2} \quad (9)$$

Қозғалыс теңдеуі z оське проекцияда шекті айырмашылықтар мына түрінде жазылады

$$m \frac{\Delta u_z}{\Delta t} = eB u_x,$$

(10)

$\Delta x = u_x \Delta t$ есебімен мына қатынасқа әкеледі

$$m \Delta u_z = eB \Delta x,$$

(11)

ол қажетті момент үшін мына түрді қабылдайды

$$m\dot{u} = eBx_{\max}$$

(12)

(9) және (12) теңдеулерін бірге шешіп, біз соңында аламыз

$$x_{\max} = \frac{2mE}{eB^2}$$

(13)

3.5 Магнит өрісі жұмыс істемейтіндіктен, электронның жылдамдығы абсолютті мәнде тұрақты болып қалады және бастапқыға тең

$$u = u_0 = \text{const}$$

(14)

Толық жылдамдықты $u_r = dr/dt$ радиалды және $u_\varphi = r d\varphi/dt$ азимуттық құраушыларға бөлейік. Электронның бастапқы нүктеге қатысты бұрыштық импульсі анық тең

$$L = mru_\varphi$$

(15)

және сол нүктеге қатысты Лоренц күшінің моменті

$$M = eBu_r r$$

(16)

Моменттер теңдеуі бойынша аламыз

$$\frac{dL}{dt} = M$$

(17)

$u_r = dr/dt$ пайдаланумен мына қатынасқа алып келеді

$$d(mru_\varphi) = e\alpha r^2 dr$$

(18)

Осыке дейінгі қашықтық максимум болған уақытта радиалды жылдамдық жоғалады, ал азимуттық жылдамдық (14) формулаға сәйкес бастапқыға тең, сондықтан (18) қатынасты интегралдау теңдеуге әкеледі.

$$mr_{\max}u_0 = e\alpha \frac{r_{\max}^3}{3}$$

(19)

одан шығады

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3mu_0}{e\alpha}}$$

(20)

3.6 Электрон барлық уақытта шеңбер бойымен қозғалатындықтан, (7) теңдеу бойынша оның орбитасындағы магнит өрісі B_0 артқан сайын импульстің туындысы заңға сәйкес өзгереді

$$\frac{dp}{dt} = er \frac{dB_0}{dt}$$

(21)

Электрон құйынды электр өрісінің әсерінен қозғалады, оның қарқындылығы E қатынасымен анықталады

$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt},$$

(22)

ол Фарадей заңы бойынша электрон орбитасы арқылы магнит индукциясының ағынын қамтиды, тең

$$\Phi = \int_0^r B(r) 2\pi r dr$$

(23)

Орбитадағы электронның үдеуіне арналған Ньютонның екінші заңының теңдеуі мынадай түрге ие

$$\frac{dp}{dt} = eE$$

(24)

(21)-(24) теңдеулерінің бірлескен шешімі магнит өрісі үшін келесі теңдікке әкеледі, ол астындағы өрнек циклотрон шарты деп аталады

$$\int_0^r B(r) 2\pi r dr = 2\pi r^2 B_0$$

(25)

(25) формуладан оның орындалуы электрон индукциямен $B_0 = B_2$ магнит өрісі аймағында қозғалған жағдайда ғана мүмкін болады деген қорытындыға келеміз, сондықтан шартта берілген магнит индукциясын қашықтыққа байланысты интегралдасақ, қатынасты аламыз

$$B_1 \pi r_1^2 + B_2 \pi (r^2 - r_1^2) = 2\pi r^2 B_2,$$

(26)

оның шешімі мына түрінде болады

$$\frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{r^2}{r_1^2}$$

(27)

Электронның шеңбер бойымен қозғалысы индукциясы B_2 тең болатын ауданда ғана мүмкін, яғни $r_1 < r < r_2$ кезінде, бұл қажетті қатынас интервалда жату керек дегенді білдіреді

$$2 < \frac{B_1}{B_2} < 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

(28)

Цилиндрлік магнетрон

3.7 Цилиндрлік катод пен анодтың ұзындық бірліктерінің заряды λ -ға тең болсын, ал электродтардың жалпы ұзындығы l . Сонда Гаусс теоремасы бойынша катод пен анод арасындағы кеңістіктегі электр өрісінің кернеулігі теңдеу арқылы анықталады.

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0},$$

(29)

одан аламыз

$$E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

(30)

мұнда E – магнетрон осіне дейінгі қашықтық.

Потенциалдар айырмасының E қашықтыққа тәуелділігі, анықтамасы бойынша интеграл ретінде жазылады

$$V = \int_a^r E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$$

(31)

жеке $r = b$ үшін береді

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

(32)

(31) және (32) теңдеулерін бірге шешіп, аламыз

$$V = V_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} = 87.6$$

(33)

3.8 Радиусы R жұқа сақинаны қарастырайық, ол арқылы j ток өтеді және сақина осінің нүктесіндегі магнит индукциясының шамасын есептеңіз, содан кейін ол z қашықтықта оның орталығы болады.

Сақинаны $d\vec{l}$ кіші элементтерге бөлеміз, онда магнит индукциясы келесі Био-Саварра заңымен анықталады

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

(34)

онда \vec{r} векторы ток $d\vec{l}$ элементінің орналасқан жерінен магниттік индукция ізделетін O нүктесіне дейін сызылады

Бұл геометриялық қатынастардан туындайды

$$d\vec{l} \times \vec{r} = dl \cdot r \sin \alpha$$

(35)

және алынған магнит индукциясы сақина осі бойымен бағытталғандықтан

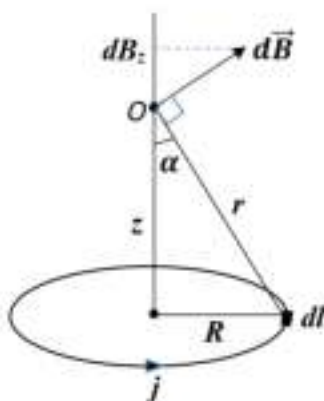
$$dB_z = dB \sin \alpha$$

(36)

содан кейін $R = r \sin \alpha$ геометриялық қатынасын қолданып, ең соңында аламыз

$$dB_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{R dl}{r^3}$$

(37)



(37) формулаға енгізілген арақашықтықтар тұрақты және

$$r^2 = R^2 + z^2,$$

(38)

содан кейін сақинаның барлық элементтерін қосқаннан кейін табамыз

$$B_z = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

(39)

Енді соленоидтың центріндегі магнит өрісінің индукциясын есептейік, өйткені бұл жерде магнетрон шамы орналасқан. Ол үшін центрден z бастап $z + dz$ -қа дейінгі қашықтықта орналасқан бұрылыстарды қарастырайық, олар арқылы ток өтеді

$$dj = \frac{NI}{L} dz$$

(40)

Бұл бұрылыстарды магнит индукциясы формула (39) бойынша анықталатын сақина ретінде қарастыруға болады, одан біз аламыз

$$dB = \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

(41)

ол интеграциядан кейін соңғы өрнекті береді

$$B = \frac{\mu_0 NI R^2}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{L \sqrt{1 + D^2 / L^2}}$$

(42)

мұнда $D = 2R$ диаметр үшін өрнек қолданылады.

Магнетрондағы электрондардың қозғалысы үшін (18) формулаға ұқсас және төменгі түріндегі формула жарамды

$$d(mrv_\phi) = eBrdr$$

(43)

тұрақты магниттік индукция жағдайында интегралдау береді

$$mrv_\phi = \frac{1}{2} eBr^2$$

(44)

Екінші жағынан, энергияның сақталу заңынан шығатыны

$$\frac{m}{2} (u_r^2 + u_\phi^2) = eV$$

(45)

Токтың критикалық мәніне жеткен кезде анодтың жанындағы магниттік индукция электрондардың радиалды жылдамдығы жойылатындай болады, бұл жағдайға әкеледі.

$$u_r = 0, \quad r = b, \quad V = V_0$$

(46)

(44) және (45) өрнектерін пайдаланып, магнит өрісінің критикалық мәнін береді

$$B = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}$$

(47)

(42) формуланы пайдаланып, соленоидтағы сәйкес токты табамыз

$$I_{\min} = \sqrt{\frac{8mV_0}{e} (A + D^2 / L^2)} \frac{L}{\mu_0 Nb} = 0,701$$

(48)

3.9 Катодқа жақын шамдағы электрондардың бастапқы энергиясы катодтың температурасымен анықталады және

$$E_T = k_B T$$

(49)

Бұл энергия анодтың жанындағы электрондардың энергиясынан әлдеқайда аз болуы керек E_0 , яғни

$$E_T \ll E_0,$$

(50)

мұнда $E_0 = eV_0$, одан ізделінген бағаны аламыз

$$T \ll \frac{eE_0}{k_B} = 870 \cdot 10^5$$

(51)

бұл шын мәнінде пайдаланылған жуықтауды қолдану мүмкіндігін білдіреді, өйткені катод температурасы әдетте кем дегенде екі рет төмен.

	Мазмұны	Ұпайлар	
3.1	Формула (1): $a = \frac{eE}{m}$	0.1	0.2
	Формула (2): $x_{\max} = \frac{mu_0^2}{2eE}$	0.1	
3.2	Формула (3): $F_L = eu_0 B$	0.1	0.4
	Формула (4): $m \frac{u_0^2}{R} = F_L$	0.1	
	Формула (5): $R = \frac{mu_0}{eB}$	0.1	
	Формула (6): $x_{\max} = R = \frac{mu_0}{eB}$	0.1	
3.3	Формула (7): $\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{eB}{m}$	0.2	0.4
	Формула (8): $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$	0.2	
3.4	Формула (9): $eEx_{\max} = \frac{mu^2}{2}$	0.2	1.0
	Формула (10): $m \frac{\Delta u_z}{\Delta t} = eBv_z$	0.2	
	Формула (11): $m\Delta u_z = eB\Delta x$	0.2	

	Формула (12): $m\dot{x} = eBx_{\max}$	0.2	
	Формула (13): $x_{\max} = \frac{2mE}{eB^2}$	0.2	
3.5	Формула (14): $u = u_0 = const$	0.2	1.4
	Формула (15): $L = mru_\varphi$	0.2	
	Формула (16): $M = eBu_\varphi r$	0.2	
	Формула (17): $\frac{dL}{dt} = M$	0.2	
	Формула (18): $d(mru_\varphi) = e\alpha r^2 dr$	0.2	
	Формула (19): $mr_{\max}u_0 = e\alpha \frac{r_{\max}^3}{3}$	0.2	
	Формула (20): $r_{\max} = \sqrt{\frac{3mu_0}{e\alpha}}$	0.2	
3.6	Формула (21): $\frac{dp}{dt} = er \frac{dB_0}{dt}$	0.2	1.6
	Формула (22): $E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}$	0.2	
	Формула (23): $\Phi = \int_0^r B(r)2\pi r dr$	0.2	
	Формула (24): $\frac{dp}{dt} = eE$	0.2	
	Формула (25): $\int_0^r B(r)2\pi r dr = 2\pi r^2 B_0$	0.2	
	Формула (26): $B_1\pi r_1^2 + B_2\pi(r^2 - r_1^2) = 2\pi r^2 B_2$	0.2	
	Формула (27): $\frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{r^2}{r_1^2}$	0.2	
	Формула (28): $2 < \frac{B_1}{B_2} < 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}$	0.2	
3.7	Формула (29): $E2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$	0.1	1.0
	Формула (30): $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	0.1	
	Формула (31): $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$	0.2	

	<p>Формула (32): $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$</p>	0.2	
	<p>Формула (33): $V = V_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$</p>	0.2	
	<p>Сандық мән формула (33)-де: $V = 87.6$</p>	0.2	
3.8	<p>Формула (34): $d\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$</p>	0.2	3.2
	<p>Формула (35): $d\vec{l} \times \vec{r} = dl \cdot r$</p>	0.2	
	<p>Формула (36): $dB_z = dB \sin \alpha$</p>	0.2	
	<p>Формула (37): $dB_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{R dl}{r^3}$</p>	0.2	
	<p>Формула (38): $r^2 = R^2 + z^2$</p>	0.2	
	<p>Формула (39): $B_z = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$</p>	0.2	
	<p>Формула (40): $dj = \frac{NI}{L} dz$</p>	0.2	
	<p>Формула (41): $dB = \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz$</p>	0.2	
	<p>Формула (42): $B = \frac{\mu_0 NI}{L\sqrt{1 + D^2/L^2}}$</p>	0.2	
	<p>Формула (43): $d(mru_\varphi) = eBr dr$</p>	0.2	
	<p>Формула (44): $mru_\varphi = \frac{1}{2} eBr^2$</p>	0.2	
	<p>Формула (45): $\frac{m}{2}(u_r^2 + u_\varphi^2) = eV$</p>	0.2	
	<p>Формула (46): $u_r = 0, \quad r = b, \quad V = V_0$</p>	0.2	
<p>Формула (47): $B = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}$</p>	0.2		
<p>Формула (48): $I_{\min} = \sqrt{\frac{8mV_0}{e}(1 + D^2/L^2)} \frac{L}{\mu_0 Nb}$</p>	0.2		
<p>Сандық мән формула (48): $I_{\min} = 701$</p>	0.2		
3.9	<p>Формула (49): $E_T = k_B T$</p>	0.2	0.8
	<p>Формула (50): $E_T \parallel E_0$</p>	0.2	
	<p>Формула (51): $T \parallel \frac{eE_0}{k_B}$</p>	0.2	

	Сандық мән формула (51): $T \approx K70 \cdot 10^5$	0.2	
Барлығы			10.0

SOLUTIONS TO THE PROBLEMS OF THE THEORETICAL COMPETITION

Attention. Points in grading are not divided!

Problem 1 (10.0 points)

Problem 1.1 (3.0 points)

It follows from the first law of thermodynamics that

$$\delta Q = dU + dA, \tag{1}$$

where δQ is the amount of heat supplied, dU is the change in internal energy, dA is the work done by the gas.

For one mole of an ideal gas, these quantities can be written in terms of a change in volume dV and temperature dT at a known pressure p in the following form

$$\delta A = pdV, \tag{2}$$

$$dU = C_v dT. \tag{3}$$

By definition of heat capacity, we have

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \tag{4}$$

then from relations (1)-(4) one obtains

$$p \frac{dV}{dT} = C - C_v, \tag{5}$$

at the molar heat capacity of a monatomic gas at a constant volume equal to

$$C_v = \frac{3}{2}R. \tag{6}$$

From the graph given in the problem statement, it can be seen that at a temperature

$$T_1^* = 350 \text{ K} \tag{7}$$

the heat capacity is $C = C_v$ and, accordingly, $\frac{dV}{dT} = 0$. When passing through this temperature, the derivative sign changes from plus to minus. This means that at this temperature the gas volume reaches a local maximum: $T_{\max} = T_1^* = 350 \text{ K}$.

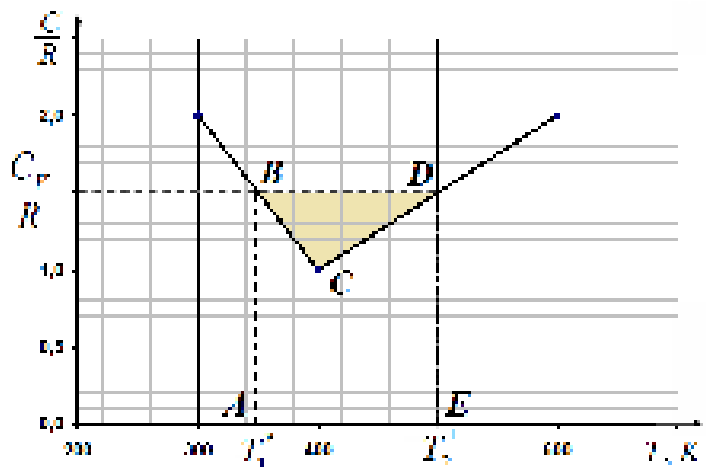
At a temperature

$$T_2^* = 500 \text{ K} \tag{8}$$

the derivative $\frac{dV}{dT}$ also equals zero, and when passing through this point, the sign of the derivative changes from minus to plus. This means that T_2^* is the point of the local minimum of the volume: $T_{\min} = T_2^* = 500 \text{ K}$.

In the section from $T_1^* = 350 \text{ K}$ to $T_2^* = 500 \text{ K}$, the gas receives heat Q , numerically equal to the area under the dependence $C(T)$, i.e. the area of the figure $ABCDE$. The change in internal energy $\Delta U = C_v(T_2^* - T_1^*)$ is numerically equal to the area of the rectangle $ABDE$.

According to the first law of thermodynamics, therefore, the work on the gas from T_1^* to T_2^* is numerically equal to the difference in the areas of the rectangle $ABDE$ and the figure $ABCDE$, i.e. area of the shaded figure BDC :



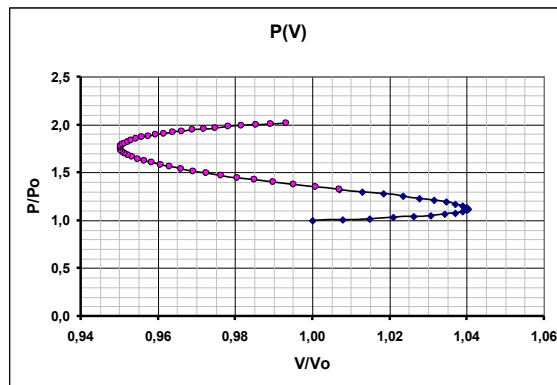
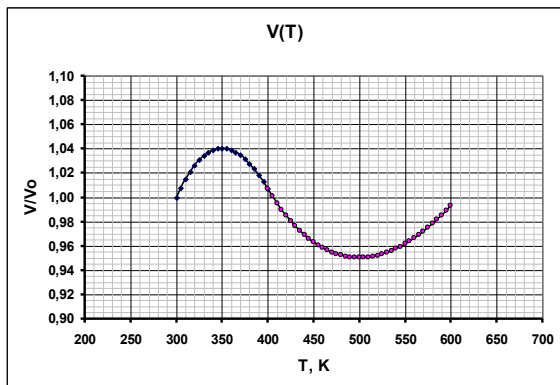
$$A = \frac{1}{4} R(T_{\max} - T_{\min}) = 312 \text{ J} . \tag{9}$$

Note: Exact dependence $V(T)$:

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{7/2} \exp\left(-\frac{T-T_1}{\Delta T_1}\right) , \text{ at } T_1 = 300 \text{ K} \leq T \leq T_0 = 400 \text{ K} \text{ and } \Delta T_1 = 100 \text{ K} ;$$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-5/2} \exp\left(\frac{T-T_0}{\Delta T_2}\right) , \text{ at } T_0 = 400 \text{ K} \leq T \leq T_2 = 600 \text{ K} \text{ and } \Delta T_2 = 200 \text{ K} .$$

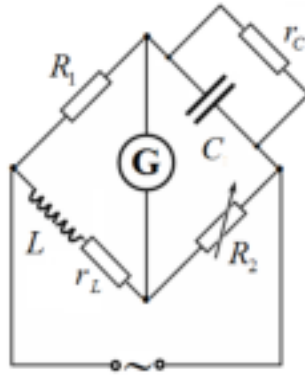
Dependences $V(T)$ and $P(V)$ in the process of gas heating are shown in the figures below.



Content	Points
Formula (1): $\delta Q = dU + dA$	0.2
Formula (2): $\delta A = p dV$	0.2
Formula (3): $dU = C_v dT$	0.2
Formula (4): $C = \frac{\delta Q}{dT}$	0.2
Formula (5): $p \frac{dV}{dT} = C - C_v$	0.4
Formula (6): $C_v = \frac{3}{2} R$	0.2
Formula (7): $T_1^* = 350 \text{ K}$	0.4
Formula (8): $T_2^* = 500 \text{ K}$	0.4
Formula (9): $A = \frac{1}{4} R(T_{\max} - T_{\min})$	0.4
Numerical value in formula (9): $A = 312 \text{ J}$	0.4
Total	3.0

Problem 1.2 (3.0 points)

The equivalent circuit of the bridge is shown in the figure below, which takes into account that the non-ideal inductance circuit is equivalent to an ideal coil L and resistor r_L connected in series, whereas the equivalent circuit of a leaky capacitor is a resistor r_C connected in parallel to an ideal capacitor C .



Solution 1. The bridge balance condition in complex numbers is written as

$$Z_L Z_C = R_1 R_2, \tag{1}$$

where the impedances are respectively

$$Z_L = r_L + i\omega L \tag{2}$$

and

$$Z_C = \frac{r_c}{1 + i\omega C r_c}. \tag{3}$$

After some transformation we get from expressions (1)-(3):

$$i\omega(L - R_1 R_2 C) = r_L - \frac{R_1 R_2}{r_c}. \tag{4}$$

While varying the frequency, this equality is not violated if both sides of the equation are equal to zero, therefore

$$C = \frac{L}{R_1 R_2} = 0.5 \mu\text{F}, \tag{5}$$

$$r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L} = 2 \text{ M}\Omega. \tag{6}$$

Solution 2. Let the voltage across the capacitor be

$$U_C = U_0 \cos \omega t, \tag{1}$$

then current through it is found as

$$I_C = -C\omega \sin \omega t, \tag{2}$$

and the current through its leakage resistance is

$$I_{r_c} = \frac{U_0 \cos \omega t}{r_c}. \tag{3}$$

The total current through the upper arm containing the capacitor is

$$I_1 = I_C + I_{r_c}, \tag{4}$$

and since the bridge is balanced, the same current flows through the resistance R_1 , therefore

$$U_{R_1} = I_1 R_1. \tag{5}$$

On the other hand, this voltage is equal to the voltage drop across the arm with the inductance

$$U_L = U_{R_1}, \tag{6}$$

for which the voltage drop is given by

$$U_L = L \frac{dI_2}{dt} + I_2 r_L, \tag{7}$$

in which the current is determined by the balance equation

$$I_2 = I_{R_2} = \frac{U_C}{R_2}. \tag{8}$$

since

$$U_{R_2} = U_C. \tag{9}$$

Collecting equations (1)-(9) together, we obtain

$$\left(-\frac{\omega L}{R_2} + C\omega R_1\right)U_0 \sin \omega t = \left(\frac{R_1}{r_c} - \frac{r_L}{R_2}\right)U_0 \cos \omega t. \quad (10)$$

It can be seen from this equality that the frequency-independent balance condition is satisfied if both sides of the equation are equal to zero, that is, one obtains the final answer

$$C = \frac{L}{R_1 R_2} = 0.5 \mu\text{F}, \quad (11)$$

$$r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L} = 2 \text{ M}\Omega. \quad (12)$$

Content	Points
Solution 1	
Equivalent circuit: All elements are correctly connected	0.5
Formula (1): $Z_L Z_C = R_1 R_2$	0.3
Formula (2): $Z_L = r_L + i\omega L$	0.3
Formula (3): $Z_C = \frac{r_c}{1 + i\omega C r_c}$	0.3
Formula (4): $i\omega(L - R_1 R_2 C) = r_L - \frac{R_1 R_2}{r_c}$	0.4
Formula (5): $C = \frac{L}{R_1 R_2}$	0.4
Numerical value in formula (5): $C = 0.5 \mu\text{F}$	0.2
Formula (6): $r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L}$	0.4
Numerical value in formula (6): $r_c = 2 \text{ M}\Omega$	0.2
Total	3.0
Solution 2	
Equivalent circuit: All elements are correctly connected	0.5
Formula (1): $U_C = U_0 \cos \omega t$	0.1
Formula (2): $I_C = -C\omega \sin \omega t$	0.1
Formula (3): $I_{r_c} = \frac{U_0 \cos \omega t}{r_c}$	0.1
Formula (4): $I_1 = I_C + I_{r_c}$	0.1
Formula (5): $U_{R_1} = I_1 R_1$	0.1
Formula (6): $U_L = U_{R_1}$	0.1
Formula (7): $U_L = \frac{dI_2}{dt} + I_2 r_L$	0.1
Formula (8): $I_2 = I_{R_2} = \frac{U_C}{R_2}$	0.1
Formula (9): $U_{R_2} = U_C$	0.1
Formula (10): $\left(-\frac{\omega L}{R_2} + C\omega R_1\right)U_0 \sin \omega t = \left(\frac{R_1}{r_c} - \frac{r_L}{R_2}\right)U_0 \cos \omega t$	0.4

Formula (11): $C = \frac{L}{R_1 R_2}$	0.4
Numerical value in formula (11): $C = 0.5 \mu\text{F}$	0.2
Formula (12): $r_C = \frac{R_1 R_2}{r_L}$	0.4
Numerical value in formula (12): $r_C = 2 \text{ M}\Omega$	0.2
Total	3.0

Problem 1.3 (4.0 points)

Let a planet of mass m move around the Sun in a circular orbit of radius R with a speed v , then the equation of motion of the planet in the projection onto the radial direction is written as

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM_S}{R^2}, \tag{1}$$

which results in

$$v = \sqrt{G \frac{M_S}{R}}, \tag{2}$$

with G being the gravitational constant.

Writing formula (2) for Jupiter with the index J and Earth with the index E , we get after dividing

$$\frac{v_J}{v_E} = \sqrt{\frac{R_E}{R_J}}, \tag{3}$$

and, on the other hand, we have according to Kepler's third law for the ratio of rotation periods

$$\frac{T_E^2}{T_J^2} = \frac{R_E^3}{R_J^3}. \tag{4}$$

The motion of Jupiter cannot be detected with a spectrometer, but it can be done for the Sun, since it also moves around the center of mass of the Sun-Jupiter system. The speed of the Sun is easy to find from the expression

$$v_S = v_J \frac{M_J}{M_S}. \tag{5}$$

Since the Sun moves around the common center of mass of the system, and the observer is located in the same plane, according to the Doppler effect formula, the following condition is satisfied for detection

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v_S}{c}. \tag{6}$$

Putting together equations (3)-(6), we get the final answer

$$R_{\min} = \frac{M_S}{M_J} \left(\frac{T_J}{T_E} \right)^{1/3} \frac{c}{2v_E} = 1.20 \cdot 10^7. \tag{7}$$

Such resolution is achievable for many modern spectrometers manufactured in different countries of the world.

Content	Points
Formula (1): $\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM_S}{R^2}$	0.2
Formula (2): $v = \sqrt{G \frac{M_S}{R}}$	0.2

Formula (3): $\frac{v_J}{v_E} = \sqrt{\frac{R_E}{R_J}}$	0.2
Formula (4): $\frac{T_E^2}{T_J^2} = \frac{R_E^3}{R_J^3}$	0.4
Formula (5): $v_S = v_J \frac{M_J}{M_S}$	1.0
Formula (6): $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v_S}{c}$	1.0
Formula (7): $R_{\min} = \frac{M_S}{M_J} \left(\frac{T_J}{T_E} \right)^{1/3} \frac{c}{2v_E}$	0.5
Numerical value in formula (7): $R_{\min} = 1.20 \cdot 10^7$	0.5
Total	4.0

Problem 2. Fermi acceleration (10.0 points)

Why are there more oncoming cars than overtaking cars?

2.1 Within the time period t , a car in lane **B** overtakes only those cars that are located at the distance no longer than

$$l = (v - (v - \Delta v))t = \Delta v t. \tag{1}$$

Therefore, the number of those cars is

$$N_1 = nl = n\Delta v t \approx 0.83. \tag{2}$$

The time between overtakes is found as

$$\tau_1 = \frac{1}{n\Delta v} = 0.02 \text{ h} = 72 \text{ s}. \tag{3}$$

2.2 Similar reasoning leads to the conclusion that the number of overtakes and the time between overtakes remain the same, i.e.

$$N_2 = nl = n\Delta v t \approx 0.83, \tag{4}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{n\Delta v} = 0.02 \text{ h} = 72 \text{ s}. \tag{5}$$

2.3 When driving towards oncoming cars, the number of cars and the time between two consecutive meetings are calculated by the formulas

$$N_{3,4} = n(v + (v \pm \Delta v))t = n(2v \pm \Delta v)t \tag{6}$$

$$\tau_{3,4} = \frac{1}{n(2v \pm \Delta v)}, \tag{6}$$

and numerical calculations give the following values

$$N_3 = 14.2; \quad \tau_3 = 4.2 \text{ s}; \tag{7}$$

$$N_4 = 15.8; \quad \tau_4 = 3.8 \text{ s}. \tag{7}$$

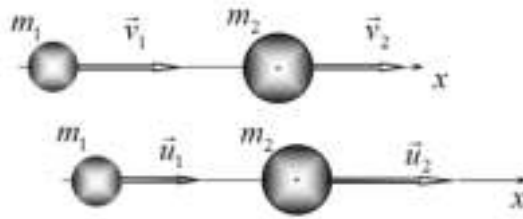
Elastic collision

2.4 Let us write down the momentum conservation law as

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{8}$$

together with the conservation of kinetic energy

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \tag{9}$$



Rewriting these equations in the following form

$$m_1 v_1 - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v_2 \tag{10}$$

$$m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2$$

and dividing then, yields the relation

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \tag{11}$$

From this equality, we express $u_2 = v_1 + u_1 - v_2$ and substitute it into the equation of conservation of momentum

$$(m_1 + m_2)u_1 = (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2, \tag{12}$$

from which it follows that

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2. \tag{13}$$

The speed of the second ball can be easily obtained by changing the indices "1" and "2" in formula (13)

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \tag{14}$$

2.5 Using formula (13), we obtain an explicit form of the dependence between the required parameters

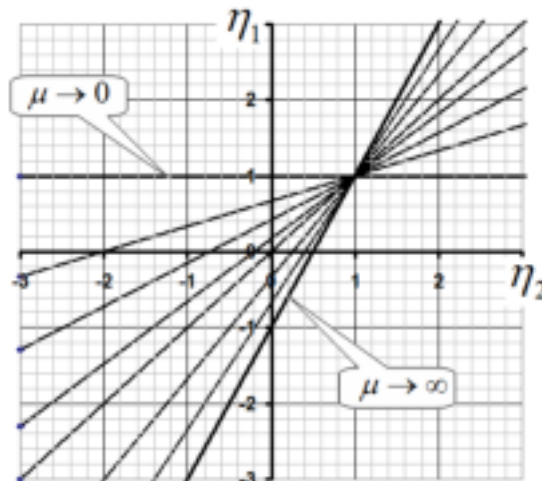
$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_2}{v_1} = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \frac{2 \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \tag{15}$$

$$\eta_1 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} + \frac{2\mu}{1 + \mu} \eta_2$$

As follows from the resulting expression, for any values of the mass ratio μ , the dependence is linear, i.e. its graph is a straight line. It is also not difficult to see that all these lines pass through the point $\eta_1 = 1; \eta_2 = 1$. When $\mu \rightarrow 0$, the slope coefficient tends to zero, that is, the dependence graph tends to a horizontal straight line $\eta_1 = 1$. At $\mu \rightarrow \infty$, the desired dependence tends to

$$\eta_1 = -1 + 2\eta_2. \tag{16}$$

The set of graphs of function (15) is shown in the figure below.



2.6 Кинетическая энергия шарика увеличится, если модуль скорости шарика после удара станет больше модуля скорости до удара, то есть при выполнении неравенств The kinetic energy of the ball increases if the modulus of its velocity after the collision becomes greater than the modulus of its velocity before the collision, that is, if the following inequalities are fulfilled

$$|\eta_1| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 > 1 \\ \eta_1 < -1 \end{cases} \quad (17)$$

Substituting expression (15) for the quantity η_1 , we obtain the following two inequalities

$$\begin{cases} \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu} \eta_2 > 1 \\ \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu} \eta_2 < -1 \end{cases} \quad (18)$$

The solutions of these inequalities are the following relations:

a)

$$\eta_2 > 1, \quad (19)$$

that is, to fulfill this condition, the second ball must catch up with the first one;;

b)

$$\eta_2 < -\frac{1}{\mu}, \quad (20)$$

in this case, the second ball must move towards the first one and the modulus of its velocity must exceed the above specified value.

2.7 In the limiting case $m_2 \gg m_1$, the speed of the first ball after the collision is

$$\tilde{u}_1 = -v_1 + 2v_2, \quad (21)$$

that is, the speed of the first ball changes sign (the ball is reflected) and its modulus changes to twice the speed of the second, heavy ball.

The light ball increases its speed, and, consequently, its kinetic energy, if:

a) the heavy ball catches up with the light ball (hit from behind) $v_2 > 1$;

б) the heavy ball moves towards the light ball $v_2 < 0$.

The simplest Fermi acceleration model

2.8 We write the law of motion of the plate in the traditional form

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad (22)$$

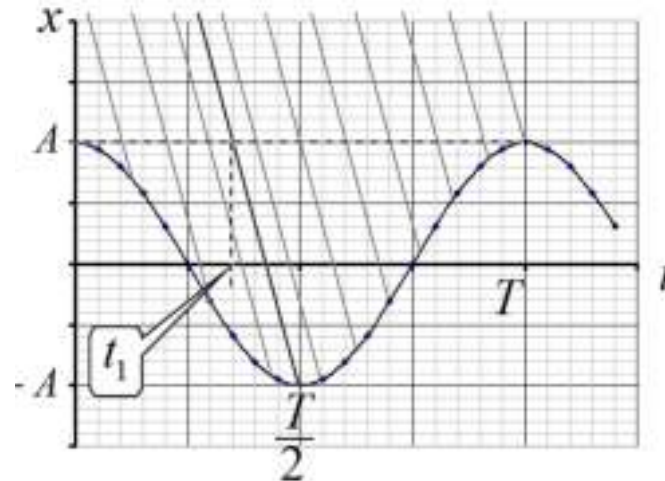
then the dependence of the velocity on time is described by the function

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t), \quad (23)$$

thus, the maximum speed of the platform is

$$V_0 = A\omega = 2\pi \frac{A}{T}. \quad (24)$$

2.9 To answer the question posted, it is enough to consider one period of plate oscillations. Let us plot the dependence of the plate coordinates on time (22) and plot on the same graph the dependences of the incoming particle coordinates on time, which are straight lines $x = x_0 - ut$.



The figure shows the case $u > V_0$. As a result of the collision, balls that collide with the plate increase their speed at those time moments when the plate moves towards the positive direction of the axis, while collisions must occur in the time interval from $\frac{T}{2}$ to T . However, the collision times are not randomly and uniformly distributed, but the times of approach to the plate itself are uniformly distributed, so we consider a plane $x = A$, the times of approach to which are equally probable. Let us draw a straight line that describes the law of motion of a ball colliding with the plate at the moment of time $t = \frac{T}{2}$ (the thick line in the figure). Let us denote t_1 as the moment of time when this ball crosses the plane $x = A$. Balls that collide with the plate after this moment of time increase their speed and energy. But these balls cross the plane in the time interval from t_1 to T , so the fraction of these particles is obtained as

$$\eta = \frac{T - t_1}{T}. \tag{25}$$

The moment of time t_1 is easy to find from the law of the ball motion

$$t_1 = \frac{T}{2} - \frac{2A}{u}, \tag{26}$$

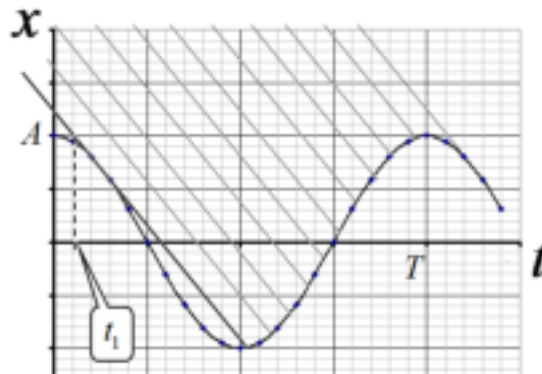
then the fraction of accelerated particles is equal to

$$\eta = \frac{T - t_1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2A}{uT} = \frac{1}{2} + \frac{V_0}{\pi u}. \tag{27}$$

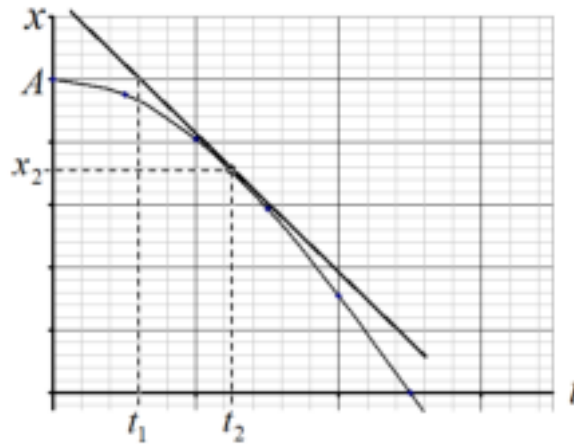
Here we use the relation that follows from formula (24): $\frac{2A}{T} = \frac{V_0}{\pi}$. Substituting the specified numerical value $u = 1.5V_0$, we get:

$$\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.5\pi} \approx 0.71. \tag{28}$$

A somewhat different situation is realized at $u < V_0$, which is shown in the figure below.



In this case, the "border time" t_1 between accelerated and decelerated balls is determined by a straight line, which is tangent to the graph of the plate law of motion, as shown in the figure below.



When the graphs of two functions touch at the moment of time t_2 , the values of both functions themselves and their derivatives, that is, the speeds of the plate and the ball, coincide, therefore

$$-A\omega \sin(\omega t_2) = -u, \tag{29}$$

which gives rise to

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{u}{A\omega} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{u}{V_0}. \tag{30}$$

$$x_2 = A \cos \omega t_2 = A \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_2} = A \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}}. \tag{31}$$

These expressions allow us to determine the time of approach to the plane $x = A$

$$t_1 = t_2 - \frac{A - x_2}{u} = \frac{T}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right). \tag{32}$$

The ratio of this time to the oscillation period determines the fraction of particles that collide with the plate, catching it up, such that their energy decreases:

$$1 - \eta = \frac{1}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right) \approx 0.04, \tag{33}$$

therefore, the fraction of balls whose energy increases after the collision is equal to

$$\eta \approx 0.96. \tag{34}$$

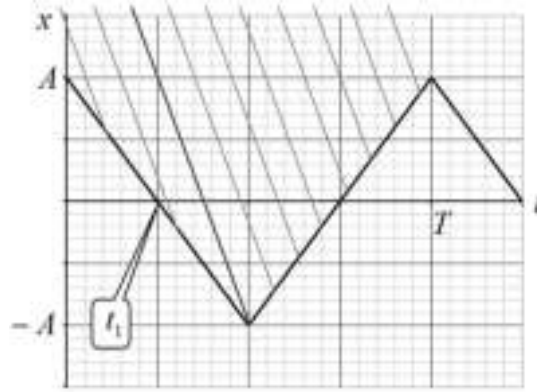
2.10 In one period of oscillation, the plate travels a path $4A$, so the modulus of its speed is equal to

$$V = \frac{4A}{T}. \tag{35}$$

2.11 When the ball speed is greater than the platform speed, the proportion of balls that increase their energy as a result of the collision is calculated by a formula similar to formula (27):

$$\eta = \frac{T - t_1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2A}{uT} = \frac{1}{2} + \frac{V}{2u}, \tag{36}$$

and the corresponding figure is shown below.



Since the modulus of the plate velocity is assumed to be constant, the ball velocity modulus after the impact becomes equal to

$$u_+ = u + 2V. \tag{37}$$

The velocities of balls that collide with the plate in the time interval from 0 to t_1 , are equal to

$$u_- = u - 2V. \tag{38}$$

Thus, the average ball energy after the collision becomes equal to

$$\begin{aligned} E &= \eta \frac{mu_+^2}{2} + (1-\eta) \frac{mu_-^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{V}{2u} \right) (u + 2V)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{V}{2u} \right) (u - 2V)^2 \right) = \\ &= \frac{mu^2}{4} \left(\left(1 + \frac{V}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2 + \left(1 - \frac{V}{u} \right) \left(1 - 2 \frac{V}{u} \right)^2 \right) = \frac{mu^2}{2} \left(1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2 \right) \end{aligned} \tag{39}$$

and, consequently, the increase in the average energy is equal to

$$\varepsilon = 1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2 \approx 4.6. \tag{40}$$

If the speed of the balls is less than the speed of the plate, then all the balls collide with the plate when it moves in the opposite direction, so all the balls increase their speed and energy. After the collision, the particle velocities become equal $u_+ = u + 2V$, and their energy

$$E = \frac{m}{2} (u + 2V)^2 = \frac{mu^2}{2} \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2, \tag{41}$$

and, consequently, the ratio of the ball energies after and before the collision is equal to

$$\varepsilon = \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2 = 25.0. \tag{42}$$

	Content	Points	
2.1	Formula (2): $N_1 = n\Delta vt$	0.1	0.4
	Numerical value in formula (2): $N_1 \approx 0.83$	0.1	
	Formula (3): $\tau_1 = \frac{1}{n\Delta v}$	0.1	
	Numerical value in formula (3): $\tau_1 = 0.02 \text{ h} = 72 \text{ s}$	0.1	
2.2	Formula (4): $N_2 = n\Delta vt$	0.1	0.4
	Numerical value in formula (4): $N_2 \approx 0.83$	0.1	
	Formula (5): $\tau_2 = \frac{1}{n\Delta v}$	0.1	
	Numerical value in formula (5): $\tau_2 = 0.02 \text{ h} = 72 \text{ s}$	0.1	

2.3	$N_{3,4} = n(2v \pm \Delta v)t$ Formulas (6): $\tau_{3,4} = \frac{1}{n(2v \pm \Delta v)}$	0.4	0.8
	Numerical values in formula (7): $N_3 = 14.2; \quad \tau_3 = 4.2 \text{ s};$ $N_3 = 15.8; \quad \tau_3 = 3.8 \text{ s}.$	0.4	
2.4	Formula (8): $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$	0.1	0.6
	Formula (9): $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$	0.1	
	Formula (13): $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2$	0.2	
	Formula (14): $u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$	0.2	
2.5	Formula (15): $\eta_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu}\eta_2$	0.2	1.6
	There are only straight lines on the graph, otherwise the graph is not graded	0.2	
	All lines pass through the point $\eta_1 = 1; \eta_2 = 1$	0.4	
	There is a straight line $\eta_1 = 1$	0.2	
	There is a straight line $\eta_1 = -1 + 2\eta_2$	0.4	
	All lines are located in between $\eta_1 = 1$ and $\eta_1 = -1 + 2\eta_2$	0.2	
2.6	Inequalities (7): $ \eta_1 > 1 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 > 1 \\ \eta_1 < -1 \end{cases}$	0.2	0.4
	Inequality (19): $\eta_2 > 1$	0.1	
	Inequality (20): $\eta_2 < -\frac{1}{\mu}$	0.1	
2.7	Formula (21): $\tilde{u}_1 = -v_1 + 2v_2$	0.1	0.3
	Inequality a): $v_2 > 1$	0.1	
	Inequality b): $v_2 < 0$	0.1	
2.8	Formula (22): $x(t) = A \cos(\omega t)$	0.1	0.4
	Formula (23): $v(t) = -A\omega \sin(\omega t)$	0.1	
	Formula (24): $V_0 = A\omega = 2\pi \frac{A}{T}$	0.2	
2.9	Formula (25): $\eta = \frac{T - t_1}{T}$	0.3	2.7
	Formula (26): $t_1 = \frac{T}{2} - \frac{2A}{u}$	0.3	
	Formula (27): $\eta = \frac{1}{2} + \frac{V_0}{\pi u}$	0.3	
	Numerical value in formula (28): $\eta \approx 0.71$	0.3	
	Formula (29): $-A\omega \sin(\omega t_2) = -u$	0.2	
	Formula (30): $t_2 = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{u}{V_0}$	0.2	

	Formula (31): $x_2 = A\sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}}$	0.3	
	Formula (32): $t_1 = \frac{T}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right)$	0.3	
	Formula (33): $1 - \eta = \frac{1}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right)$	0.3	
	Numerical value in formula (34): $\eta \approx 0.96$	0.2	
2.10	Formula (35): $V = \frac{4A}{T}$	0.2	0.2
2.11	Formula (36): $\eta = \frac{1}{2} + \frac{V}{2u}$	0.3	2.2
	Formula (37): $u_+ = u + 2V$	0.2	
	Formula (38): $u_- = u - 2V$	0.2	
	Formula (39): $E = \eta \frac{mu_+^2}{2} + (1 - \eta) \frac{mu_-^2}{2}$	0.3	
	Formula (40): $\varepsilon = 1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2$	0.3	
	Numerical value in formula (40): $\varepsilon \approx 4.6$	0.2	
	Formula (41): $E = \frac{m}{2} (u + 2V)^2$	0.2	
	Formula (42): $\varepsilon = \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2$	0.3	
	Numerical value in formula (42): $\varepsilon = 25.0$	0.2	
Total			10.0

Problem 3. Magnetron

Electron motion in electric and magnetic fields

3.1 Under the action of a uniform electric field, an electron moves with a constant acceleration

$$a = \frac{eE}{m}, \tag{1}$$

which is directed in the negative direction of the x axis, so the maximum value of the achieved coordinate is determined by the expression

$$x_{\max} = \frac{u_0^2}{2a} = \frac{mu_0^2}{2eE}. \tag{2}$$

3.2 When moving in a uniform magnetic field, the Lorentz force acts on an electron, equal to

$$F_L = eu_0B. \tag{3}$$

and it moves in a circle whose radius R is determined from Newton's second law

$$m \frac{u_0^2}{R} = F_L, \tag{4}$$

which yields

$$R = \frac{mu_0}{eB}. \tag{5}$$

It is obvious that the maximum value of the coordinate in this case is equal to

$$x_{\max} = R = \frac{mu_0}{eB}. \quad (6)$$

3.3 The problem is most easily solved in the laboratory reference frame, in which the electron moves along the circle with the frequency determined by formula (5) in the form

$$\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{eB}{m}. \quad (7)$$

When an electron is given a small additional speed, it begins to move along a circle that is close to the original one and intersects with it at two diametrically opposite points, which can be considered as motion along a closed two-dimensional trajectory with the period

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (8)$$

3.4 В момент, когда координата x максимальна, скорость частицы u направлена вдоль оси z и по закону сохранения энергии равна At the moment when the coordinate x is maximum, the particle velocity u is directed along the z axis and, according to the law of conservation of energy, is equal to

$$eEx_{\max} = \frac{mu^2}{2}. \quad (9)$$

In the projection onto the z axis, the equation of motion is written in finite differences in the form

$$m \frac{\Delta u_z}{\Delta t} = eBu_x, \quad (10)$$

which, with account of $\Delta x = u_x \Delta t$, leads to the relation

$$m\Delta u_z = eB\Delta x, \quad (11)$$

which for the time moment sought takes the form

$$mu = eBx_{\max}. \quad (12)$$

Solving equations (9) and (12) simultaneously, we finally obtain

$$x_{\max} = \frac{2mE}{eB^2}, \quad (13)$$

3.5 Since the magnetic field does not perform any work, the electron velocity remains constant in absolute value and equal to its initial value

$$u = u_0 = \text{const}. \quad (14)$$

Let us divide the total velocity into radial $u_r = dr/dt$ and $u_\varphi = rd\varphi/dt$ azimuthal components. The angular momentum of the electron relative to the origin is obviously equal to

$$L = mru_\varphi, \quad (15)$$

and the torque of the Lorentz force about the same point is

$$M = eBu_r r. \quad (16)$$

According to the moment equation, we have

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (17)$$

which together with the use of $u_r = dr/dt$ provides to the relation

$$d(mru_\varphi) = e\alpha r^2 dr. \quad (18)$$

At the moment of time when the distance to the z axis is maximum, the radial velocity vanishes, and the azimuthal velocity is equal to the initial one in accordance with formula (14), so the integration of relation (18) leads to the equation

$$mr_{\max} u_0 = e\alpha \frac{r_{\max}^3}{3}, \quad (19)$$

which finally gives rise to

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3mu_0}{e\alpha}}. \quad (20)$$

3.6 Since the electron moves all the time along a circle, then, according to equation (5), with an increase in the magnetic field B_0 at its orbit, the derivative of the momentum changes according to the law

$$\frac{dp}{dt} = er \frac{dB_0}{dt}. \quad (21)$$

The electron is set in motion due to the vortex electric field, whose strength E is determined by the relation

$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (22)$$

which, according to the Faraday law, includes the flux of magnetic induction through the electron orbit, equal to

$$\Phi = \int_0^r B(r) 2\pi r dr. \quad (23)$$

The equation of Newton's second law for the acceleration of an electron in orbit has the form

$$\frac{dp}{dt} = eE. \quad (24)$$

The joint solution of equations (21)-(24) leads to the following equality for the magnetic field, which is called the cyclotron condition

$$\int_0^r B(r) 2\pi r dr = 2\pi r^2 B_0. \quad (25)$$

From formula (25) we conclude that its satisfaction is possible only in the case when the electron moves in the region of a magnetic field with induction $B_0 = B_2$, therefore, integrating the magnetic induction given in the formulation as a function of distance, we obtain the relation

$$B_1 \pi r_1^2 + B_2 \pi (r^2 - r_1^2) = 2\pi r^2 B_2, \quad (26)$$

whose solution has the following form

$$\frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{r^2}{r_1^2}. \quad (27)$$

The motion of an electron in a circle is possible only in the area in which the induction is equal B_2 , that is, at $r_1 < r < r_2$, which means that the ratio sought must lie in the interval

$$2 < \frac{B_1}{B_2} < 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (28)$$

Cylindrical magnetron

3.7 Let the unit length of the cylindrical cathode and anode have a charge equal to λ , and the total length of the electrodes is l . Then, according to the Gauss theorem, the electric field strength in the space between the cathode and anode is determined by the equation

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, \quad (29)$$

which immediately yields

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (30)$$

Here r stands for the distance to the magnetron axes.

The dependence of the potential difference on the distance r , by definition, is written as an integral

$$V = \int_a^r E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}, \quad (31)$$

which in particular for $r = b$ gives rise to

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (32)$$

Solving equations (31) and (32) together, we obtain

$$V = V_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} = 57.6 \text{ V.} \quad (33)$$

3.8 Рассмотрим тонкое кольцо радиуса R , по которому протекает ток j , и рассчитаем величину магнитной индукции в точке на оси кольца, отстоящей от его центра на расстоянии z . Разобьем кольцо на малые элементы dl , тогда магнитная индукция определяется следующим законом Био-Саварра Consider a thin ring of radius R , through which the current j flows, and calculate the magnitude of the magnetic induction at a point on the axis of the ring, which is located at a distance z from its center. Let us divide the ring into small elements dl , then the magnetic induction is determined by the following Biot-Savart law

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (34)$$

in which the vector \vec{r} is drawn from the location of the current element dl to the point O where the magnetic induction is sought.

It follows from geometric relations that

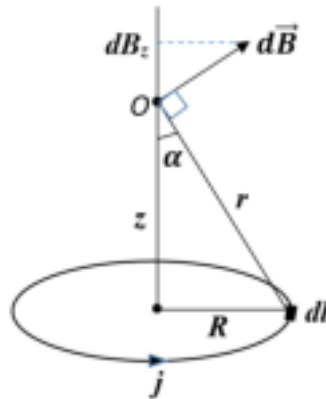
$$d\vec{l} \times \vec{r} = dl \cdot r \cdot \sin \alpha, \quad (35)$$

and since the resulting magnetic induction is directed along the axis of the ring

$$dB_z = dB \sin \alpha, \quad (36)$$

then, using the geometric relation $R = r \sin \alpha$, we finally obtain

$$dB_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{R dl}{r^3}. \quad (37)$$



Considering that the distances included in formula (37) are constant and

$$r^2 = R^2 + z^2, \quad (38)$$

then after summing over all elements of the ring one finds

$$B_z = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (39)$$

Let us now calculate the magnetic field induction at the center of the solenoid, since this is where the magnetron lamp is located. To do this, consider the turns located at a distance from the center from z to $z + dz$, through which the current flows

$$dj = \frac{NI}{L} dz. \quad (40)$$

These turns can be considered as a ring, whose magnetic induction is determined by formula (39), such that

$$dB = \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz, \quad (41)$$

which after integration gives the final expression

$$B = \frac{\mu_0 NIR^2}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{L\sqrt{1 + D^2/L^2}}, \quad (42)$$

where the expression $D = 2R$ is used for the diameter.

For the motion of electrons in a magnetron, a formula is valid that is similar to formula (18) and has the form

$$d(mru_\phi) = eBrdr, \tag{43}$$

whose integration under the conditions of constant magnetic induction and $a \ll b$ gives

$$mru_\phi = \frac{1}{2} eBr^2. \tag{44}$$

On the other hand, it follows from the law of conservation of energy that

$$\frac{m}{2}(u_r^2 + u_\phi^2) = eV. \tag{45}$$

At the moment when the critical value of the current is reached, the magnetic induction near the anode becomes such that the radial velocity of the electrons vanishes, which leads to the conditions

$$u_r = 0, \quad r = b, \quad V = V_0, \tag{46}$$

which, using expressions (44) and (45), results in the critical value of the magnetic field

$$B = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}. \tag{47}$$

Using formula (42), we find the corresponding current in the solenoid

$$I_{\min} = \sqrt{\frac{8mV_0}{e}}(1 + D^2/L^2) \frac{L}{\mu_0 Nb} = 0,701 \text{ A}. \tag{48}$$

3.9 The initial energy of electrons in a lamp near the cathode is determined by the temperature of the cathode itself and is on the order of

$$E_T = k_B T. \tag{49}$$

This energy is obviously must be much less than the energy of electrons near the anode, i.e.

$$E_T \ll E_0, \tag{50}$$

where $E_0 = eV_0$, whence we obtain the desired estimate

$$T \ll \frac{eE_0}{k_B} = 8.70 \cdot 10^5 \text{ K}, \tag{51}$$

which actually means the applicability of the approximation used, since the cathode temperature is usually at least two orders of magnitude lower.

		Content	Points	
3.1	Formula (1): $a = \frac{eE}{m}$		0.1	0.2
	Formula (2): $x_{\max} = \frac{mu_0^2}{2eE}$		0.1	
3.2	Formula (3): $F_L = eu_0B$		0.1	0.4
	Formula (4): $m \frac{u_0^2}{R} = F_L$		0.1	
	Formula (5): $R = \frac{mu_0}{eB}$		0.1	
	Formula (6): $x_{\max} = R = \frac{mu_0}{eB}$		0.1	
3.3	Formula (7): $\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{eB}{m}$		0.2	0.4
	Formula (8): $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$		0.2	

3.4	Formula (9): $eEx_{\max} = \frac{mu^2}{2}$	0.2	1.0
	Formula (10): $m \frac{\Delta u_z}{\Delta t} = eBu_x$	0.2	
	Formula (11): $m\Delta u_z = eB\Delta x$	0.2	
	Formula (12): $mu = eBx_{\max}$	0.2	
	Formula (13): $x_{\max} = \frac{2mE}{eB^2}$	0.2	
3.5	Formula (14): $u = u_0 = const$	0.2	1.4
	Formula (15): $L = mru_\phi$	0.2	
	Formula (16): $M = eBu_r r$	0.2	
	Formula (17): $\frac{dL}{dt} = M$	0.2	
	Formula (18): $d(mru_\phi) = e\alpha r^2 dr$	0.2	
	Formula (19): $mr_{\max} u_0 = e\alpha \frac{r_{\max}^3}{3}$	0.2	
	Formula (20): $r_{\max} = \sqrt{\frac{3mu_0}{e\alpha}}$	0.2	
3.6	Formula (21): $\frac{dp}{dt} = er \frac{dB_0}{dt}$	0.2	1.6
	Formula (22): $E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}$	0.2	
	Formula (23): $\Phi = \int_0^r B(r)2\pi r dr$	0.2	
	Formula (24): $\frac{dp}{dt} = eE$	0.2	
	Formula (25): $\int_0^r B(r)2\pi r dr = 2\pi r^2 B_0$	0.2	
	Formula (26): $B_1\pi r_1^2 + B_2\pi(r^2 - r_1^2) = 2\pi r^2 B_2$	0.2	
	Formula (27): $\frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{r^2}{r_1^2}$	0.2	
	Formula (28): $2 < \frac{B_1}{B_2} < 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}$	0.2	
3.7	Formula (29): $E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$	0.1	1.0
	Formula (30): $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	0.1	
	Formula (31): $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$	0.2	
	Formula (32): $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$	0.2	

	Formula (33): $V = V_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$	0.2	
	Numerical value in formula (33): $V = 57.6 \text{ V}$	0.2	
3.8	Formula (34): $d\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$	0.2	3.2
	Formula (35): $d\vec{l} \times \vec{r} = dl \cdot \vec{r}$	0.2	
	Formula (36): $dB_z = dB \sin \alpha$	0.2	
	Formula (37): $dB_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{R dl}{r^3}$	0.2	
	Formula (38): $r^2 = R^2 + z^2$	0.2	
	Formula (39): $B_z = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	0.2	
	Formula (40): $dj = \frac{NI}{L} dz$	0.2	
	Formula (41): $dB = \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz$	0.2	
	Formula (42): $B = \frac{\mu_0 NI}{L\sqrt{1 + D^2/L^2}}$	0.2	
	Formula (43): $d(mru_\varphi) = eBrdr$	0.2	
	Formula (44): $mru_\varphi = \frac{1}{2} eBr^2$	0.2	
	Formula (45): $\frac{m}{2}(u_r^2 + u_\varphi^2) = eV$	0.2	
	Formula (46): $u_r = 0, \quad r = b, \quad V = V_0$	0.2	
	Formula (47): $B = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}$	0.2	
Formula (48): $I_{\min} = \sqrt{\frac{8mV_0}{e}(1 + D^2/L^2)} \frac{L}{\mu_0 Nb}$	0.2		
	Numerical value in formula (48): $I_{\min} = 0,701 \text{ A}$	0.2	
3.9	Formula (49): $E_T = k_B T$	0.2	0.8
	Formula (50): $E_T \ll E_0$	0.2	
	Formula (51): $T \ll \frac{eE_0}{k_B}$	0.2	
		Numerical value in formula (51): $T \ll 8.70 \cdot 10^5 \text{ K}$	
Total			10.0

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА**Внимание: баллы в оценках не делятся!****Задача 1 (10.0 балла)****Задача 1.1 (4.0 балла)**

Из первого начала термодинамики следует, что

$$\delta Q = dU + dA, \quad (1)$$

где δQ представляет собой количество подводимого тепла, dU – изменение внутренней энергии, dA – совершенная газом работа.

Для одного моля идеального газа можно записать эти величины через изменение объема dV и температуры dT при известном давлении p в следующем виде

$$\delta A = pdV, \quad (2)$$

$$dU = C_V dT. \quad (3)$$

По определению теплоемкости имеем

$$C = \frac{\delta Q}{dT}, \quad (4)$$

тогда из соотношений (1)-(4) получаем

$$p \frac{dV}{dT} = C - C_V, \quad (5)$$

при молярной теплоемкости одноатомного газа при постоянном объеме равной

$$C_V = \frac{3}{2} R. \quad (6)$$

Из приведенного в условии графика видно, что при температуре

$$T_1^* = 350 \text{ К} \quad (7)$$

теплоемкость $C = C_V$ и, соответственно, $\frac{dV}{dT} = 0$. При переходе через эту температуру знак

производной $\frac{dV}{dT}$ изменяется с плюса на минус. Значит, при этой температуре объём газа достигает

локального максимума: $T_{\max} = T_1^* = 350 \text{ К}$.

При температуре

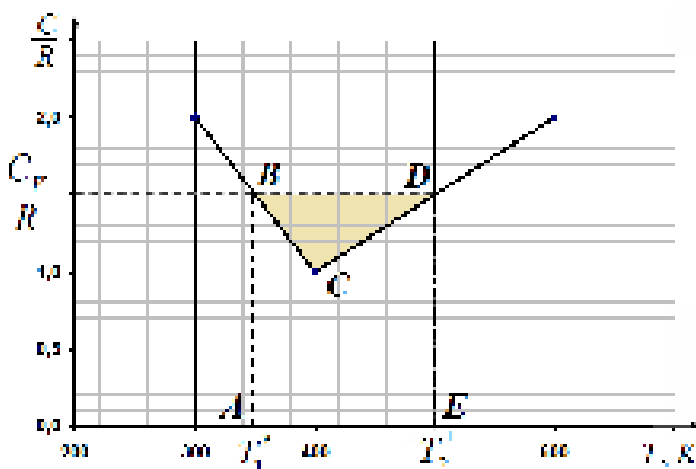
$$T_2^* = 500 \text{ К} \quad (8)$$

производная $\frac{dV}{dT}$ также равняется нулю, а при

переходе через эту точку знак ее производной изменяется с минуса на плюс. Это означает, что T_2^* является точкой локального минимума объёма: $T_{\min} = T_2^* = 500 \text{ К}$.

На участке от $T_1^* = 350 \text{ К}$ до $T_2^* = 500 \text{ К}$ газ получает теплоту Q , численно равную площади под зависимостью $C(T)$, то есть площади фигуры $ABCDE$. Изменение внутренней энергии $\Delta U = C_V(T_2^* - T_1^*)$ численно равно площади прямоугольника

$ABDE$. По первому началу термодинамики $A = \Delta U - Q$, поэтому работа над газом от T_1^* до T_2^* численно равна разности площадей прямоугольника $ABDE$ и фигуры $ABCDE$, т.е. площади заштрихованной фигуры BDC :



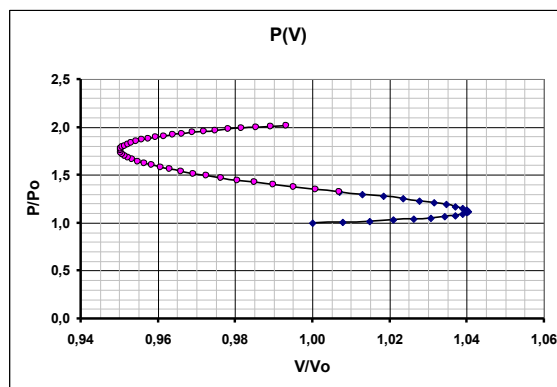
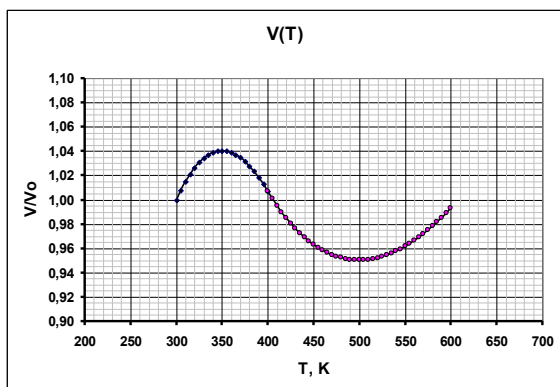
$$A = \frac{1}{4} R(T_2^* - T_1^*) = 312 \text{ Дж.} \quad (9)$$

Дополнение: Явная зависимость $V(T)$:

$$\frac{V}{V_1} = \left(\frac{T}{T_1}\right)^{7/2} \exp\left(-\frac{T-T_1}{\Delta T_1}\right), \text{ при } T_1 = 300 \text{ К} \leq T \leq T_0 = 400 \text{ К} \text{ и } \Delta T_1 = 100 \text{ К};$$

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-5/2} \exp\left(\frac{T-T_0}{\Delta T_2}\right), \text{ при } T_0 = 400 \text{ К} \leq T \leq T_2 = 600 \text{ К} \text{ и } \Delta T_2 = 200 \text{ К}.$$

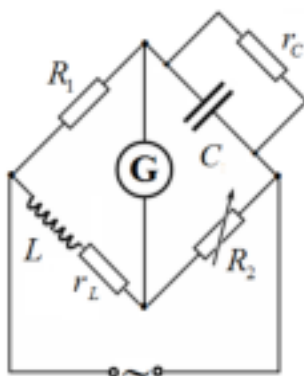
Зависимости $V(T)$ и $P(V)$ в процессе нагрева газа показаны на рисунках ниже.



Содержание	Баллы
Формула (1): $\delta Q = dU + dA$	0.2
Формула (2): $\delta A = p dV$	0.2
Формула (3): $dU = C_v dT$	0.2
Формула (4): $C = \frac{\delta Q}{dT}$	0.2
Формула (5): $p \frac{dV}{dT} = C - C_v$	0.4
Формула (6): $C_v = \frac{3}{2} R$	0.2
Формула (7): $T_1^* = 350 \text{ К}$	0.4
Формула (8): $T_2^* = 500 \text{ К}$	0.4
Формула (9): $A = \frac{1}{4} R(T_2^* - T_1^*)$	0.4
Численное значение в формуле (9): $A = 312 \text{ Дж}$	0.4
Итого	3.0

Задача 1.2 (3.0 балла)

Эквивалентная схема моста показана на рисунке ниже, на котором учтено, что эквивалентная схема неидеальной индуктивности – это последовательно соединенные идеальная катушка L и резистор r_L ; эквивалентная схема конденсатора с утечкой – это резистор r_C параллельно подсоединённый к идеальному конденсатору C .



Решение 1. Условие баланса моста в комплексных числах записывается в виде

$$Z_L Z_C = R_1 R_2, \tag{1}$$

где импедансы равны соответственно

$$Z_L = r_L + i\omega L \tag{2}$$

и

$$Z_C = \frac{r_C}{1 + i\omega C r_C}. \tag{3}$$

После преобразований из выражений (1)-(3) получаем:

$$i\omega(L - R_1 R_2 C) = r_L - \frac{R_1 R_2}{r_C}. \tag{4}$$

При изменении частоты это равенство не нарушается, если обе части уравнения равны нулю, поэтому

$$C = \frac{L}{R_1 R_2} = 0.5 \text{ мкФ}, \tag{5}$$

$$r_C = \frac{R_1 R_2}{r_L} = 2 \text{ МОм}. \tag{6}$$

Решение 2. Пусть напряжение на конденсаторе равно

$$U_C = U_0 \cos \omega t, \tag{1}$$

тогда через него протекает ток

$$I_C = -C U_0 \omega \sin \omega t, \tag{2}$$

а ток через его сопротивление утечки составляет

$$I_{r_C} = \frac{U_0 \cos \omega t}{r_C}. \tag{3}$$

Полный ток через плечо, содержащее конденсатор, равен

$$I_1 = I_C + I_{r_C}, \tag{4}$$

а так как мост сбалансирован, то такой же ток идёт через сопротивление R_1 , поэтому

$$U_{R_1} = I_1 R_1. \tag{5}$$

С другой стороны, это напряжение равно падению напряжения на плече с индуктивностью

$$U_L = U_{R_1}, \tag{6}$$

для которой падение напряжения определяется выражением

$$U_L = L \frac{dI_2}{dt} + I_2 r_L, \tag{7}$$

в котором ток определяется уравнением балланса

$$I_2 = I_{R_2} = \frac{U_C}{R_2}. \tag{8}$$

так как

$$U_{R_2} = U_C. \tag{9}$$

Собирая совместно уравнения (1)-(9), получаем

$$\left(-\frac{\omega L}{R_2} + C\omega R_1\right)U_0 \sin \omega t = \left(\frac{R_1}{r_c} - \frac{r_L}{R_2}\right)U_0 \cos \omega t. \quad (10)$$

Из этого равенства видно, что условие баланса, независящего от частоты, выполняется, если обе части уравнения равны нулю, то есть получаем ответ

$$C = \frac{L}{R_1 R_2} = 0.5 \text{ мкФ}, \quad (11)$$

$$r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L} = 2 \text{ МОм}. \quad (12)$$

Содержание	Баллы
Решение 1	
Эквивалентная схема: все элементы расположены правильно	0.5
Формула (1): $Z_L Z_C = R_1 R_2$	0.3
Формула (2): $Z_L = r_L + i\omega L$	0.3
Формула (3): $Z_C = \frac{r_c}{1 + i\omega C r_c}$	0.3
Формула (4): $i\omega(L - R_1 R_2 C) = r_L - \frac{R_1 R_2}{r_c}$	0.4
Формула (5): $C = \frac{L}{R_1 R_2}$	0.4
Численное значение в формуле (5): $C = 0.5 \text{ мкФ}$	0.2
Формула (6): $r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L}$	0.4
Численное значение в формуле (6): $r_c = 2 \text{ МОм}$	0.2
Итого	3.0
Решение 2	
Эквивалентная схема: все элементы расположены правильно	0.5
Формула (1): $U_C = U_0 \cos \omega t$	0.1
Формула (2): $I_C = -C U_0 \omega \sin \omega t$	0.1
Формула (3): $I_{r_c} = \frac{U_0 \cos \omega t}{r_c}$	0.1
Формула (4): $I_1 = I_C + I_{r_c}$	0.1
Формула (5): $U_{R_1} = I_1 R_1$	0.1
Формула (6): $U_L = U_{R_1}$	0.1
Формула (7): $U_L = \frac{dI_2}{dt} + I_2 r_L$	0.1
Формула (8): $I_2 = I_{R_2} = \frac{U_C}{R_2}$	0.1
Формула (9): $U_{R_2} = U_C$	0.1
Формула (10): $\left(-\frac{\omega L}{R_2} + C\omega R_1\right)U_0 \sin \omega t = \left(\frac{R_1}{r_c} - \frac{r_L}{R_2}\right)U_0 \cos \omega t$	0.4

Формула (11): $C = \frac{L}{R_1 R_2}$	0.4
Численное значение в формуле (11): $C = 0.5$ мкФ	0.2
Формула (12): $r_c = \frac{R_1 R_2}{r_L}$	0.4
Численное значение в формуле (12): $r_c = 2$ МОм	0.2
Итого	3.0

Задача 1.3 (4.0 балла)

Пусть планета массы m движется вокруг Солнца по круговой орбите радиуса R со скоростью v , тогда уравнение движения планеты в проекции на радиальное направление записывается в виде

$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM_S}{R^2}, \tag{1}$$

откуда

$$v = \sqrt{G \frac{M_S}{R}}, \tag{2}$$

где G – гравитационная постоянная.

Записывая формулу (2) для Юпитера с индексом J и Земли с индексом E , после деления получаем

$$\frac{v_J}{v_E} = \sqrt{\frac{R_E}{R_J}}, \tag{3}$$

а с другой стороны по третьему закону Кеплера для отношения периодов вращения T_E и T_J имеем

$$\frac{T_E^2}{T_J^2} = \frac{R_E^3}{R_J^3}. \tag{4}$$

Движение Юпитера нельзя обнаружить с помощью спектрометра, зато это можно сделать для Солнца, так как оно тоже движется вокруг центр масс системы Солнце-Юпитер. Скорость Солнца легко найти из выражения

$$v_S = v_J \frac{M_J}{M_S}. \tag{5}$$

Так как Солнце движется вокруг общего центра масс системы, а наблюдатель расположен в этой же плоскости, то согласно формуле эффекта Доплера при обнаружении выполняется следующее условие

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v_S}{c}. \tag{6}$$

Собирая вместе уравнения (3)-(6), получаем окончательный ответ

$$R_{\min} = \frac{M_S}{M_J} \left(\frac{T_J}{T_E} \right)^{1/3} \frac{c}{2v_E} = 1.20 \cdot 10^7. \tag{7}$$

Такая разрешающая способность доступна многим современным спектрометрам, производимым в разных странах мира.

Содержание	Баллы
Формула (1): $\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM_S}{R^2}$	0.2
Формула (2): $v = \sqrt{G \frac{M_S}{R}}$	0.2

Формула (3): $\frac{v_J}{v_E} = \sqrt{\frac{R_E}{R_J}}$	0.2
Формула (4): $\frac{T_E^2}{T_J^2} = \frac{R_E^3}{R_J^3}$	0.4
Формула (5): $v_S = v_J \frac{M_J}{M_S}$	1.0
Формула (6): $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{2v_S}{c}$	1.0
Формула (7): $R_{\min} = \frac{M_S}{M_J} \left(\frac{T_J}{T_E} \right)^{1/3} \frac{c}{2v_E}$	0.5
Численное значение в формуле (7): $R_{\min} = 1.20 \cdot 10^7$	0.5
Итого	4.0

Задача 2. Ускорение Ферми (10.0 балла)

Почему встречных машин больше, чем попутных?

2.1 За время t автомобиль в полосе B обгонит только те автомобили, которые находятся от него на расстоянии

$$l = (v - (v - \Delta v))t = \Delta v t . \tag{1}$$

Следовательно, число этих автомобилей равно

$$N_1 = nl = n\Delta v t \approx 0.83 . \tag{2}$$

Время между обгонами составляет

$$\tau_1 = \frac{1}{n\Delta v} = 0.02 \text{ час} = 72 \text{ с} . \tag{3}$$

2.2 Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что число обгонов и время между обгонами остаются прежними, то есть

$$N_2 = nl = n\Delta v t \approx 0.83 , \tag{4}$$

$$\tau_2 = \frac{1}{n\Delta v} = 0.02 \text{ час} = 72 \text{ с} . \tag{5}$$

2.3 При движении навстречу число встречных автомобилей и время между двумя последовательными встречами рассчитываются по формулам

$$N_{3,4} = n(v + (v \pm \Delta v))t = n(2v \pm \Delta v)t \tag{6}$$

$$\tau_{3,4} = \frac{1}{n(2v \pm \Delta v)} ,$$

а численные расчеты дают следующие значения

$$N_3 = 14.2; \quad \tau_3 = 4.2 \text{ с}; \tag{7}$$

$$N_4 = 15.8; \quad \tau_4 = 3.8 \text{ с} .$$

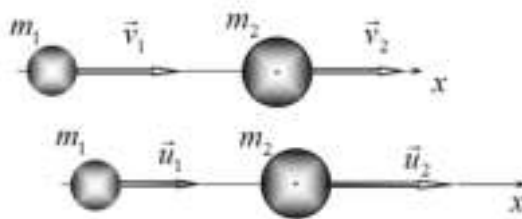
Упругое столкновение

2.4 Запишем закон сохранения импульса

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \tag{8}$$

и закон сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} . \tag{9}$$



Перепишем эти уравнения в виде

$$\begin{aligned} m_1 v_1 - m_1 u_1 &= m_2 u_2 - m_2 v_2 \\ m_1 v_1^2 - m_1 u_1^2 &= m_2 u_2^2 - m_2 v_2^2 \end{aligned} \tag{10}$$

и, разделив второе уравнение на первое, в результате получим

$$v_1 + u_1 = u_2 + v_2. \tag{11}$$

Из этого равенства выразим $u_2 = v_1 + u_1 - v_2$ и подставим в уравнение закона сохранения импульса

$$(m_1 + m_2)u_1 = (m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2, \tag{12}$$

из которого следует

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2. \tag{13}$$

Скорость второго шарика легко получить, если поменять индексы «1» и «2» в формуле (13)

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \tag{14}$$

2.5 Используя формулу (13), получим явный вид зависимости между требуемыми параметрами

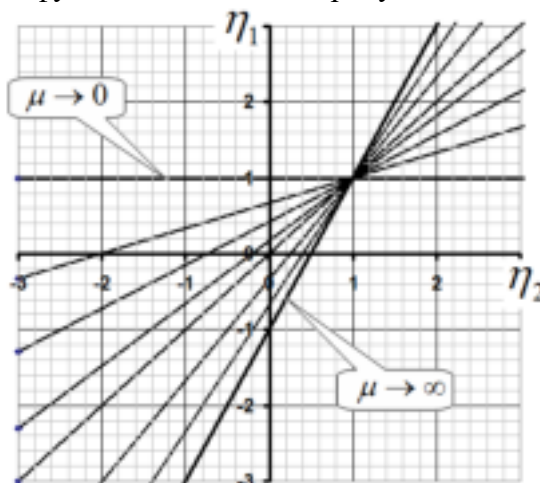
$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \frac{v_2}{v_1} = \frac{1 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} + \frac{2 \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \frac{v_2}{v_1} \Rightarrow \tag{15}$$

$$\eta_1 = \frac{1 - \mu}{1 + \mu} + \frac{2\mu}{1 + \mu} \eta_2$$

Как следует из полученного выражения, при любых значениях отношения масс μ зависимость $\eta_1(\eta_2)$ является линейной, т.е. ее графиком является прямая линия. Также не сложно заметить, что все эти прямые проходят через точку $\eta_1 = 1; \eta_2 = 1$. При $\mu \rightarrow 0$ коэффициент наклона стремится к нулю $\eta_1 = 1$, то есть график зависимости стремится к горизонтальной прямой. При $\mu \rightarrow \infty$ искомая зависимость стремится к

$$\eta_1 = -1 + 2\eta_2. \tag{16}$$

Семейство графиков этих функций показано на рисунке ниже.



2.6 Кинетическая энергия шарика увеличится, если модуль скорости шарика после удара станет больше модуля скорости до удара, то есть при выполнении неравенств

$$|\eta_1| > 1 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 > 1 \\ \eta_1 < -1 \end{cases}. \quad (17)$$

Подставляя выражение (15) для величины η_1 , получим неравенства

$$\begin{cases} \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu} \eta_2 > 1 \\ \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu} \eta_2 < -1 \end{cases}. \quad (18)$$

Решением этих неравенств являются следующие соотношения:

а)
$$\eta_2 > 1, \quad (19)$$

то есть для выполнения этого условия второй шарик должен догонять первый;

б)
$$\eta_2 < -\frac{1}{\mu}, \quad (20)$$

в этом случае второй шарик должен двигаться навстречу и модуль его скорости должен превышать указанное значение.

2.7 В предельном случае $m_2 \gg m_1$ скорость первого шарика после столкновения равна

$$\tilde{u}_1 = -v_1 + 2v_2, \quad (21)$$

то есть скорость первого шарика изменяет знак (шарик отражается) и его модуль изменяется на удвоенную скорость второго, тяжелого шарика.

Легкий шарик увеличит свою скорость, а, следовательно, и кинетическую энергию, если:

а) тяжелый шарик его догоняет (удар сзади) $v_2 > 1$;

б) тяжелый шарик движется ему навстречу $v_2 < 0$.

Простейшая модель ускорения Ферми

2.8 Запишем закон движения плиты в традиционном виде

$$x(t) = A \cos(\omega t), \quad (22)$$

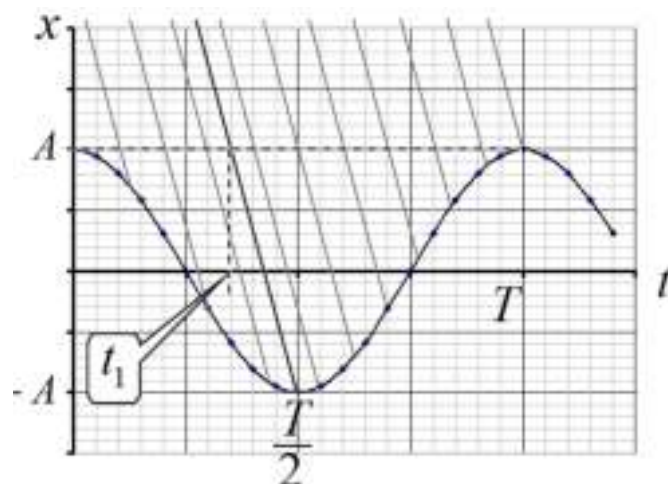
тогда зависимость скорости от времени описывается функцией

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t), \quad (23)$$

поэтому максимальная скорость движения платформы равна

$$V_0 = A\omega = 2\pi \frac{A}{T}. \quad (24)$$

2.9 Чтобы ответить на поставленный вопрос, достаточно рассмотреть один период колебаний платформы. Построим график зависимости координаты платформы от времени (22) и нанесем на него графики зависимостей координат налетающих частиц от времени, представляющих собой прямые линии $x = x_0 - ut$.



На рисунке изображен случай $u > V_0$. Свою скорость в результате удара увеличат частицы, которые столкнутся с платформой в те моменты времени, когда платформа движется навстречу в положительном направлении оси x , при этом столкновения должны произойти в интервале времени от $\frac{T}{2}$ до T . Однако времена столкновений не являются равномерно распределенной случайной величиной, а равномерно распределены времена подлета к самой пластине, поэтому рассмотрим плоскость $x = A$, времена подлета к которой равновероятны. Проведем прямую, описывающую закон движения частицы, сталкивающейся с платформой в момент времени $t = \frac{T}{2}$ (на рисунке – жирная линия). Обозначим t_1 как момент времени, когда эта частица пересекает плоскость $x = A$. Частицы, которые столкнулись с платформой после этого момента, увеличат свою скорость и энергию. Но эти частицы пересекут плоскость $x = A$ в интервале времен от t_1 до T , поэтому доля этих частиц рассчитывается как

$$\eta = \frac{T - t_1}{T}. \quad (25)$$

Момент времени t_1 легко найти из закона движения этой частицы

$$t_1 = \frac{T}{2} - \frac{2A}{u}, \quad (26)$$

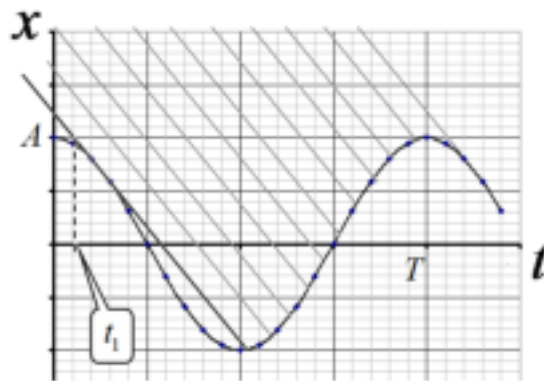
тогда доля ускорившихся частиц равна

$$\eta = \frac{T - t_1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2A}{uT} = \frac{1}{2} + \frac{V_0}{\pi u}. \quad (27)$$

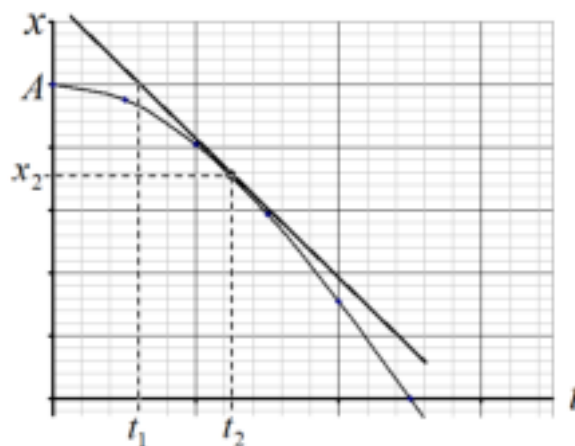
Здесь использовано соотношение, следующее из формулы (24): $\frac{2A}{T} = \frac{V_0}{\pi}$. Подставим указанное численное значение $u = 1.5V_0$, получим:

$$\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.5\pi} \approx 0.71. \quad (28)$$

Несколько иная ситуация реализуется при $u < V_0$, которая показана на рисунке ниже.



В этом случае «граница» t_1 между частицами ускорившимися и затормозившимися определяется прямой, которая является касательной к графику закона движения платформы, как показано на рисунке ниже.



При касании графиков двух функций в момент времени t_2 совпадают значения как самих функций, так и их производных, то есть скоростей движения платформы и шарика, поэтому

$$-A\omega \sin(\omega t_2) = -u, \tag{29}$$

откуда находим

$$t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{u}{A\omega} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{u}{V_0}. \tag{30}$$

$$x_2 = A \cos \omega t_2 = A \sqrt{1 - \sin^2 \omega t_2} = A \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}}. \tag{31}$$

Эти выражения позволяют определить время подлета к плоскости $x = A$

$$t_1 = t_2 - \frac{A - x_2}{u} = \frac{T}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right). \tag{32}$$

Отношение этого времени к периоду колебаний определяет долю частиц, которые столкнутся с платформой, догоняя ее, поэтому их энергия уменьшится:

$$1 - \eta = \frac{1}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right) \approx 0.04, \tag{33}$$

следовательно, доля частиц, энергия которых увеличится после удара, равна

$$\eta \approx 0.96. \tag{34}$$

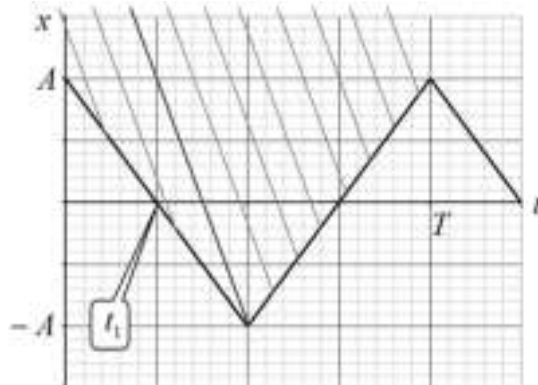
2.10 За один период колебаний платформа проходит путь $4A$, поэтому модуль ее скорости равен

$$V = \frac{4A}{T}. \tag{35}$$

2.11 При скорости шарика больше скорости платформы доля шариков, увеличивших свою энергию в следствие удара, рассчитывается по формуле, аналогичной формуле (27):

$$\eta = \frac{T - t_1}{T} = \frac{1}{2} + \frac{2A}{uT} = \frac{1}{2} + \frac{V}{2u}, \tag{36}$$

а соответствующий рисунок показан ниже.



Так как модуль скорости платформы принимается постоянным, то модуль скорости частиц после удара станет равным

$$u_+ = u + 2V. \tag{37}$$

Скорости частиц, которые столкнутся с платформой в интервале времени от 0 до t_1 , будут равны

$$u_- = u - 2V. \tag{38}$$

Таким образом, средняя энергия частиц после удара станет равной

$$\begin{aligned} E &= \eta \frac{mu_+^2}{2} + (1 - \eta) \frac{mu_-^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{V}{2u} \right) (u + 2V)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{V}{2u} \right) (u - 2V)^2 \right) = \\ &= \frac{mu^2}{4} \left(\left(1 + \frac{V}{u} \right) \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2 + \left(1 - \frac{V}{u} \right) \left(1 - 2 \frac{V}{u} \right)^2 \right) = \frac{mu^2}{2} \left(1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2 \right), \end{aligned} \tag{39}$$

а, следовательно, увеличение средней энергии равно

$$\varepsilon = 1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2 \approx 4.6. \tag{40}$$

Если, скорость частиц меньше скорости платформы, то все частицы столкнутся с платформой на встречном движении, поэтому все частицы увеличат свою скорость и энергию. После столкновения скорости частиц станут равными $u_+ = u + 2V$, а их энергия

$$E = \frac{m}{2} (u + 2V)^2 = \frac{mu^2}{2} \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2, \tag{41}$$

а, следовательно, отношение энергий частиц после и до столкновения равно

$$\varepsilon = \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2 = 25.0. \tag{42}$$

	Содержание	Баллы	
2.1	Формула (2): $N_1 = n\Delta vt$	0.1	0.4
	Численное значение в формуле (2): $N_1 \approx 0.83$	0.1	
	Формула (3): $\tau_1 = \frac{1}{n\Delta v}$	0.1	
	Численное значение в формуле (3): $\tau_1 = 0.02$ час = 72 с	0.1	
2.2	Формула (4): $N_2 = n\Delta vt$	0.1	0.4
	Численное значение в формуле (4): $N_2 \approx 0.83$	0.1	

	Формула (5): $\tau_2 = \frac{1}{n\Delta v}$	0.1	
	Численное значение в формуле (5): $\tau_2 = 0.02 \text{ час} = 72 \text{ с}$	0.1	
2.3	$N_{3,4} = n(2v \pm \Delta v)t$ Формулы (6): $\tau_{3,4} = \frac{1}{n(2v \pm \Delta v)}$	0.4	0.8
	Численное значение в формуле (7): $N_3 = 14.2; \tau_3 = 4.2 \text{ с};$ $N_3 = 15.8; \tau_3 = 3.8 \text{ с}.$	0.4	
2.4	Формула (8): $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$	0.1	0.6
	Формула (9): $\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$	0.1	
	Формула (13): $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2$	0.2	
	Формула (14): $u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2$	0.2	
2.5	Формула (15): $\eta_1 = \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{2\mu}{1+\mu}\eta_2$	0.2	1.6
	На графике только прямые линии, иначе график не оценивается	0.2	
	Все прямые проходят через точку $\eta_1 = 1; \eta_2 = 1$	0.4	
	Имеется прямая $\eta_1 = 1$	0.2	
	Имеется прямая $\eta_1 = -1 + 2\eta_2$	0.4	
	Все прямые расположены между $\eta_1 = 1$ и $\eta_1 = -1 + 2\eta_2$	0.2	
2.6	Неравенства (7): $ \eta_1 > 1 \Rightarrow \begin{cases} \eta_1 > 1 \\ \eta_1 < -1 \end{cases}$	0.2	0.4
	Неравенство (19): $\eta_2 > 1$	0.1	
	Неравенство (20): $\eta_2 < -\frac{1}{\mu}$	0.1	
2.7	Формула (21): $\tilde{u}_1 = -v_1 + 2v_2$	0.1	0.3
	Неравенство а): $v_2 > 1$	0.1	
	Неравенство б): $v_2 < 0$	0.1	
2.8	Формула (22): $x(t) = A\cos(\omega t)$	0.1	0.4
	Формула (23): $v(t) = -A\omega\sin(\omega t)$	0.1	
	Формула (24): $V_0 = A\omega = 2\pi\frac{A}{T}$	0.2	
2.9	Формула (25): $\eta = \frac{T - t_1}{T}$	0.3	2.7
	Формула (26): $t_1 = \frac{T}{2} - \frac{2A}{u}$	0.3	
	Формула (27): $\eta = \frac{1}{2} + \frac{V_0}{\pi u}$	0.3	
	Численное значение (28): $\eta \approx 0.71$	0.3	
	Формула (29): $-A\omega\sin(\omega t_2) = -u$	0.2	

	Формула (30): $t_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{u}{A\omega} = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{u}{V_0}$	0.2	
	Формула (31): $x_2 = A\sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}}$	0.3	
	Формула (32): $t_1 = \frac{T}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right)$	0.3	
	Формула (33): $1 - \eta = \frac{1}{2\pi} \left(\arcsin \frac{u}{V_0} - \frac{V_0}{u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u^2}{V_0^2}} \right) \right)$	0.3	
	Численное значение (34): $\eta \approx 0.96$	0.2	
2.10	Формула (35): $V = \frac{4A}{T}$	0.2	0.2
2.11	Формула (36): $\eta = \frac{1}{2} + \frac{V}{2u}$	0.3	2.2
	Формула (37): $u_+ = u + 2V$	0.2	
	Формула (38): $u_- = u - 2V$	0.2	
	Формула (39): $E = \eta \frac{mu_+^2}{2} + (1 - \eta) \frac{mu_-^2}{2}$	0.3	
	Формула (40): $\varepsilon = 1 + 8 \left(\frac{V}{u} \right)^2$	0.3	
	Численное значение в формуле (40): $\varepsilon \approx 4.6$	0.2	
	Формула (41): $E = \frac{m}{2} (u + 2V)^2$	0.2	
	Формула (42): $\varepsilon = \left(1 + 2 \frac{V}{u} \right)^2$	0.3	
	Численное значение в формуле (42): $\varepsilon = 25.0$	0.2	
Итого			10.0

Задача 3. Магнетрон

Движение электрона в электрическом и магнитном полях

3.1 Под действием однородного электрического поля электрон движется с постоянным ускорением

$$a = \frac{eE}{m}, \tag{1}$$

которое направлено в отрицательном направлении оси x , поэтому максимальное значение достигаемой координаты определяется выражением

$$x_{\max} = \frac{u_0^2}{2a} = \frac{mu_0^2}{2eE}. \tag{2}$$

3.2 При движении в однородном магнитном поле на электрон действует сила Лоренца, равная

$$F_L = eu_0B. \tag{3}$$

и он совершает движение по окружности, радиус R которой определяется из второго закона Ньютона

$$m \frac{u_0^2}{R} = F_L, \tag{4}$$

откуда получаем

$$R = \frac{mu_0}{eB}. \quad (5)$$

Очевидно, что максимальное значение координаты при этом равно

$$x_{\max} = R = \frac{mu_0}{eB}. \quad (6)$$

3.3 Задача проще всего решается в лабораторной системе отсчета, в которой электрон движется по окружности с частотой, определяемой формулой (5) в виде

$$\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{eB}{m}. \quad (7)$$

При сообщении электрону малой дополнительной скорости он перейдет на движение по окружности, близкой к первоначальной и пересекающейся с ней в двух диаметрально противоположных точках, что можно рассматривать как движение по замкнутой двумерной траектории с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}. \quad (8)$$

3.4 В момент, когда координата x максимальна, скорость частицы u направлена вдоль оси z и по закону сохранения энергии равна

$$eEx_{\max} = \frac{mu^2}{2}. \quad (9)$$

В проекции на ось z уравнение движения записывается в конечных разностях виде

$$m \frac{\Delta u_z}{\Delta t} = eBu_x, \quad (10)$$

что с учетом $\Delta x = u_x \Delta t$ приводит к соотношению

$$m\Delta u_z = eB\Delta x, \quad (11)$$

которое для искомого момента принимает вид

$$mu = eBx_{\max}. \quad (12)$$

Решая совместно уравнения (9) и (12), окончательно получаем

$$x_{\max} = \frac{2mE}{eB^2}, \quad (13)$$

3.5 Так как магнитное поле работы не совершает, то скорость электрона остается постоянной по модулю и равной начальной

$$u = u_0 = const. \quad (14)$$

Разобьем полную скорость на радиальную $u_r = dr/dt$ и азимутальную $u_\varphi = r d\varphi/dt$ составляющие. Момент импульса электрона относительно начала координат очевидно равен

$$L = mru_\varphi, \quad (15)$$

а момент силы Лоренца относительно той же точки составляет

$$M = eBu_r r. \quad (16)$$

Согласно уравнению моментов имеем

$$\frac{dL}{dt} = M, \quad (17)$$

что с использованием $u_r = dr/dt$ приводит к соотношению

$$d(mru_\varphi) = e\alpha r^2 dr. \quad (18)$$

В момент времени, когда расстояние до оси z максимально, радиальная скорость обращается в ноль, а азимутальная скорость равна начальной в соответствии с формулой (14), поэтому интегрирование соотношения (18) приводит к уравнению

$$mr_{\max} u_0 = e\alpha \frac{r_{\max}^3}{3}, \quad (19)$$

из которого следует, что

$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3mu_0}{e\alpha}}. \quad (20)$$

3.6 Так как электрон все время движется по окружности, то, согласно уравнению (5), при нарастании магнитного поля на его орбите B_0 производная импульса меняется по закону

$$\frac{dp}{dt} = er \frac{dB_0}{dt}. \quad (21)$$

Электрон приходит в движение за счет вихревого электрического поля, напряженность E которого определяется соотношением

$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (22)$$

в которое по закону Фарадея входит поток магнитной индукции через орбиту электрона, равный

$$\Phi = \int_0^r B(r) 2\pi r dr. \quad (23)$$

Уравнение второго закона Ньютона для ускорения электрона по орбите имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = eE. \quad (24)$$

Совместное решение уравнений (21)-(24) приводит к следующему равенству для магнитного поля, которое называется циклотронным условием

$$\int_0^r B(r) 2\pi r dr = 2\pi r^2 B_0. \quad (25)$$

Из формулы (25) заключаем, что его выполнение возможно только в случае, когда электрон движется в области магнитного поля с индукцией $B_0 = B_2$, поэтому интегрируя заданную в условии магнитную индукцию как функцию расстояния, получаем соотношение

$$B_1 \pi r_1^2 + B_2 \pi (r^2 - r_1^2) = 2\pi r^2 B_2, \quad (26)$$

решение которого имеет вид

$$\frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{r^2}{r_1^2}. \quad (27)$$

Движение электрона по окружности возможно только в той области, в которой индукция равна B_2 , то есть при $r_1 < r < r_2$, а значит искомое отношение должно лежать в интервале

$$2 < \frac{B_1}{B_2} < 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}. \quad (28)$$

Цилиндрический магнетрон

3.7 Пусть на единицы длины цилиндрического катода и анода приходится заряд, равный λ , а полная длина электродов составляет l . Тогда по теореме Гаусса, напряженность электрического поля в пространстве между катодом и анодом определяется уравнением

$$E 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}, \quad (29)$$

откуда получаем

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (30)$$

Здесь r – расстояние до оси магнетрона.

Зависимость разности потенциалов от расстояния r по определению записывается в виде интеграла

$$V = \int_a^r E dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}, \quad (31)$$

который в частности для $r = b$ дает

$$V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}. \quad (32)$$

Решая совместно уравнения (31) и (32), получаем

$$V = V_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} = 57.6 \text{ В}. \quad (33)$$

3.8 Рассмотрим тонкое кольцо радиуса R , по которому протекает ток j , и рассчитаем величину магнитной индукции в точке на оси кольца, отстоящей от его центра на расстоянии z . Разобьем кольцо на малые элементы dl , тогда магнитная индукция определяется следующим законом Био-Саварра

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (34)$$

в котором вектор \vec{r} проведен из точки расположения элемента тока dl в точку O , в которой ищется магнитная индукция.

Из геометрических соотношений следует, что

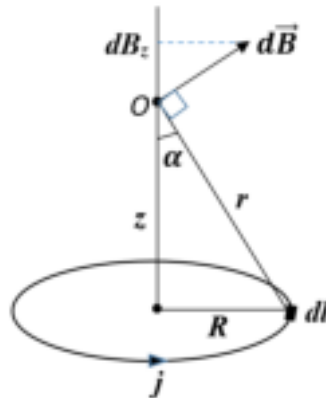
$$d\vec{l} \times \vec{r} = dl \cdot r, \quad (35)$$

а так как результирующая магнитная индукция направлена вдоль оси кольца

$$dB_z = dB \sin \alpha, \quad (36)$$

то, используя геометрическое соотношение $R = r \sin \alpha$, окончательно получаем

$$dB_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{R dl}{r^3}. \quad (37)$$



Учитывая, что расстояния, входящие в формулу (37), являются постоянными и

$$r^2 = R^2 + z^2, \quad (38)$$

то после суммирования по всем элементам кольца находим

$$B_z = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (39)$$

Рассчитаем теперь индукцию магнитного поля в центре соленоида, так как именно там расположена лампа магнетрона. Для этого рассмотрим витки, расположенные на расстоянии от центра от z до $z + dz$, по которым протекает ток

$$dj = \frac{NI}{L} dz. \quad (40)$$

Эти витки можно рассматривать как кольцо, магнитная индукция которого определяется формулой (39), из которой получаем

$$dB = \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz, \quad (41)$$

что после интегрирования дает окончательное выражение

$$B = \frac{\mu_0 NIR^2}{2L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 NI}{L\sqrt{1 + D^2/L^2}}, \quad (42)$$

где использовано выражение для диаметра $D = 2R$.

Для движения электронов в магнетроне справедлива формула, аналогичная формуле (18) и имеющая вид

$$d(mru_\varphi) = eBrdr, \tag{43}$$

интегрирование которой при условии постоянства магнитной индукции и $a \ll b$ дает

$$mru_\varphi = \frac{1}{2} eBr^2. \tag{44}$$

С другой стороны, из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{m}{2} (u_r^2 + u_\varphi^2) = eV. \tag{45}$$

В момент достижения критической величины тока магнитная индукция вблизи анода становится такой, что радиальная скорость электронов обращается в ноль, что приводит к условиям

$$u_r = 0, \quad r = b, \quad V = V_0, \tag{46}$$

что с использованием выражений (44) и (45) дает критическую величину магнитного поля

$$B = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}. \tag{47}$$

Используя формулу (42), находим соответствующую величину тока в соленоиде

$$I_{\min} = \sqrt{\frac{8mV_0}{e} (1 + D^2 / L^2)} \frac{L}{\mu_0 Nb} = 0,701 \text{ А}. \tag{48}$$

3.9 Начальная энергия электронов в лампе вблизи катода определяется температурой самого катода и составляет порядка

$$E_T = k_B T. \tag{49}$$

Эта энергия, очевидно, должна быть много меньше энергии электронов вблизи анода E_0 , то есть

$$E_T \ll E_0, \tag{50}$$

где $E_0 = eV_0$, откуда получаем искомую оценку

$$T \ll \frac{eE_0}{k_B} = 8.70 \cdot 10^5 \text{ К}, \tag{51}$$

что фактически означает применимость использованного приближения, так как температура катода обычно минимум на два порядка меньше.

	Содержание	Баллы	
3.1	Формула (1): $a = \frac{eE}{m}$	0.1	0.2
	Формула (2): $x_{\max} = \frac{mu_0^2}{2eE}$	0.1	
3.2	Формула (3): $F_L = eu_0B$	0.1	0.4
	Формула (4): $m \frac{u_0^2}{R} = F_L$	0.1	
	Формула (5): $R = \frac{mu_0}{eB}$	0.1	
	Формула (6): $x_{\max} = R = \frac{mu_0}{eB}$	0.1	
3.3	Формула (7): $\omega = \frac{u_0}{R} = \frac{eB}{m}$	0.2	0.4
	Формула (8): $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$	0.2	

3.4	Формула (9): $eEx_{\max} = \frac{mu^2}{2}$	0.2	1.0
	Формула (10): $m \frac{\Delta u_z}{\Delta t} = eBu_x$	0.2	
	Формула (11): $m\Delta u_z = eB\Delta x$	0.2	
	Формула (12): $mu = eBx_{\max}$	0.2	
	Формула (13): $x_{\max} = \frac{2mE}{eB^2}$	0.2	
3.5	Формула (14): $u = u_0 = const$	0.2	1.4
	Формула (15): $L = mru_\phi$	0.2	
	Формула (16): $M = eBu_r r$	0.2	
	Формула (17): $\frac{dL}{dt} = M$	0.2	
	Формула (18): $d(mru_\phi) = e\alpha r^2 dr$	0.2	
	Формула (19): $mr_{\max}u_0 = e\alpha \frac{r_{\max}^3}{3}$	0.2	
	Формула (20): $r_{\max} = \sqrt{\frac{3mu_0}{e\alpha}}$	0.2	
3.6	Формула (21): $\frac{dp}{at} = er \frac{dB_0}{dt}$	0.2	1.6
	Формула (22): $E = \frac{1}{2\pi r} \frac{d\Phi}{dt}$	0.2	
	Формула (23): $\Phi = \int_0^r B(r)2\pi r dr$	0.2	
	Формула (24): $\frac{dp}{dt} = eE$	0.2	
	Формула (25): $\int_0^r B(r)2\pi r dr = 2\pi r^2 B_0$	0.2	
	Формула (26): $B_1\pi r_1^2 + B_2\pi(r^2 - r_1^2) = 2\pi r^2 B_2$	0.2	
	Формула (27): $\frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{r^2}{r_1^2}$	0.2	
	Формула (28): $2 < \frac{B_1}{B_2} < 1 + \frac{r_2^2}{r_1^2}$	0.2	
3.7	Формула (29): $E2\pi rl = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$	0.1	1.0
	Формула (30): $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$	0.1	
	Формула (31): $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a}$	0.2	
	Формула (32): $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$	0.2	

	Формула (33): $V = V_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)}$	0.2	
	Численное значение в формуле (33): $V = 57.6$ В	0.2	
3.8	Формула (34): $d\vec{B} = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$	0.2	3.2
	Формула (35): $d\vec{l} \times \vec{r} = dl \cdot \vec{r}$	0.2	
	Формула (36): $dB_z = dB \sin \alpha$	0.2	
	Формула (37): $dB_z = \frac{\mu_0 j}{4\pi} \frac{Rdl}{r^3}$	0.2	
	Формула (38): $r^2 = R^2 + z^2$	0.2	
	Формула (39): $B_z = \frac{\mu_0 j}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$	0.2	
	Формула (40): $dj = \frac{NI}{L} dz$	0.2	
	Формула (41): $dB = \frac{\mu_0 NI}{2L} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz$	0.2	
	Формула (42): $B = \frac{\mu_0 NI}{L\sqrt{1 + D^2/L^2}}$	0.2	
	Формула (43): $d(mru_\varphi) = eBrdr$	0.2	
	Формула (44): $mru_\varphi = \frac{1}{2} eBr^2$	0.2	
	Формула (45): $\frac{m}{2}(u_r^2 + u_\varphi^2) = eV$	0.2	
	Формула (46): $u_r = 0, \quad r = b, \quad V = V_0$	0.2	
	Формула (47): $B = \sqrt{\frac{8mV_0}{eb^2}}$	0.2	
Формула (48): $I_{\min} = \sqrt{\frac{8mV_0}{e}(1 + D^2/L^2)} \frac{L}{\mu_0 Nb}$	0.2		
	Численное значение в формуле (48): $I_{\min} = 0,701$ А	0.2	
3.9	Формула (49): $E_T = k_B T$	0.2	0.8
	Формула (50): $E_T \ll E_0$	0.2	
	Формула (51): $T \ll \frac{eE_0}{k_B}$	0.2	
	Численное значение в формуле (51): $T \ll 8.70 \cdot 10^5$ К	0.2	
Итого			10.0