РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Внимание: баллы в оценках не делятся!

Задача 1 (10.0 балла)

Задача 1.1 (4.0 балла)

В начальный момент времени шар будет вращаться как целое вокруг точки его касания. Пусть шар поворачивается на некоторый угол α, тогда изменение потенциальной энергии центра масс шара составит

$$E_p = mgR(1-\cos\alpha), \tag{1}$$

и она превращается в кинетическую энергию

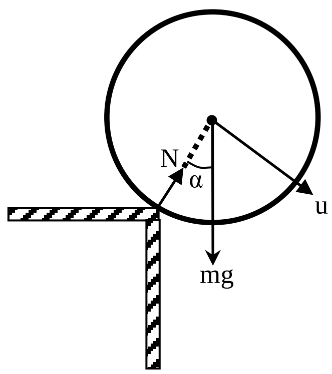
$$E_k = \frac{7}{10}mu^2, \tag{2}$$

где u – скорость центра масс шара.

По закону сохранения энергии получаем

$$E_p = E_k. \tag{3}$$

При дальнейшем движении происходит отрыв шара от стола. Уравнение движения центра масс шара (второй закон Ньютона) в проекции на радиальное направление имеет вид



$$m\frac{u^2}{R} = mg\cos\alpha - N, \tag{4}$$

где N – нормальная сила реакции стола, а сила трения не изображена на рисунке.

Условие отрыва шара от стола имеет вид

$$N = 0. \tag{5}$$

Решая совместно (1)-(5), находим угол отрыва и скорость шара в этот момент

$$\cos\alpha = \frac{10}{17}, \tag{6}$$

$$u = \sqrt{\frac{10}{17}gR}. \tag{7}$$

Дальнейшее движение шара есть свободное падение его центра масс в поле тяжести Земли. Начальные горизонтальная и вертикальная скорости равны

$$v_x = u\cos\alpha. \tag{8}$$

$$v_y = u\sin\alpha, \tag{9}$$

Дальность полета определяется формулами равноускоренного движения в поле тяжести земли

$$L = R\sin\alpha + v_x t. \tag{10}$$

$$H - R(1-\cos\alpha) = v_y t + \frac{gt^2}{2}, \tag{11}$$

где t – время полета.

Исключая время t из уравнений (10) и (11), находим

$$L = \frac{567\sqrt{21} + 20\sqrt{68305}}{4913}R \approx 1.6R. \tag{12}$$

Содержание	Баллы
Формула (1): $E_p = mgR(1-\cos\alpha)$	0.3
Формула (2): $E_k = \frac{7}{10}mu^2$	0.2
Формула (3): $E_p = E_k$	0.2

Формула (4): $m\frac{u^2}{R} = mg\cos\alpha - N$	0.3
Формула (5): $N = 0$	0.4
Формула (6): $\cos\alpha = \frac{10}{17}$	0.4
Формула (7): $u = \sqrt{\frac{10}{17}gR}$	0.4
Формула (8): $v_x = u\cos\alpha$	0.2
Формула (9): $v_y = u\sin\alpha$	0.2
Формула (10): $L = R\sin\alpha + v_x t$	0.4
Формула (11): $H - R(1-\cos\alpha) = v_y t + \frac{gt^2}{2}$	0.4
Формула (12): $L = \frac{567\sqrt{21} + 20\sqrt{68305}}{4913} R \approx 1.6R$	0.6
Итого	**4.0**

Задача 1.2 (3.0 балла)

Работа dA, совершаемая газом при изменении его объема на dV

$$dA = pdV, \tag{1}$$

где p – его давление.

Изменение внутренней энергии dU одного моля идеального одноатомного газа связано с изменением его температуры dT соотношением

$$dU = \frac{3}{2}RdT. \tag{2}$$

По условию задачи должно выполняться соотношение

$$\eta = \frac{dA}{dU} = const, \tag{3}$$

которое, наряду с уравнением идеального газа

$$pV = RT, \tag{4}$$

приводит к следующему уравнению

$$\frac{2}{3\eta}\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}. \tag{5}$$

Уравнение (5) легко интегрируется и приводится к виду

$$\frac{T}{T} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{2}{3\eta}}. \tag{6}$$

В начальном состоянии уравнение идеального газа дает

$$p_0V_0 = RT_0, \tag{7}$$

а в конечном состоянии

$$\frac{p_0}{2}4V_0 = RT, \tag{8}$$

откуда получаем температуру газа в конечном состоянии

$$T = 2T_0. \tag{9}$$

Из уравнений (6) и (9) легко находится коэффициент

$$\eta = \frac{4}{3}. \tag{10}$$

Полная работа газа в процессе определяется интегралом уравнения (1) и равна

$$A = \int_{V_0}^{4V_0} pdV = 2p_0V_0 = 2.0\times10^5 \text{ Дж}, \quad (11)$$

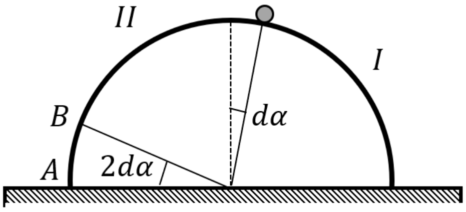
Примечание: Описанный в данной задаче процесс является политропным, то есть происходит при постоянной теплоемкости. Действительно, так как совершаемая газом работа составляет фиксированную часть изменения внутренней энергии, то это и означает, что теплоемкость газа остается постоянной за все время процесса. При этом уравнение политропы $pV^n = const$ справедливо при выбранных условиях задачи для $n = 1/2$, а работа газа, очевидно, не зависит от его типа, будь то одноатомный или многоатомный газ.

Содержание	Баллы
Формула (1): $dA = pdV$	0.2
Формула (2): $dU = \frac{3}{2}RdT$	0.2
Формула (3): $\eta = \frac{dA}{dU} = const$	0.2
Формула (4): $pV = RT$	0.2
Формула (5): $\frac{2}{3\eta}\frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}$	0.2
Формула (6): $\frac{T}{T} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{2}{3\eta}}$	0.4
Формула (7): $p_0V_0 = RT_0$	0.2
Формула (8): $\frac{p_0}{2}4V_0 = RT$	0.2
Формула (9): $T = 2T_0$	0.2
Формула (10): $\eta = \frac{4}{3}$	0.4
Формула (11): $A = 2p_0V_0$	0.4
Численное значение в формуле (11): $A = 2.0\times10^5$ Дж	0.2
Итого	**3.0**

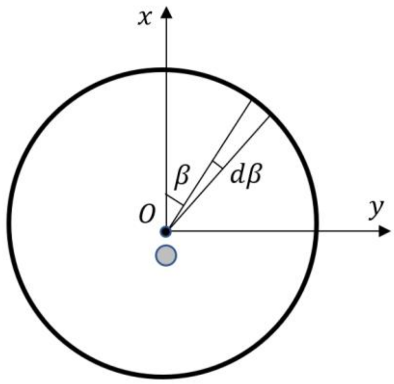
Задача 1.3 (3.0 балла)

Для изучения вопроса об устойчивости положения равновесия рассмотрим ситуацию, в которой шарик отклонился от верхнего положения на очень маленький угол $d\alpha$ и определим действующие на него силы.

Первая сила является электростатической, но для изучения равновесия нам нужна только ее составляющая, направленная по касательной к поверхности полусферы. Идея ее вычисления основана на том, что в проекции на радиальное направление электростатические силы будут скомпенсированы от двух, симметричных относительно нового положения шарика, областей полусферы I и II, так что не скомпенсированной останется сила со стороны дольки полусферы AB, отсекаемой наклонной плоскостью, проходящей под углом $2d\alpha$. На левом рисунке ниже показано соответствующее сечение в вертикальной плоскости.



Вид сбоку



Вид сверху

Рассмотрим часть дольки сферы (смотрите правый рисунок выше, на котором показан вид сверху), дополнительно отсекаемой углами β и $\beta + d\beta$, так что ее площадь составляет

$$dS = 2R\cos\beta R d\beta d\alpha\ , \qquad (1)$$

а электрический заряд равен

$$dq = -\sigma dS\ . \qquad (2)$$

В декартовой системе координат, начало которой совпадает с вершиной полусферы, а ось z направлена вертикально вниз, радиус-вектор, направленный из точки нахождения частицы в выделенную часть дольки сферы, определяется координатами

$$\vec{r} = (R\cos\beta, R\sin\beta, R)\ , \qquad (3)$$

а значит вектор искомой силы равен

$$\vec{F} = -\frac{Qdq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\ . \qquad (4)$$

Эта сила имеет следующую проекцию на тангенциальное направление

$$F_Q = -\frac{Qdq}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}R)^3}R\cos\beta\ . \qquad (5)$$

поэтому интегрирование по β от $-\pi/2$ до $\pi/2$ дает полную по модулю силу от всей дольки в виде

$$F_Q = \frac{Q\sigma}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0}d\alpha\ , \qquad (6)$$

Вторая сила, действующая на шарик, является силой тяжести, проекция которой на тангенциальное направление составляет

$$F_g = mgd\alpha\ . \qquad (7)$$

Минимальный заряд шарика определяется равенством сил

$$F_g = F_Q\ , \qquad (8)$$

которое приводит к окончательному ответу

$$Q = \frac{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 mg}{\sigma}\ . \qquad (9)$$

Очевидно, что при больших зарядах положение равновесия будет устойчивым.

Содержание	Баллы
Формула (1): $dS = 2R\cos\beta R d\beta d\alpha$	0.3
Формула (2): $dq = \sigma dS$	0.3
Формула (3): $\vec{r} = (R\cos\beta, R\sin\beta, R)$	0.2
Формула (4): $\vec{F} = -\frac{Qdq}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$	0.2

Формула (5): $F_Q = \dfrac{Qdq}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{2}R)^3} R\cos\beta$	0.3
Формула (6): $F_Q = \dfrac{Q\sigma}{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} d\alpha$	0.5
Формула (7): $F_g = mgd\alpha$	0.2
Формула (8): $F_g = F_Q$	0.5
Формула (9): $Q = \dfrac{8\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 mg}{\sigma}$	0.5
Итого	**3.0**

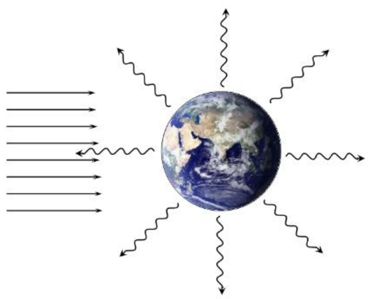
Задача 2. Парниковый эффект (10.0 балла)

Атмосфера без парникового эффекта

2.1 Непосредственный расчет по формуле Вина дает результат

$$\lambda_{\max S} = \frac{b}{T_S} = 0.446\,\text{мкм}\,. \qquad (1)$$

2.2 В установившемся режиме мощность солнечного излучения, падающего на Землю, равна мощности теплового излучения Земли. При записи уравнения энергетического баланса необходимо учесть, что Солнце освещает Землю с одной стороны, а Земля излучает во все стороны, поэтому следует записать



$$W\cdot\pi R^2 = \sigma T_0^4 \cdot 4\pi R^2\,. \qquad (2)$$

Из этого уравнения находим

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{W}{4\sigma}} = 280.3\ \text{К}\,, \qquad (3)$$

а эта же температура в градусах Цельсия равна

$$t_0 = 7.15\ ^\circ\text{C}\,. \qquad (4)$$

2.3 По формуле Вина находим, что при данной температуре максимум излучения приходится на длину волны

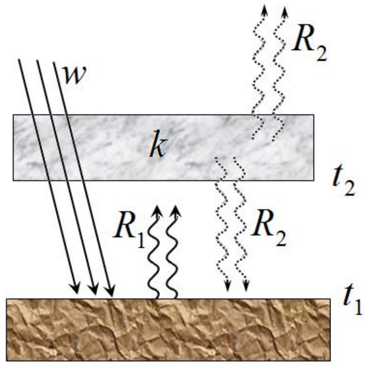
$$\lambda_{\max E} = \frac{b}{T_E} = 10.3\,\text{мкм}\,. \qquad (5)$$

2.4 Те же геометрические соотношения, которые приводят к уравнению (2), позволяют заключить, что мощность солнечного излучения, приходящаяся на единицу площади поверхности Земли

$$w = \frac{W\cdot\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{W}{4} = 350\ \text{Вт/м}^2\,. \qquad (6)$$

Различные модели атмосферы

2.5 Введем следующие обозначения:



t_1 (или T_1 в шкале Кельвина) – температура поверхности Земли и прилегающего непосредственно к ней нижнего слоя атмосферы; t_2 (или T_2) – температура верхнего слоя атмосферы; w – плотность потока солнечного излучения, то есть энергия, падающая на единицу площади поверхности Земли в единицу времени (или излучаемая); R_1 – мощность теплового излучения с единицы площади Земли; R_2 – мощность теплового излучения с единицы площади атмосферного слоя; потоки излучения этого слоя в сторону Земли и в космическое пространство одинаковы.

Уравнение энергетического баланса для единицы площади поверхности Земли имеет вид

$$w + R_2 = R_1 . \qquad (7)$$

Аналогичное уравнение для верхнего слоя атмосферы дает

$$KR_1 = 2R_2 . \qquad (8)$$

С помощью законов теплового излучения энергетические потоки можно выразить через температуры излучающих поверхностей следующим образом

$$R_1 = \sigma T_1^4 , \qquad (9)$$

$$R_2 = K\sigma T_2^4 . \qquad (10)$$

Следовательно, из выражений (7)-(10) с учетом формул (2) и (3) получаем температуру поверхности Земли в виде

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt[4]{1-\frac{K}{2}}} . \qquad (11)$$

Максимальный парниковый эффект

2.6 Для максимального парникового эффекта $K = 1$, поэтому в данной модели

$$T_1 = T_0 \sqrt[4]{2} = 333.3 \text{ К} = 60.2 \text{ °C} . \qquad (12)$$

Таким образом, предельное увеличение температуры вследствие парникового эффекта на «черной земле» равно

$$\Delta t_1 = 53.0 \text{ °C} . \qquad (13)$$

Водяной парниковый эффект

2.7 Земля как черное тело излучает энергию

$$W_0 = \int_0^\infty r_0(\lambda, T_1)\, d\lambda , \qquad (14)$$

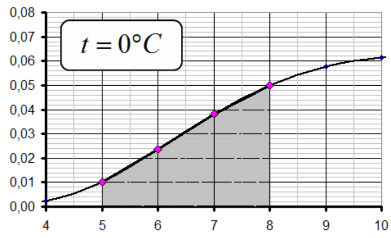
Поглощенную энергию можно выразить через спектральный коэффициент поглощения и спектральную плотность излучения Земли следующим образом

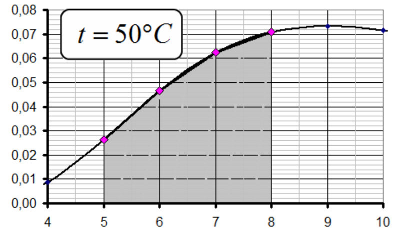
$$W_A = \int_0^\infty k(\lambda) r_0(\lambda, T_1)\, d\lambda , \qquad (15)$$

тогда суммарный коэффициент поглощения земного излучения верхним слоем атмосферы рассчитывается по формуле

$$K = \frac{W_A}{W_0} = \frac{\int_0^\infty k(\lambda) r_0(\lambda, T_1)\, d\lambda}{\int_0^\infty r_0(\lambda, T_1)\, d\lambda} = \frac{\sigma T_1^4 \int_0^\infty k(\lambda) \varphi(\lambda, T_1)\, d\lambda}{\sigma T_1^4 \int_0^\infty \varphi(\lambda, T_1)\, d\lambda} = \int_0^\infty k(\lambda) \varphi(\lambda, T_1)\, d\lambda . \qquad (16)$$

2.8 Так как в указанном диапазоне длин волн от 5.0 до 8.0 мкм водяной пар поглощает все падающее излучение, то суммарный коэффициент поглощения равен доле энергии излучения, попадающего в данный интервал. Эту долю энергии можно рассчитать, как площади под графиками, приведенными в условии задачи.





Расчет, проведенный по 4 точкам, дает следующие значения для коэффициентов поглощения

$$t_1 = 0\ ^\circ\mathrm{C}: \qquad K_0 = 0.092\,, \tag{17}$$

$$t_1 = 50\ ^\circ\mathrm{C}: \qquad K_{50} = 0.158\,. \tag{18}$$

2.9 Из вида предложенной зависимости $K(t_1) = K_0(1+\alpha t_1)$ следует, что

$$K_0 = 0.092\,, \tag{19}$$

$$\alpha = \frac{1}{t_{50}}\left(\frac{K_{50}}{K_0} - 1\right) = 0.014\ \mathrm{K}^{-1}. \tag{20}$$

2.10 При температуре $t_1 = 5{,}4 ^\circ C$ коэффициент поглощения верхнего слоя атмосферы равен

$$K(t_0) = K_0(1+\alpha t_0) = 0.101\,. \tag{21}$$

Так как коэффициент поглощения мал, то формулу (12) для установившейся температуры можно упростить

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt[4]{1-\frac{K}{2}}} \approx T_0\left(1+\frac{K}{8}\right), \tag{22}$$

тогда увеличение температуры равно

$$\Delta t_1 = T_0\frac{K(t_0)}{8} = 3.55\ ^\circ\mathrm{C}\,. \tag{23}$$

2.11 Для точного ответа на поставленный вопрос необходимо решить уравнение

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt[4]{1-\frac{K(T_1)}{2}}}\,. \tag{24}$$

Однако, относительное изменение абсолютной температуры мало, поэтому представим искомую температуру в виде

$$T_1 = T_0 + \Delta t\,, \tag{25}$$

из которого находим значение изменения температуры при условии $\Delta t \ll T_0$

$$\Delta t = \frac{T_0\frac{K_0(1+\alpha t_0)}{8}}{1 - T_0\frac{\alpha K_0}{8}} = \frac{\Delta t_1}{1 - T_0\frac{\alpha K_0}{8}} \approx 3.73\ ^\circ\mathrm{C}\,. \tag{26}$$

Усиление парникового эффекта углекислым газом

2.12 Рассчитаем коэффициент поглощения, обусловленный углекислым газом. Для проведения оценок можно считать, что температура воздуха мало отличается от $0 ^\circ C$. Для этого учтем, что: 1) в диапазоне от 2.5 до 3.0 мкм энергия теплового излучения земли пренебрежимо мала; 2) в диапазоне от 6.5 мкм до 7.0 мкм все поглощено водяным паром; 3) в диапазоне от 16 мкм до 18 мкм доля энергии излучения равна (расчет по графику для $t = 0 ^\circ C$) $\Phi = 0.08$. Поэтому дополнительный коэффициент поглощения из-за наличия углекислого газа равен

$$K_2 = 0.04\,. \tag{27}$$

Так как поглощение углекислого газа и водяного пара лежат в разных спектральных диапазонах, то суммарный коэффициент поглощения равен сумме коэффициентов поглощения водой и углекислым газом. Тогда изменение установившейся температуры поверхности (при учете поглощения углекислым газом) возрастает на величину

$$\Delta t_1 = T_0\frac{K_2}{8} \approx 1.4\ ^\circ\mathrm{C}. \tag{28}$$

2.13 Для расчета коэффициента поглощения при увеличении концентрации воспользуемся очевидным рассуждением: при наличии нескольких поглощающих слоев суммарное пропускание равно произведению коэффициентов пропускания отдельных слоев, поэтому

$$1 - k_1 = (1-k_0)^2\,. \tag{29}$$

Отсюда следует, что при увеличении концентрации в два раза спектральный коэффициент поглощения возрастет от 0.50 до

$$k_1 = 2k_0 - k_0^2 = 0.75. \tag{30}$$

Поэтому суммарный коэффициент поглощения станет равным

$$K_2 = k\Phi = 0.06. \tag{31}$$

т.е. возрастет на $\Delta K_2 = 0.02$. Следовательно, дополнительное возрастание температуры составит всего

$$\Delta t_1' = T_0 \frac{\Delta K_2}{8} \approx 0.7\ °\text{C}. \tag{32}$$

	Содержание	Баллы	
2.1	Формула (1): $\lambda_{\max S} = \dfrac{b}{T_S}$	0.1	**0.2**
	Численное значение в формуле (1): $\lambda_{\max S} = 0.446$ мкм	0.1	
2.2	Формула (2): $W \cdot \pi R^2 = \sigma T_0^4 \cdot 4\pi R^2$	0.4	**1.0**
	Формула (3): $T_0 = \sqrt[4]{\dfrac{W}{4\sigma}}$	0.2	
	Численное значение в формуле (3): $T_0 = 280.3$ К	0.2	
	Численное значение в формуле (4): $t_0 = 7.15$ °C	0.2	
2.3	Формула (5): $\lambda_{\max E} = \dfrac{b}{T_E}$	0.1	**0.2**
	Численное значение в формуле (5): $\lambda_{\max E} = 10,3$ мкм	0.1	
2.4	Формула (6): $w = \dfrac{W}{4}$	0.1	**0.2**
	Численное значение в формуле (6): $w = 350$ Вт/м^2	0.1	
2.5	Формула (7): $w + R_2 = R_1$	0.2	**1.2**
	Формула (8): $KR_1 = 2R_2$	0.2	
	Формула (9): $R_1 = \sigma T_1^4$	0.2	
	Формула (10): $R_2 = K\sigma T_2^4$	0.2	
	Формула (11): $T_1 = \dfrac{T_0}{\sqrt[4]{1 - \dfrac{K}{2}}}$	0.4	
2.6	Использование: $K = 1$	0.1	**0.5**
	Формула (12): $T_1 = T_0 \sqrt[4]{2}$	0.2	
	Численное значение в формуле (13): $\Delta t_1 = 53.0$ °C	0.2	
2.7	Формула (14): $W_0 = \int_0^\infty r_0(\lambda, T_1)\, d\lambda$	0.2	**0.8**
	Формула (15): $W_A = \int_0^\infty k(\lambda) r_0(\lambda, T_1)\, d\lambda$	0.2	
	Формула (16): $K = \int_0^\infty k(\lambda) \varphi(\lambda, T_1)\, d\lambda$	0.4	
2.8	Численное значение (17): $t_1 = 0$ °C: $K_0 = 0.092$	0.6	**1.2**

	Численное значение (18): $t_1 = 50$ °C: $K_{50} = 0.158$	0.6	
2.9	Численное значение (19): $K_0 = 0.092$	0.2	0.4
	Численное значение (20): $\alpha = 0.031\ \mathrm{K}^{-1}$	0.2	
2.10	Использование численного значения (21): $K\left(t_0\right) = 0.0757$	0.4	0.8
	Численное значение (23): $\Delta t_1 = 2.65$ °C	0.4	
2.11	Формула (24): $T_1 = \dfrac{T_0}{\sqrt[4]{1 - \dfrac{K(T_1)}{2}}}$	0.2	1.0
	Формула (25): $T_1 = T_0 + \Delta t$ при $\Delta t \ll T_0$	0.2	
	Формула (26): $\Delta t = \dfrac{T_0 \dfrac{K_0\left(1+\alpha t_0\right)}{8}}{1 - T_0 \dfrac{\alpha K_0}{8}} = \dfrac{\Delta t_1}{1 - T_0 \dfrac{\alpha K_0}{8}}$	0.4	
	Численное значение в формуле (26): $\Delta t \approx 2.84$ °C	0.2	
2.12	Численное значение (27): $K_2 = 0.04$	0.5	1.0
	Численное значение (28): $\Delta t_1 \approx 1.4$ °C	0.5	
2.13	Формула (29): $1 - k_1 = \left(1 - k_0\right)^2$	0.5	1.5
	Формула (30): $k_1 = 2k_0 - k_0^2$	0.2	
	Численное значение (31): $K_2 = k\Phi = 0.06$	0.4	
	Численное значение (32): $\Delta t_1' \approx 0.7$ °C	0.4	
Итого			**10.0**

Задача 3. Корпускулярная трактовка давления света (10.0 баллов)

Введение

3.1 Пусть концентрация фотонов с энергией ε в падающем излучении равна n, тогда интенсивность волны определяется соотношением

$$I_0 = c\varepsilon n, \tag{1}$$

где c – скорость света.

Число фотонов ΔN, падающих за время Δt на площадку ΔS под углом φ составляет

$$\Delta N = cn\Delta t\Delta S\cos\varphi. \tag{2}$$

Число поглощенных фотонов за это же время составляет

$$\Delta N_a = (1-R)\Delta N, \tag{3}$$

а отраженных

$$\Delta N_r = R\Delta N. \tag{4}$$

Нормальная компонента импульса, передаваемая одним фотоном площадке при поглощении, равен

$$\Delta p_a = \frac{\varepsilon}{c}\cos\varphi, \tag{5}$$

а при отражении

$$\Delta p_r = 2\frac{\varepsilon}{c}\cos\varphi. \tag{6}$$

Полный переданный площадке импульс определяется выражением

$$\Delta p = \Delta N_a \Delta p_a + \Delta N_r \Delta p_r, \tag{7}$$

а искомое давление вычисляется по формуле

$$p_s = \frac{\Delta p}{\Delta S \Delta t} = \frac{I_0}{c}(1+R)\cos^2\varphi . \tag{8}$$

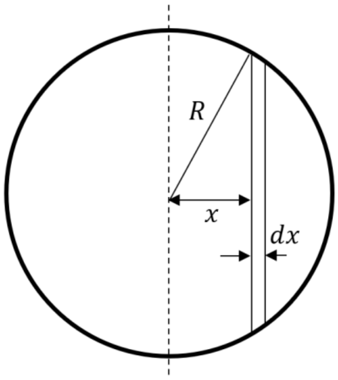
3.2 При нормальном падении $\varphi = 0$ и при полном поглощении $R = 0$ получаем

$$p_s = \frac{I_s}{c} = 4.70 \cdot 10^{-6}\,\text{Па} . \tag{9}$$

и, соответственно, при полном отражении $R = 1$

$$p_s = \frac{2I_s}{c} = 9.40 \cdot 10^{-6}\,\text{Па} . \tag{10}$$

3.3 Рассмотрим сечение сферической поверхности, перпендикулярное падающему потоку света. Для зеркальной части поверхности, которая полностью отражает свет, момент сил равен нулю, так как передаваемый импульс направлен строго по радиусу сферы.



Рассмотрим в сечении полоску, расположенную от центра сферы на расстояниях от x до $x + dx$. Выбранная часть полностью поглощающей поверхности имеет площадь

$$dS = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx , \tag{11}$$

а число поглощаемых фотонов в единицу времени равно

$$\Delta N_a = \frac{I_s}{\varepsilon} dS , \tag{12}$$

каждый из которых имеет импульс

$$\Delta p_a = \frac{\varepsilon}{c} . \tag{13}$$

Плечо составляет величину

$$l = x , \tag{14}$$

поэтому момент сил, действующий на выбранную площадку равен

$$dM = \Delta N_a \Delta p_a l = \frac{2I_s}{c}\sqrt{R^2 - x^2}\,x dx , \tag{15}$$

а полный момент сил определяется интегралом

$$M = \int_0^R dM = \frac{2I_s R^3}{3c} = 3.13 \cdot 10^{-6}\,\text{Н} \cdot \text{м} . \tag{16}$$

Космическая станция с зеркальным парусом

3.4 В начальной точке покоя станции массой m с парусом площадью S, находящемся на расстоянии R_0 от Солнца массой M_S гравитационная сила в точности уравновешивается силой давления света, что приводит к уравнению

$$G\frac{M_S m}{R_0^2} = \frac{2n_0\varepsilon}{c} S , \tag{17}$$

где G – гравитационная постоянная, n_0 – концентрация фотонов солнечного излучения с энергией ε в точке нахождения станции.

Ввиду сферически симметричного расширения, концентрация фотонов изменяется с расстоянием от Солнца r по закону

$$n(r) = n_0 \left(\frac{R_0}{r}\right)^2. \tag{18}$$

Начальный импульс фотонов до столкновения с парусом равен

$$p_0 = \frac{\varepsilon}{c}, \tag{19}$$

а конечный составляет

$$p = \frac{\varepsilon}{c}\frac{c-V}{c+V}. \tag{20}$$

Это соотношение легко получается из кинематики и представляет собой формулу для эффекта Доплера. Кроме того, импульс фотона после отражения от зеркала несложно получить из законов сохранения импульса и энергии, рассмотрев абсолютно упругое столкновение фотона с движущимся массивным зеркалом.

Таким образом изменение импульса фотона передается зеркалу и равно

$$\Delta p = p - p_0 = \frac{2\varepsilon}{c+V}, \tag{21}$$

а количество фотонов, падающих в единицу времени Δt на парус, составляет

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = n(r)S(c-V). \tag{22}$$

Отсюда сила, действующая на станцию со стороны света, определяется выражением

$$f = \Delta p\frac{\Delta N}{\Delta t} = 2n_0\varepsilon S\left(\frac{R_0}{r}\right)^2\frac{c-V}{c+V} = G\frac{M_S m}{r^2}\frac{c-V}{c+V}. \tag{23}$$

На станцию также действует сила гравитационного притяжения со стороны Солнца равная

$$f_g = G\frac{M_S m}{r^2}. \tag{24}$$

а значит движение станции в радиальном направлении описывается вторым законом Ньютона в виде

$$m\frac{dV}{dt} = f - f_g = -2G\frac{M_S m}{r^2}\frac{V}{c+V}. \tag{25}$$

Принимая во внимание, что для малого перемещения

$$dr = Vdt, \tag{26}$$

из выражения (25) получаем дифференциальное уравнение

$$(c+V)dV = -2GM_S\frac{dr}{r^2}, \tag{27}$$

которое легко интегрируется и дает при условии остановки станции

$$cV_0 + \frac{1}{2}V_0^2 = 2GM_S\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right). \tag{28}$$

Решая уравнение (28), находим искомое расстояние

$$R = \frac{R_0}{1 - \dfrac{(cV_0 + \frac{1}{2}V_0^2)R_0}{2GM_S}}, \tag{29}$$

которое при условии движения Земли по орбите

$$GM_S = V_E^2 r_E, \tag{30}$$

а также соотношения $V \ll c$, дает окончательный ответ

$$R = \frac{R_0}{1 - \dfrac{cV_0R_0}{2V_E^2 r_E}} = 9.93\cdot 10^{10}\,\text{м}. \tag{31}$$

3.5 Из формулы (31) следует, что станция сможет уйти на бесконечность $R \to \infty$, только если знаменатель выражения обратится в ноль, откуда следует

$$V_{\min} = \frac{2V_E^2 r_E}{cR_0} = 18.1 \text{ м/с} . \qquad (32)$$

Эффект Пойнтинга-Робертсона

3.6 Масса пылинка определяется выражением

$$m = \rho \frac{4}{3} \pi a^3 , \qquad (33)$$

а площадь ее поперечного сечения составляет

$$S = \pi a^2 . \qquad (34)$$

Определим эффективную силу, действующую на частицу в результате поглощения света. Чтобы свести ее к давлению света, перейдем в систему отсчета, связанную с частицей. В этой системе отсчета на частицу действует давление света, вычисляемое по формуле (9), но ее направление не совпадает с радиальным ввиду аберрации света, а именно составляет с ним малый угол V/c. Таким образом, в тангенциальном направлении траектории частицы появляется сила, обусловленная поглощением фотонов, равная

$$F = -V \frac{I_S}{c^2} S , \qquad (35)$$

которая создает момент относительно центра притяжения, равный

$$M = -FR. \qquad (36)$$

Так как движение пылинки является практически круговым, то ее скорость можно записать так

$$V = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} , \qquad (37)$$

а момент импульса относительно притягивающего центра

$$L = mVR . \qquad (38)$$

Собирая совместно уравнения (33)-(38), получаем

$$\frac{dL}{dt} = M , \qquad (39)$$

откуда окончательно находим искомое время в следующем виде

$$\tau = \frac{2\mu \rho a c^2}{3I_S} = 1.27 \cdot 10^8 \text{ с} . \qquad (40)$$

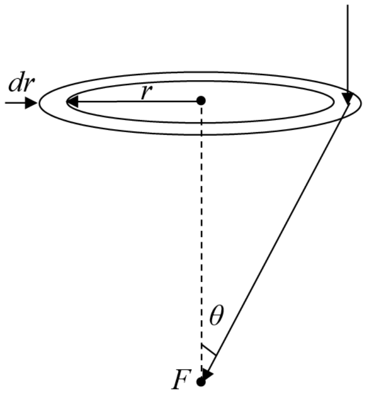
При выводе мы пренебрегли изменением интенсивности излучения Солнца с расстоянием, так как радиус орбиты уменьшился незначительно и соответствующие поправки являются малыми более высокого порядка.

Примечание: последовательное объяснение эффекта Пойнтинга-Робертсона основано на следующей трактовке. В системе отсчета, связанной с частицей, она поглощает солнечное излучение, которое распространяется под малым углом к радиальному направлению, а затем переизлучает накопленную энергию изотропно во всех направлениях. В системе отсчета, связанной с Солнцем, первичное излучение Солнца распространяется в радиальном направлении, а переизлучение самой частицы уже не является изотропным. В первом случае появление момента силы торможения объясняется аберрацией солнечного излучения, а во втором – эффектом Доплера для переизлучения самой частицы.

Лазерный пинцет

3.7 Рассчитаем силу, действующую на первую собирающую линзу, которая равна полному изменению импульса фотонов, падающих на линзу в единицу времени. Очевидно, что импульс изменяется из-за преломления света в стекле, то есть меняется его направление, но не модуль.

Рассмотрим все лучи, проходящие через кольцо на линзе, расположенное от ее центра на расстояниях от r до $r + dr$.



Площадь этого кольца равна

$$dS = 2\pi r dr\ . \tag{41}$$

Изменение продольного импульса фотонов, проходящих в единицу времени через данное кольцо равно

$$dp_{\parallel} = \frac{I}{c}(1-\cos\theta)dS\ , \tag{42}$$

где угол преломления равен

$$\sin\theta = \frac{r}{F}\ , \tag{43}$$

так как все лучи сходятся в фокусе линзы.

Интегрируя полученное выражение по всей поверхности линзы получаем

$$f_{\parallel} = \int_0^R dp_{\parallel} = \frac{\pi I}{c}\left(R^2 - \frac{2}{3F}\left[F^3 - \left(F^2 - R^2\right)^{3/2}\right]\right) \approx \frac{\pi I R^4}{4cF^2} = 2.64\cdot 10^{-17}\ \text{Н}\ . \tag{44}$$

Так как фокусы линзы L и частицы M совпадают, то при выходе из системы «линза-частица», пучок вновь распространяется параллельно оптической оси, а, значит, в результате преломления на частице M импульс фотонов восстанавливается. Следовательно, сила, действующая на частицу M, по величине равна $f_{\parallel}$, но направлена в сторону собирающей линзы. Эта сила втягивает частицу в поле лазерного излучения. В этом заключается принцип работы «лазерного пинцета».

3.8 Рассмотрим все лучи, проходящие через элемент полукольца на линзе, расположенный от ее центра на расстояниях от r до $r+dr$, а также отсекаемый азимутальными углами от β до $\beta + d\beta$. Площадь этого элемента полукольца равна

$$dS = r dr d\beta\ . \tag{45}$$

Изменение поперечного импульса фотонов, проходящих в единицу времени через данное кольцо равно

$$dp_{\perp} = \frac{I}{c}\sin\theta\sin\beta dS\ , \tag{46}$$

а интегрирование по всей поверхности половины линзы с учетом формулы (43) приводит к выражению

$$f_{\perp} = \int dp_{\perp} = \frac{I}{cF}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2 dr \sin\beta d\beta = \frac{2IR^3}{3cF} = 2.24\cdot 10^{-16}\ \text{Н}\ . \tag{47}$$

	Содержание	Баллы	
3.1	Формула (1): $I_0 = c\varepsilon n$	0.1	**0.8**
	Формула (2): $\Delta N = cn\Delta t\Delta S\cos\varphi$	0.1	
	Формула (3): $\Delta N_a = (1-R)\Delta N$	0.1	
	Формула (4): $\Delta N_r = R\Delta N$	0.1	
	Формула (5): $\Delta p_a = \dfrac{\varepsilon}{c}\cos\varphi$	0.1	

	Формула (6): $\Delta p_r = 2\dfrac{\varepsilon}{c}\cos\varphi$	0.1	
	Формула (7): $\Delta p = \Delta N_a \Delta p_a + \Delta N_r \Delta p_r$	0.1	
	Формула (8): $p_s = \dfrac{I_0}{c}(1+R)\cos^2\varphi$	0.1	
3.2	Формула (9): $p_s = \dfrac{I_s}{c}$	0.1	**0.4**
	Численное значение в формуле (9): $p_s = 4.70\cdot 10^{-6}$ Па	0.1	
	Формула (10): $p_s = \dfrac{2I_s}{c}$	0.1	
	Численное значение в формуле (10): $p_s = 9.40\cdot 10^{-6}$ Па	0.1	
3.3	Момент сил на зеркальную часть сферы $M = 0$	0.1	**1.0**
	Формула (11): $dS = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$	0.1	
	Формула (12): $\Delta N_a = \dfrac{I_s}{\varepsilon} dS$	0.1	
	Формула (13): $\Delta p_a = \dfrac{\varepsilon}{c}$	0.1	
	Формула (14): $l = x$	0.1	
	Формула (15): $dM = \dfrac{2I_s}{c}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$	0.1	
	Формула (16): $M = \dfrac{2I_s R^3}{3c}$	0.2	
	Численное значение в формуле (16): $M = 3.13\cdot 10^{-6}$ Н $\cdot$ м	0.2	
3.4	Формула (17): $G\dfrac{M_S m}{R_0^2} = \dfrac{2n_0\varepsilon}{c} S$	0.4	**3.6**
	Формула (18): $n(r) = n_0\left(\dfrac{R_0}{r}\right)^2$	0.2	
	Формула (19): $p_0 = \dfrac{\varepsilon}{c}$	0.1	
	Формула (20): $p = \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{c-V}{c+V}$	0.2	
	Формула (21): $\Delta p = p - p_0 = \dfrac{2\varepsilon}{c+V}$	0.1	
	Формула (22): $\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = n(r)S(c-V)$	0.2	
	Формула (23): $f = G\dfrac{M_S m}{r^2}\dfrac{c-V}{c+V}$	0.2	
	Формула (24): $f_g = G\dfrac{M_S m}{r^2}$	0.2	
	Формула (25): $m\dfrac{dV}{dt} = -2G\dfrac{M_S m}{r^2}\dfrac{V}{c+V}$	0.4	
	Формула (26): $dr = Vdt$	0.2	
	Формула (27): $(c+V)dV = -2GM_S\dfrac{dr}{r^2}$	0.2	

	Формула (28): $cV_0 + \frac{1}{2}V_0^2 = 2GM_S\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R}\right)$	0.2	
	Формула (29): $R = \dfrac{R_0}{1 - \dfrac{(cV_0 + \frac{1}{2}V_0^2)R_0}{2GM_S}}$	0.2	
	Формула (30): $GM_S = V_E^2 r_E$	0.2	
	Формула (31): $R = \dfrac{R_0}{1 - \dfrac{cV_0R_0}{2V_E^2 r_E}}$	0.4	
	Численное значение в формуле (31): $R = 9.93\cdot10^{10}$ м	0.2	
3.5	Формула (32): $V_{\min} = \dfrac{2V_E^2 r_E}{cR_0}$	0.2	**0.4**
	Численное значение в формуле (32): $V_{\min} = 18.1$ м/с	0.2	
3.6	Формула (33): $m = \rho\frac{4}{3}\pi a^3$	0.1	**2.0**
	Формула (34): $S = \pi a^2$	0.1	
	Формула (35): $F = -V\dfrac{I_S}{c^2}S$	0.4	
	Формула (36): $M = FR$	0.2	
	Формула (37): $V = \sqrt{\dfrac{GM_S}{R}}$	0.2	
	Формула (38): $L = mVR$	0.2	
	Формула (39): $\dfrac{dL}{dt} = M$	0.2	
	Формула (40): $\tau = \dfrac{2\mu\rho ac^2}{3I_S}$	0.4	
	Численное значение в формуле (40): $\tau = 1.27\cdot10^8$ с	0.2	
3.7	Формула (41): $dS = 2\pi r dr$	0.1	**1.0**
	Формула (42): $dp_{\parallel} = \dfrac{I}{c}(1-\cos\theta)dS$	0.2	
	Формула (43): $\sin\theta = \dfrac{r}{F}$	0.2	
	Формула (44): $f_{\parallel} = \dfrac{\pi I}{c}\left(R^2 - \dfrac{2}{3F}\left[F^3 - \left(F^2 - R^2\right)^{3/2}\right]\right) \approx \dfrac{\pi IR^4}{4cF^2}$	0.3	
	Численное значение в формуле (44): $f_{\parallel} = 2.64\cdot10^{-17}$ Н	0.2	
3.8	Формула (45): $dS = rdrd\beta$	0.1	**0.8**
	Формула (46): $dp_{\perp} = \dfrac{I}{c}\sin\theta\sin\beta dS$	0.2	
	Формула (47): $f_{\perp} = \dfrac{2IR^3}{3cF}$	0.3	
	Численное значение в формуле (47): $f_{\perp} = 2.24\cdot10^{-16}$ Н	0.2	
Итого			**10.0**