ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

12 января 2018 года

Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и ***Листы для записи*** (***Writing sheets***). Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На ***Writing sheets*** следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону ***Writing sheets***. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы ***Writing sheets***.
7. На каждом использованном ***Writing sheets,*** в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну **(*Country*)**, Ваш код **(*Student Code*),** порядковый номер задачи **(*Question Number*)**, текущий номер каждого листа **(*Page Number*)** и полное количество листов, использованных при решении всех задач **(*Total Number of Pages)***. Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные ***Writing sheets*** были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчёт полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
   - Пронумерованные по порядку ***Writing sheets***;
   - Черновые листы;
   - Неиспользованные листы;
   - Отпечатанные условия задачи

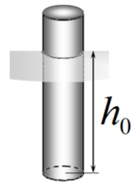
   Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

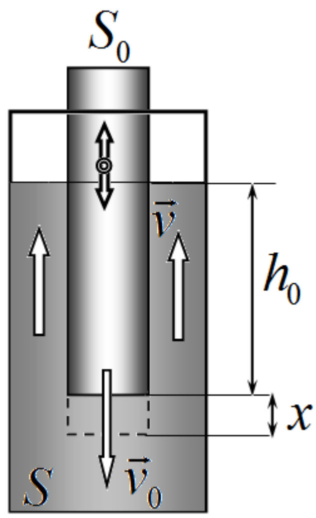
Задача 1 (10,0 балла)

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

Задача A (3,0 балла)

A1. Узкая цилиндрическая пробирка со смещенным центром масс плавает вертикально в воде в очень широком сосуде. В состоянии равновесия пробирка погружена в воду на глубину h_0. Площадь поперечного сечения пробирки равна S_0. Определите период малых вертикальных колебаний пробирки.





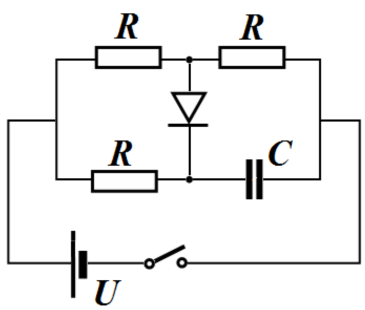
A2. Пробирку помещают в цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения S, заполненный водой. Пробирка совершает малые колебания вдоль оси сосуда.

A2.1. Пробирка опустилась на малую величину x. Выразите изменение потенциальной энергии системы через x, глубину погружения h_0, площади сечений S_0, S, плотность воды ρ и ускорение свободного падения g.

A2.2. Вблизи положения равновесия скорость пробирки равна v_0. Выразите кинетическую энергию системы через скорость пробирки v_0, глубину погружения h_0, площади сечений S_0, S, плотность воды ρ. Считайте, что в зазоре между пробиркой и стенками сосуда вся жидкость движется с одинаковой скоростью v.

A2.3. Найдите период колебаний пробирки в сосуде.

Задача B (4,0 балла)

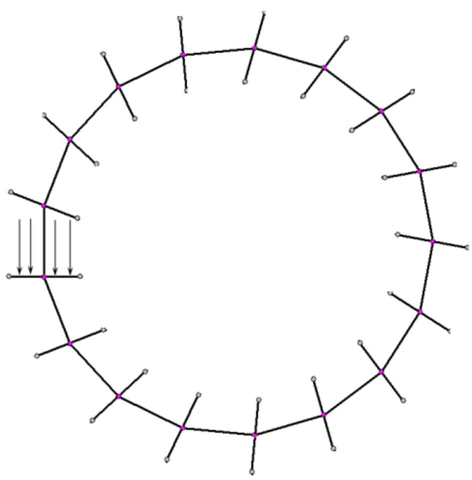


Изображённая на рисунке схема состоит из конденсатора ёмкостью $C = 100$ мкФ, идеального диода, источника постоянного напряжения $U = 10{,}0$ В, трёх одинаковых резисторов сопротивлением $R = 10{,}0$ кОм и ключа. В начальный момент конденсатор не заряжен, ключ разомкнут. После замыкания ключа ток через диод идёт в течение времени $\tau = 462$ мс, а затем прекращается.

1. Найдите ток через диод сразу после замыкания ключа.
2. Найдите полный заряд, протекший через диод.

Задача C (3,0 балла)

В вершинах правильного 17-угольника расположены 17 одинаковых линз. Оптические центры линз находятся точно в вершинах многоугольника, плоскости линз перпендикулярны одной из сторон, примыкающей к линзе. Фокусные расстояния линз равны $F = 10$ см и равны длине стороны 17-угольника. Одну из линз освещают параллельным световым потоком, направленным вдоль ее оптической оси. Оказалось, что один из лучей имеет замкнутую траекторию. Определите радиус окружности, вписанной в эту траекторию. Рассмотрите два случая: все линзы собирающие; все линзы рассеивающие. Считайте все углы малыми, так что $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$.



Задача 2 (10,0 балла)
Физика в горах

Атмосфера реальной планеты, такой как Земля, имеет довольно сложное строение ввиду большого многообразия участвующих в ее формировании процессов и явлений. В этой задаче мы рассмотрим две простые модели нижнего слоя атмосферы, называемого тропосферой, который простирается на высоту до 10-15 км над поверхностью Земли. Для понимания физики некоторых явлений достаточно считать атмосферу Земли состоящей из однокомпонентного двухатомного газа, имеющего молярную массу $\mu_{air} = 28.9 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Часть 1. Изотермическая атмосфера

В атмосфере самый нижний приповерхностный слой имеет практически постоянную температуру, так как он нагревается от поверхности Земли. Поэтому примем в этой части, что температура атмосферы одинакова по всей ее высоте и равна $T_0 = 293$ К, а давление воздуха у поверхности Земли составляет $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Па. Считайте, что ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с^2 не зависит от высоты над поверхностью Земли, так как толщина атмосферы много меньше радиуса Земли $R_E = 6400$ км. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8.31$ Дж/(моль$\cdot$К).

1.1. Найдите и вычислите массу M атмосферы Земли.
1.2. Найдите и вычислите давление воздуха p_H на высоте $H = 1500$ м над поверхностью Земли.

С физической точки зрения интересен вопрос о том, как быстро успевает прогреваться атмосфера при смене дня и ночи. Из наблюдений известна так называемая солнечная постоянная $\alpha = 1367$ Вт/м^2, которая представляет собой суммарную мощность солнечного излучения в районе орбиты Земли, проходящего через единицу поверхности, ориентированной перпендикулярно его потоку.

1.3. Оцените количество теплоты δQ, необходимое для нагревания атмосферы на $\Delta T = 1$ К.
1.4. Найдите и вычислите интервал времени τ, который должно светить Солнце, чтобы сообщить Земле количество теплоты δQ.

Часть 2. Адиабатическая атмосфера

Реальная тропосфера не является изотермической и температура воздуха уменьшается с высотой. Благодаря постоянно протекающим конвективным процессам, тропосфера может считаться практически адиабатической. Пусть температура и давление воздуха у поверхности Земли составляют $T_0 = 293$ К и $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Па соответственно. По-прежнему считайте, что ускорение свободного падения $g = 9.81$ м/с^2 не зависит от высоты над поверхностью Земли.

2.1. Найдите и вычислите температуру воздуха T_H на высоте $H = 1500$ м над поверхностью Земли.
2.2. Найдите и вычислите давление воздуха p_H на высоте $H = 1500$ м над поверхностью Земли.

В построенной модели высота тропосферы Земли определяется достижением некоторой критической температуры, при которой начинают играть существенную роль другие физические процессы.

2.3. Оцените разницу высот ΔH_{atm} тропосферы Земли в дневное и ночное время, если колебание температуры у поверхности за это время составляет $\Delta T_{dn} = 20$ К.

Альпинист начинает восхождение на достаточно высокую гору, у подножия которой температура и давление воздуха равны $T_0 = 293$ К и $p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Па. На высоте $H = 1500$ м он решает сделать привал для того, чтобы вскипятить воду и обнаруживает, что она закипает быстрее обычного. Он открывает имеющийся при себе справочник по физике и находит, что при температуре $T_1 = 373$ К давление насыщенного водяного пара равно $p_1 = p_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Па, а при температуре $T_2 = 365$ К – $p_2 = 0.757 \cdot 10^5$ Па.

2.4. Найдите и вычислите температуру кипения воды на высоте $H = 1500$ м.

После возобновления подъема альпинист обнаруживает, что на некоторой высоте появляется снег и приходится использовать специальное оборудование.

2.5. Найдите и вычислите высоту h_0, на которой альпинист заметил появление снежного покрова на горе.

Альпинист вспомнил разговор с местными жителями перед восхождением, в котором ему сообщили, что снежный покров полностью исчезает с горы при температуре у подножия, превышающей $T = 310$ К.

2.6. Найдите и вычислите высоту H_0 горы, на которую совершает восхождение альпинист.

Поднявшись еще выше по склону горы на некоторую высоту H', альпинист замечает появление тумана. Оглянувшись по сторонам, он отмечает, что облаков нет и ветер отсутствует. Альпинист знает, что молярная масса воды составляет $\mu_{H_2O} = 18.0 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а по прогнозу погоды относительная влажность воздуха у подножия горы составляла $\varphi = 0{,}25$. В справочнике по физике он находит формулу для давления насыщенных паров воды в интервале температур $T \in (250{,}300)$ К, которая имеет следующий вид

$$\ln\frac{p_{vap}}{p_{vap0}} = a + b\ln\frac{T}{T_0},$$

где p_{vap} – давление насыщенных паров при температуре T, p_{vap0} – давление насыщенных паров при температуре T_0, $a = 3.63 \cdot 10^{-2}$, $b = 18.2$ – постоянные. При вычислениях считайте, что пар находится в термодинамическом равновесии с окружающим его воздухом.

2.7. Найдите и вычислите высоту H'.

2.8. Найдите и вычислите минимальную влажность воздуха φ_{min} у подножья горы, при которой на ней еще будет наблюдаться туман.

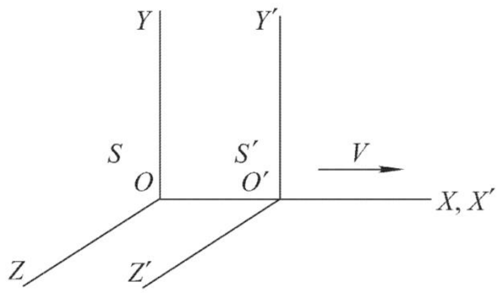
Математическая подсказка

Вам может понадобится знание следующего интеграла: $\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b|$.

Задача 3. Оптика движущихся сред (10,0 балла)

Часть 1. Четырехмерные векторы

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета S и S', из которых вторая движется относительно первой со скоростью V как показано на рисунке. Будем считать, что начала O и O' совпадают в начальный момент времени $t = t' = 0$ по часам обеих систем отсчета S и S'. Известно, что преобразования Лоренца пространственно-временных координат любого события (x', y', z', ct') в системе S' в пространственно-временные координаты (x, y, z, ct) этого же события в системе S имеют вид



$$x = \frac{x' + (V/c)ct'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad ct = \frac{ct' + (V/c)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

где $c = 2{,}9979 \cdot 10^8$ м/с – скорость света.

В формулах преобразований Лоренца пространственные координаты и время специально приведены к одинаковой размерности, так как они вместе образуют так называемый 4-вектор. Известно, что компоненты всех 4-векторов преобразуются одинаковым образом при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. В частности, 4-вектор образуют компоненты импульса и энергия.

Пусть в системе отсчета S движется объект, который имеет полную энергию E и проекции импульса на оси координат OX, OY и OZ равные соответственно p_x, p_y, p_z.

1.1. Запишите преобразования энергии и импульса объекта из системы S в систему S'.

Пусть некоторый объект движется в системе отсчет S, имея полную энергию E, импульс p и массу покоя m. При преобразовании его энергии и импульса из одной системы отсчета в другую величина $E^2 - p^2c^2 = inv$ остается инвариантной.

1.2. Выразите инвариант inv через m и c.

Часть 2. Эффект Доплера и аберрация света

Пусть в системе отсчета S в плоскости XY распространяется электромагнитная волна (ЭМВ) с частотой ω так, что ее направление составляет угол φ с осью OX.

2.1. Найдите частоту ω' ЭМВ, которую зафиксирует наблюдатель в системе отсчета S'.
2.2. Найдите угол φ', который составляет направление распространения ЭМВ в системе отсчета S' с осью $O'X'$.

Астрономические наблюдения показали, что положение вновь открытой массивной звезды X на небесной сфере (то есть по отношению к очень удаленным объектам) не остается постоянным в течение года. Оно описывает эллипс с отношением полуосей 0.900. Эклиптической широтой звезды называется угол между направлением на звезду и плоскостью эклиптики, которую можно считать совпадающей с плоскостью орбиты движения Земли вокруг Солнца.

2.3. Найдите эклиптическую широту δ звезды X в градусах.

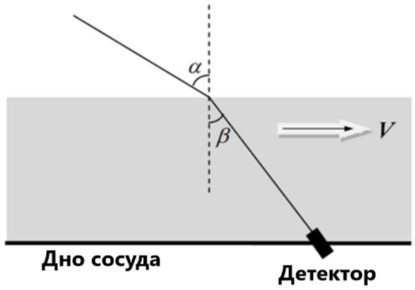
Наблюдение за спектром излучения звезды X показали, что частоты длин волн сдвинуты в красную область. Относительное изменение частоты регистрируемого излучения составляет $(\Delta\omega/\omega)_0 = 9.9945 \cdot 10^{-3}$. Из независимого эксперимента установили, что скорость удаления звезды X от Солнца равна $v_x = \frac{1}{100}c$.

2.4. Найдите и рассчитайте вторую космическую скорость v_{II} на поверхности звезды X.

Часть 3. Свет в движущейся среде

Рассмотрим те же две системы отсчета, что и в Части 1. Пусть в системе отсчета S' в плоскости $X'Y'$ движется объект, скорость которого имеет проекции $u_x{}'$ на ось $O'X'$ и $u_y{}'$ на ось $O'Y'$ соответственно.

3.1. Найдите проекции скорости объекта u_x на ось OX и u_y на ось OY в системе отсчета S.



Рассмотрим поток воды, движущийся относительно дна сосуда со скоростью V. На поверхность воды падает плоская электромагнитная волна, которая составляет угол α с нормалью в лабораторной системе отсчета. На дне сосуда установлен остронаправленный детектор. Считайте коэффициент преломления воды известным и равным n.

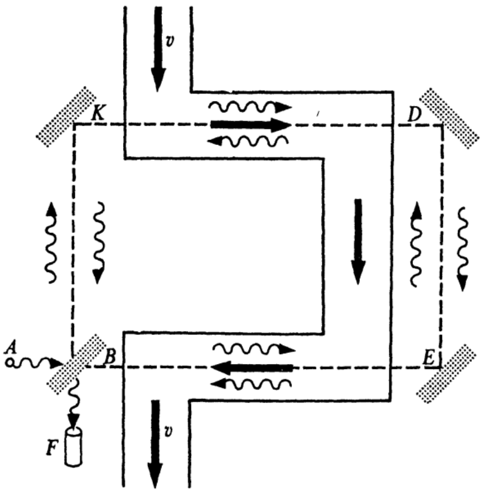
При скорости воды $V \ll c$, выражение для синуса угла β, под которым детектор фиксирует излучение, имеет вид

$$\sin\beta = A_1 + B_1 V.$$

3.2. Найдите A_1, B_1 и выразите их через α и n.

При скорости воды $V \ll c$, выражение для скорости излучения v_m в лабораторной системе отсчета имеет вид

$$v_m = A_2 + B_2 V.$$



3.3. Найдите A_2, B_2 и выразите их через β, n, c.

В 1860 году Физо провел следующий опыт. Монохроматический луч с длиной волны λ от источника A падает на полупрозрачную пластинку B и разделяется на два когерентных луча. Луч, отразившийся от пластинки, проходит путь $BKDEB$ (R, B и D – зеркала), а прошедший через пластинку B – путь $BEDKB$, то есть противоположно предыдущему. Первый луч, возвратившись к пластинке B, частично отражается от нее и попадает в интерферометр F. Второй луч, возвратившись к пластинке B, частично проходит через нее и также попадает в интерферометр F. Оба луча проходят один и тот же путь, причем на участках BE и KD эти пути проходят через жидкость, которая течет по трубе со скоростью v. Полный путь, проходимый каждым из лучей в воде в лабораторной системе отсчета имеет длину $2L$.

3.4. Найдите число полос ΔN, на которое сместится интерференционная картина при изменении скорости жидкости от 0 до v, и выразите его через $L, n, v, c,$ и λ.

В реальном опыте было получено значение $\Delta N = 0.230$ при $L = 1.49$ м, $v = 7.06$ м/с и $\lambda = 536$ нм.

3.5. Определите по этим данным показатель преломления воды n.

Математическая подсказка

Вам может понадобится знание следующего приближенного равенства:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x, \text{ при } x \ll 1.$$