

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

11 января 2019 года

**Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:**

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
7. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
  - Пронумерованные по порядку *Writing sheets*.
  - Черновые листы.
  - Неиспользованные листы.
  - Отпечатанные условия задачи.

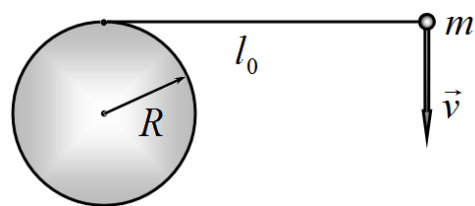
Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

### Задача 1 (10,0 балла)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

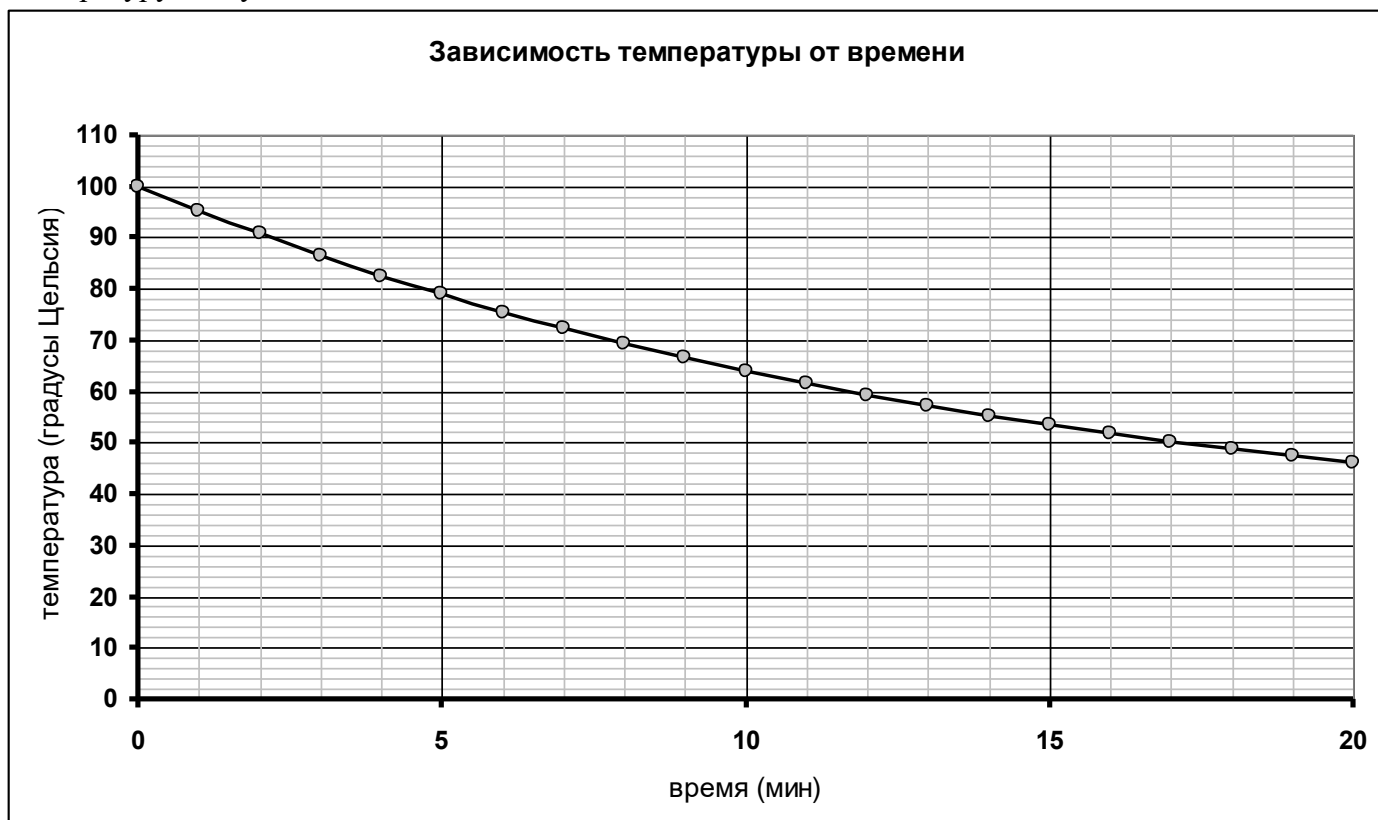
#### Задача 1А (4,0 балла)

Вертикальный цилиндр радиуса  $R$  укреплен на гладкой горизонтальной поверхности. На цилиндр плотно намотана нить, свободный конец которой длиной  $l_0$  соединен с небольшой шайбой массы  $m$ . Шайбе сообщили горизонтальную скорость  $v$ , перпендикулярную нити (см. рис.). Через какое время после этого нить порвется, если максимальная сила, которую она выдерживает, равна  $T$ .



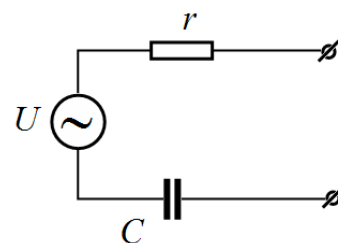
#### Задача 1В (3,0 балла)

Тело остывает в воздухе так, что скорость теплообмена пропорциональна разности температур тела и воздуха. На графике показана зависимость температуры тела от времени. Найдите температуру воздуха.



#### Задача 1С (3,0 балла)

Эквивалентная схема реального источника переменного напряжения частоты  $\omega = 1.00 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$  состоит из идеального источника напряжения амплитудой  $U = 15.0 \text{ В}$ , резистора  $r = 2019 \text{ Ом}$  и конденсатора  $C = 100 \text{ мкФ}$ . К источнику можно подключать в качестве нагрузки различные схемы из резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности. При какой нагрузке выделяющаяся в ней тепловая мощность будет максимальна? Предложите схему нагрузки и рассчитайте параметры входящих в неё элементов. Если вы нашли несколько решений, приведите самый простой вариант. Найдите также самую максимальную мощность.



## Задача 2. Проводники в электрическом поле (10,0 балла)

При помещении проводника в постоянное внешнее электрическое поле на его поверхности появляются электрические заряды. Это явление называется электростатической индукцией, а сами заряды – индуцированными. Оно обусловлено тем, что в проводнике имеется большое количество свободных зарядов, как правило электронов, которые могут свободно перемещаться внутри него.

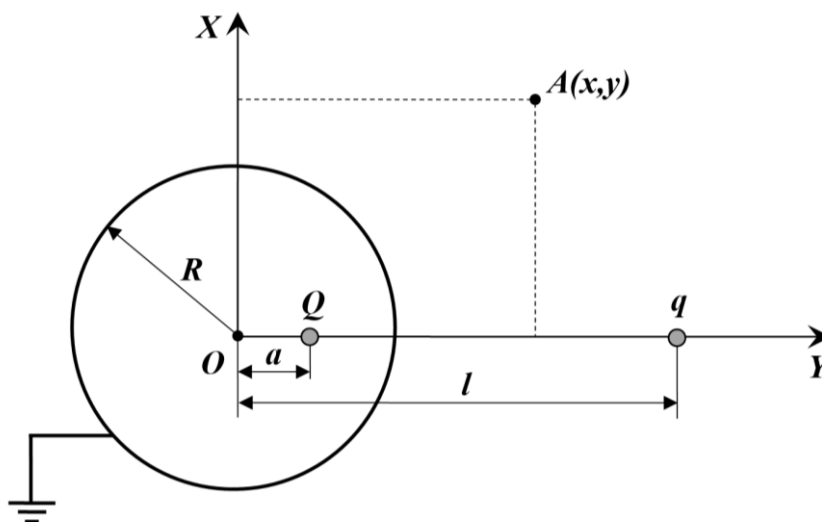
Распределение индуцированных зарядов для проводника произвольной формы может иметь достаточно сложный вид, но при этом остаются справедливыми следующие утверждения:

- 1) Напряженность электрического поля внутри проводника равна нулю.
- 2) Напряженность поля вблизи поверхности проводника направлена по нормали к ней.
- 3) Индуцированные заряды располагаются только на поверхности проводника.
- 4) Все точки проводника имеют одинаковый потенциал.

В этой задаче мы рассмотрим несколько приемов расчета электрического поля в присутствии проводников и применим их к конкретной физической ситуации. Считайте известной электрическую постоянную  $\epsilon_0$ .

### Проводящий шар и точечный заряд

Проводящий шар радиуса  $R$  заземлен и на расстоянии  $l$  от него располагается точечный заряд  $q$ . При этом, в соответствии с изложенным выше, на шаре появляются индуцированные заряды, которые искажают поле точечного заряда  $q$ . К этой ситуации применим метод изображений, суть которого состоит в следующем. Электрическое поле вне шара можно представить как суперпозицию поля точечного заряда  $q$  и поля некоторого фиктивного точечного заряда  $Q$ , расположенного внутри шара на расстоянии  $a$  от его центра на линии, соединяющей точечный заряд  $q$  с самим центром. Для расчета суммарного электрического поля воспользуемся декартовой системой координат на плоскости, показанной на рисунке ниже. Этого будет вполне достаточно, так как система обладает осевой симметрией.



2.1 Рассчитайте потенциал электрического поля в произвольной точке  $A$  с координатами  $(x, y)$ , лежащей вне шара. Ответ выразите через  $q, Q, l, a, x, y, \epsilon_0$ .

2.2 Используя полученное выше выражение, рассчитайте потенциал электрического поля на поверхности шара. Ответ выразите через  $q, Q, l, a, x, R, \epsilon_0$ .

2.3 Используя ответ из пункта 2.2, найдите величину заряда  $Q$  и расстояние  $a$ , выразив их через  $q, l, R$ .

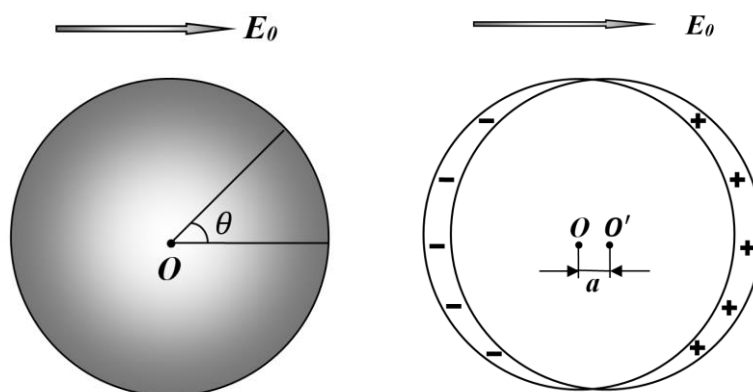
2.4 Рассчитайте работу  $A$  которую надо совершить над точечным зарядом  $q$ , чтобы очень медленно удалить его на бесконечность. Ответ выразите через  $q, l, R, \epsilon_0$ .

2.5 Найдите собственную энергию взаимодействия  $W$  индуцированных зарядов друг с другом и выразите ее через  $q, l, R, \epsilon_0$ .

### Проводящий шар в однородном поле

Проводящий шар радиуса  $R$  помещается во внешнее однородное электрическое поле напряженностью  $E_0$ . В этом случае поле индуцированных электрических зарядов можно представить как суперпозицию поля двух фиктивных однородно заряженных шаров радиуса  $R$ , расположенных

на очень малом расстоянии  $a \ll R$  друг от друга. Суммарный заряд этих шаров равен нулю в силу закона сохранения заряда, поэтому можно считать, что один из них заряжен с объемной плотностью заряда  $\rho$ , а второй – с объемной плотностью  $-\rho$ .



2.6 Рассчитайте напряженность электрического поля  $E_\rho$  внутри однородно заряженного шара с объемной плотностью  $\rho$  на расстоянии  $r$  от его центра. Ответ выразите через  $\rho, r, \epsilon_0$ .

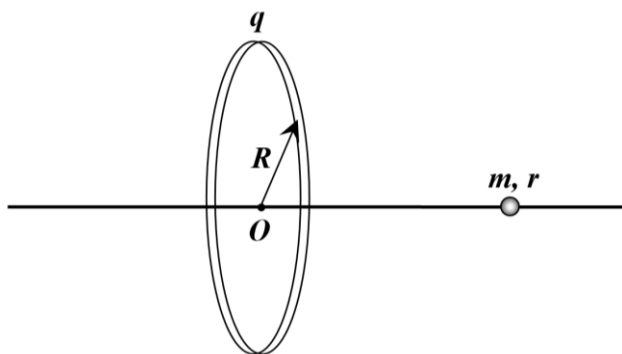
2.7 Рассчитайте напряженность электрического поля в области пересечения двух фиктивных шаров. Ответ выразите через  $\rho, a, \epsilon_0$ .

2.8 Найдите поверхностную плотность индуцированных зарядов  $\sigma$  в зависимости от угла  $\theta$ . Ответ выразите через  $E_0, \theta, \epsilon_0$ .

2.9 Найдите напряженность электрического поля  $E$  снаружи шара вблизи точки на его поверхности, характеризуемой углом  $\theta$ . Ответ выразите через  $E_0, \theta$ .

### Проводящий шарик и заряженное кольцо

Тонкое кольцо радиуса  $R$  заряжено равномерно по своей длине зарядом  $q$ . По непроводящей спице, расположенной вдоль оси кольца, может скользить без трения незаряженный маленький проводящий шарик радиуса  $r$  и массы  $m$ .

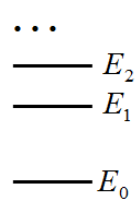


2.10 Вычислите частоту  $\omega$  малых колебаний шарика возле положения равновесия. Ответ выразите через  $q, R, r, m, \epsilon_0$ .

2.11 Изначально шарик расположен в центре кольца и находится в состоянии покоя. Найдите работу  $A$ , которую надо совершить, чтобы очень медленно увести шарик вдоль спицы на бесконечность. Ответ выразите через  $q, R, r, \epsilon_0$ .

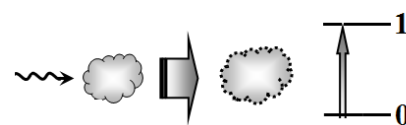
### Задача 3. Лазер (10,0 балла)

Согласно квантовой теории молекула может находиться только в определенных состояниях, характеризующихся дискретными значениями энергий  $E_0, E_1, E_2, \dots$ . Эти состояния изображаются горизонтальными отрезками на вертикальной шкале энергий и пронумерованы в порядке возрастания энергии, начиная с 0. При отсутствии внешних воздействий молекула находится в состоянии с номером 0 и минимально возможным значением энергии  $E_0$ . Это состояние называется основным, а остальные – возбужденными. Молекула может переходить из одного энергетического состояния в другое, поглощая или испуская световые кванты – фотоны. Интенсивность светового потока будем характеризовать плотностью потока фотонов  $I$ , то есть числом фотонов, проходящих перпендикулярно через единичную площадку в единицу времени. Очевидно, размерность этой величины равна  $[I] = \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ .



Для дальнейшего рассмотрения необходимо принимать во внимание следующие процессы, происходящие при прохождении света через вещество.

**Поглощение.** Если молекула находится в основном состоянии 0, то она может поглотить фотон и перейти в возбужденное состояние 1. Такой переход возможен, если энергия фотона равна разности энергий возбужденного и основного состояний,  $h\nu_{01} = E_1 - E_0$ , где  $\nu_{01}$

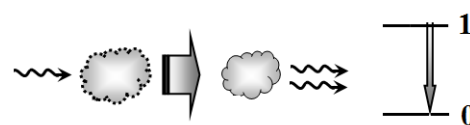


– частота фотона, а  $h = 6.63 \cdot 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка. Если в основном состоянии 0 находится  $N_0$  молекул, то число молекул  $dN$ , поглотивших фотоны и перешедших в возбужденное состояние за очень малый промежуток времени  $dt$ , будет равно

$$dN = I\sigma_{01}N_0dt, \tag{1}$$

где величина  $\sigma_{01}$  называется сечением поглощения и определяется свойствами молекул.

**Вынужденное излучение.** Если молекула находится в возбужденном состоянии 1, то под воздействием фотона с частотой  $\nu_{01}$  она может перейти в основное состояние 0 с испусканием еще одного фотона, который полностью идентичен первому и распространяется в том же направлении, имеет ту же энергию и поляризацию. Число таких переходов  $dN$  за очень малый промежуток времени  $dt$  описывается формулой, аналогичной формуле (1)



$$dN = I\sigma_{10}N_1dt, \tag{2}$$

где  $N_1$  – число молекул, находящихся в возбужденном состоянии 1 с энергией  $E_1$ ,  $\sigma_{10}$  – сечение вынужденного излучения.

**Спонтанное излучение.** Молекула, находящаяся в возбужденном состоянии, может самопроизвольно перейти в основное состояние с испусканием фотона. В отличие от вынужденного излучения, направление вылета и поляризация фотона случайны, а энергия может немного варьироваться, поэтому спонтанное излучение не приводит к усилению светового потока. Число спонтанных переходов  $dN$  из возбужденного состояния 1 в основное 0 за очень малый промежуток времени  $dt$  записывается как



$$dN = AN_1dt = \frac{1}{\tau}N_1dt, \tag{3}$$

где  $N_1$  – по-прежнему число молекул, находящихся в возбужденном состоянии 1 с энергией  $E_1$ ,  $A$  – вероятность перехода или коэффициент Эйнштейна, а обратная ей величина  $\tau = A^{-1}$  называется временем жизни в возбужденном состоянии.

Для описания состояний молекулы удобно использовать не полное число молекул  $N_k$ , находящихся в состоянии  $k$ , а его отношение к общему числу молекул  $N$

$$n_k = \frac{N_k}{N}, \tag{4}$$

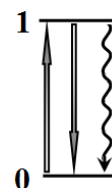
Эта величина называется *населенностью состояния*. Для населенностей выполняется условие нормировки: сумма населенностей всех состояний молекул равна единице, то есть

$$n_0 + n_1 + n_2 + \dots = 1. \quad (5)$$

Если число молекул в некотором возбужденном состоянии превышает число молекул в основном состоянии, то такое состояние среды называется *инверсной населенностью*, при этом вынужденное излучение может преобладать над поглощением, что приведет к возрастанию интенсивности светового потока, распространяющегося в такой среде. Это явление и используется в оптических квантовых генераторах света, называемых лазерами. Инверсная населенность создается с помощью внешнего источника энергии, называемого накачкой. В данной задаче рассматривается работа лазера с оптической накачкой, когда инверсная населенность создается под действием внешнего светового потока. В отличие от излучения накачки, световой поток лазера является монохроматическим, когерентным, поляризованным и узконаправленным.

**Инверсная населенность: двухуровневая схема**

Рассмотрим некоторую среду, которая находится в монохроматическом световом потоке накачки интенсивности  $I_0$ . Падающий световой поток приводит к переходам молекул только между двумя состояниями, основным 0 и возбужденным 1. Сечения поглощения  $\sigma_{01}$  и вынужденного излучения  $\sigma_{10}$  равны  $\sigma_{10} = \sigma_{01} = \sigma$ , а время жизни в возбужденном состоянии равно  $\tau$ .



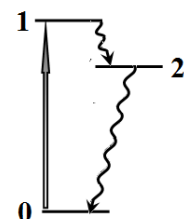
**3.1** Запишите уравнение, описывающее изменение населенности  $n_1$  возбужденного состояния со временем, то есть выразите производную  $dn_1/dt$  через  $n_1$ ,  $I_0$ ,  $\sigma$  и  $\tau$ .

**3.2** Найдите населенность возбужденного состояния  $\bar{n}_1$  и разность населенностей возбужденного и основного состояния  $(\bar{n}_1 - \bar{n}_0)$  в стационарном режиме в зависимости от интенсивности накачки  $I_0$ . Выразите ответы через параметр  $I_0\sigma\tau$ .

**3.3** Возможно ли в этом случае усиление лазерного светового потока?

**Инверсная населенность: трехуровневая схема**

В возможных переходах принимают участие три состояния молекулы: основное 0 и два возбужденных 1, 2. Под действием внешнего светового потока накачки  $I_0$  молекула может перейти из основного состояния 0 в первое возбужденное состояние 1. Сечение поглощения этого перехода равно  $\sigma$ . В результате внутримолекулярной релаксации молекула, попавшая в состояние 1, практически мгновенно переходит в более низкое энергетическое состояние 2, время жизни в котором составляет  $\tau$ . В этом случае считайте, что вынужденное излучение полностью отсутствует.



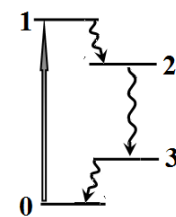
**3.4** Запишите уравнение, описывающее изменение населенности  $n_2$  возбужденного состояния 2 со временем.

**3.5** Найдите населенность  $\bar{n}_2$  возбужденного состояния 2 и разность населенностей возбужденного и основного состояния  $(\bar{n}_2 - \bar{n}_0)$  в стационарном режиме в зависимости от интенсивности накачки  $I_0$ . Выразите ответы через параметр  $I_0\sigma\tau$ .

**3.6** При каком минимальном значении параметра  $I_0\sigma\tau$  возможно усиление лазерного излучения с частотой, равной частоте перехода  $2 \rightarrow 0$ ?

**Инверсная населенность: четырехуровневая схема**

В возможных переходах принимают участие четыре состояния молекулы. Под действием светового потока накачки  $I_0$  молекула может перейти из основного состояния 0 в первое возбужденное состояние 1. Сечение поглощения этого перехода равно  $\sigma$ . В результате внутримолекулярной релаксации молекула, попавшая в состояние 1, практически мгновенно переходит в более низкое энергетическое состояние 2, время жизни в котором составляет  $\tau$ . Из этого состояния молекула переходит в промежуточное состояние 3, причем этот переход происходит с излучением фотона. В этом случае также считайте, что вынужденное излучение полностью отсутствует. В результате внутримолекулярной релаксации

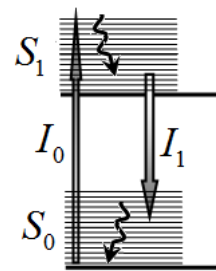


молекула, попавшая в состояние 3, практически мгновенно переходит в основное энергетическое состояние 0.

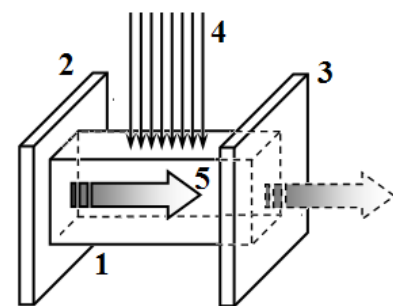
3.7 При каком минимальном значении параметра  $I_0\sigma\tau$  возможно усиление лазерного излучения с частотой, равной частоте перехода  $2 \rightarrow 3$ ?

### Резонатор

Четырехуровневая схема реализуется в растворах красителей. Красители – сложные молекулы, имеющие множество энергетических состояний. Поэтому возможные энергетические состояния группируются в полосы: основное состояние  $S_0$  содержит практически непрерывный спектр подуровней, аналогично и первое возбужденное состояние  $S_1$ . Таким образом, имеются две полосы возможных состояний. Поглощение света светового потока  $I_0$  приводит к переходам из подуровней основного состояния  $S_0$  в различные подуровни возбужденного состояния  $S_1$ . Переходы между подуровнями состояния 1 происходят практически мгновенно, поэтому вынужденное излучение лазерного светового потока  $I_1$  происходит на меньших частотах, а вынужденным излучением под действием светового потока накачки  $I_0$  можно пренебречь. В описанном приближении достаточно знать населенность основного и возбужденного состояний. В качестве красителя используется родамин 6Ж, для которого: сечение поглощения в переходе  $S_0 \rightarrow S_1$   $\sigma_A = 3,90 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ ; сечение вынужденного излучения  $S_1 \rightarrow S_0$   $\sigma_E = 2,20 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2$ ; время жизни молекулы в состоянии  $S_1$  равно  $\tau = 4,20 \cdot 10^{-9} \text{ с}$ .

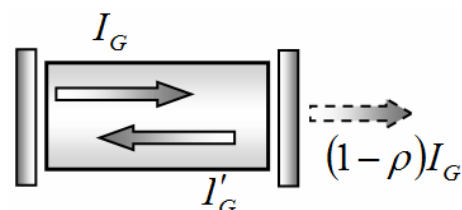


Для генерации света кювету 1 с раствором родамина 6Ж помещают между двумя параллельными зеркалами 2 и 3, образующими резонатор. Накачка раствора проводится однородным световым потоком 4 интенсивности  $I_0$ , частота излучения которого соответствует максимуму поглощения раствора. Поток излучения накачки 4 направляется перпендикулярно оси резонатора и полностью освещает всю кювету. Интенсивность этого потока, конечно, уменьшается при прохождении через раствор, однако, для проведения расчетов считайте величину  $I_0$  постоянной во всем объеме



резонатора, считая ее усредненной по этому объему. Лазерный световой поток 5, генерируемый в резонаторе, распространяется вдоль оси резонатора, а его усиление происходит благодаря многократным отражениям от зеркал резонатора. Считайте, что зеркало 2 является полностью отражающим, а второе зеркало 3 – полупрозрачным с коэффициентом отражения  $\rho$ . Поглощением света в зеркалах, растворителе, рассеянием света и другими потерями можно пренебречь. Резонатор имеет следующие параметры: длина кюветы  $l = 3,00 \text{ см}$ ; концентрация родамина 6Ж  $\gamma = 1,30 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ ; коэффициент отражения полупрозрачного зеркала  $\rho = 0,90$ ; показатель преломления раствора родамина 6Ж  $r = 1,50$ . Скорость света равна  $c = 3,00 \cdot 10^{10} \text{ см/с}$ .

Для упрощенного описания лазерного светового потока, распространяющегося вдоль оси резонатора, будем рассматривать интенсивности, усредненные по длине резонатора. Обозначим среднюю интенсивность лазерного светового потока, распространяющегося к частично прозрачному зеркалу, как  $I_G$ , а интенсивность лазерного светового потока, распространяющегося в противоположном направлении, как  $I'_G$ . Так коэффициент пропускания зеркала 3 мал, то можно считать, что средние интенсивности этих потоков примерно равны  $I_G \approx I'_G$ .



3.8 Пусть в резонаторе создан лазерный световой поток  $I_G$ . Покажите, что в отсутствии поглощения и вынужденного излучения света, изменение интенсивности лазерного потока с течением времени описывается уравнением

$$\frac{dI_G}{dt} = -\frac{1}{T} I_G, \tag{6}$$

где  $T$  – так называемое время жизни фотона в резонаторе. Выразите параметр  $T$  через параметры резонатора. Рассчитайте его численное значение.

**3.9** Покажите, что в отсутствии потерь фотонов через зеркало 3 интенсивность лазерного потока  $I_G$  изменяется со временем в соответствии с уравнением

$$\frac{dI_G}{dt} = KnI_G, \quad (7)$$

где  $n$  – населенность возбужденного состояния родамина 6Ж,  $K$  – коэффициент усиления резонатора. Выразите коэффициент усиления резонатора  $K$  через параметры резонатора и сечение вынужденного излучения родамина 6Ж  $\sigma_E$ . Рассчитайте численное значение этого параметра.

### Стационарный режим генерации

В этой части будем считать, что интенсивность накачки постоянна и не зависит от времени. В стационарном режиме остаются постоянными и остальные величины: населенность возбужденного состояния  $n$  и интенсивность генерации  $I_G$ . Также считайте, что населенность возбужденного состояния  $n \ll 1$ .

**3.10** Запишите систему уравнений, описывающих изменение населенности возбужденного состояния  $\frac{dn}{dt}$  и интенсивности лазерного потока в резонаторе  $\frac{dI_G}{dt}$ .

**3.11** Получите формулу и рассчитайте численно минимальное (пороговое) значение населенности возбужденного состояния  $n_{th}$ , при которой начинается усиление (генерация) лазерного светового потока в резонаторе. Выразите это значение через параметры резонатора  $K, T$ .

**3.12** Получите формулу и рассчитайте численно минимальное (пороговое) значение светового потока накачки  $I_{0,th}$ , при которой начинается усиление лазерного светового потока в резонаторе.

Пусть длина волны светового потока накачки равна  $\lambda = 520 \text{ нм}$ . Рассчитайте интенсивность накачки  $I_E$  в энергетических единицах  $\text{Вт} / \text{см}^2$ .

**3.13** Найдите зависимость лазерного светового потока на выходе из резонатора от интенсивности светового потока накачки  $I_0$ , выразив ее через отношение  $\eta = I_0 / I_{0,th}$ , называемое превышением порога, и характеристики молекул. Постройте график зависимости светового потока на выходе из резонатора от  $\eta$ .

**3.14** Найдите квантовый выход генерации  $f = N_E / N_A$ , то есть отношение числа вышедших за единицу времени из резонатора фотонов  $N_E$  к числу поглощенных за ту же единицу времени фотонов  $N_A$ , как функцию параметра  $\eta$ .

### Математическая подсказка для задач теоретического тура

Вам может понадобиться знание следующих интегралов:

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln|ax + b|.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ где } n - \text{целое число}$$