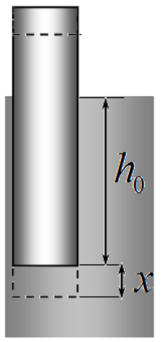
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

Внимание: баллы в оценках не делятся!

Задача 1 (10.0 балла)

Задача А (3.0 балла)



А1. При погружении пробирки на глубину x на нее действует выталкивающая сила Архимеда и сила тяжести. Поэтому уравнение второго закона Ньютона для трубки имеет вид

$$ma = mg - \rho S_0 (h_0 + x) g \,. \tag{1}$$

Здесь m — масса пробирки, ρ — плотность воды.

В положении равновесия выполняется условие

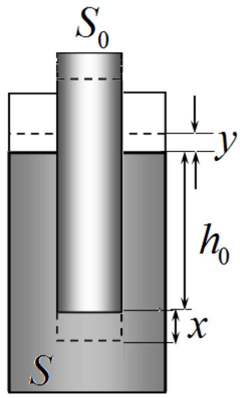
$$mg = \rho S_0 h_0 g \,. \tag{2}$$

Из этих уравнений следует, что

$$a = -\frac{g}{h_0} x \,. \tag{3}$$

Это есть уравнение гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h_0}{g}} \,. \tag{4}$$



А2.1 При опускании пробирки на глубину x ее потенциальная энергия уменьшается на величину

$$\Delta U_1 = -mgx \,. \tag{5}$$

Если пробирка опустится на величину x, то уровень воды в сосуде поднимется на высоту, которая удовлетворяет условию (условие постоянства объема воды):

$$S_0 x = (S - S_0) y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{S_0}{S - S_0} x \,. \tag{6}$$

Следовательно, вода, которая находилась под пробиркой, поднимется выше первоначального уровня воды в сосуде. Масса этой воды

$$\Delta m = \rho S_0 x \,, \tag{7}$$

Ее центр масс поднимется на высоту

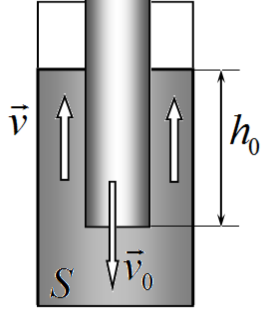
$$\Delta h_C = h_0 + \frac{1}{2}(x + y) = h_0 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{S_0}{S - S_0} x\right) = h_0 + \frac{1}{2}\frac{S}{S - S_0} x \,. \tag{8}$$

Изменение потенциальной энергии воды

$$\Delta U_2 = \Delta m g \Delta h_C = \rho S_0 x g \left(h_0 + \frac{1}{2}\frac{S}{S - S_0} x\right) \tag{9}$$

Полное изменение потенциальной энергии (с учетом соотношения (2)):

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = \frac{1}{2}\frac{S_0 S}{S - S_0} \rho g x^2 \,. \tag{10}$$



А2.2 Если пробирка опускается со скоростью v_0, то воды между стенками и пробиркой поднимается со скоростью

$$v_0 S_0 = v(S - S_0) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{S_0}{S - S_0} v_0 \,. \tag{11}$$

Масса поднимающейся воды равна

$$m_1 = \rho (S - S_0) h_0 \tag{12}$$

Полная кинетическая энергия пробирки и поднимающейся воды оказывается равной

$$K=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{m_1v^2}{2}=\rho S_0h_0\frac{v_0^2}{2}+\rho(S-S_0)h_0\frac{1}{2}\left(\frac{S_0}{S-S_0}v_0\right)^2=\frac{1}{2}\frac{S_0S}{S-S_0}\rho h_0v_0^2. \qquad (13)$$

A2.3 Запишем уравнение закона сохранения энергии для рассматриваемой системы

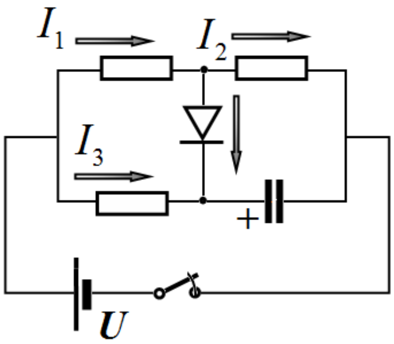
$$\frac{1}{2}\frac{S_0S}{S-S_0}\rho h_0v_0^2+\frac{1}{2}\frac{S_0S}{S-S_0}\rho gx^2=E=const. \qquad (14)$$

Это уравнение также является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T=2\pi\sqrt{\frac{h_0}{g}}. \qquad (15)$$

№	Содержание	баллы	
A1	Формула (1) $ma=mg-\rho S_0(h_0+x)g$	0,2	0,8
	Формула (2) $mg=\rho S_0h_0g$	0,2	
	Формула (3) $a=-\frac{g}{h_0}x$	0,2	
	Формула (4) $T=2\pi\sqrt{\frac{h_0}{g}}$	0,2	
A2.1	Формула (5) $\Delta U_1=-mgx$	0,2	1,2
	Формула (6) $S_0x=(S-S_0)y \Rightarrow y=\frac{S_0}{S-S_0}x$	0,2	
	Формула (7) $\Delta m=\rho S_0x$	0,2	
	Формула (8) $\Delta h_C=h_0+\frac{1}{2}(x+y)=h_0+\frac{1}{2}\left(x+\frac{S_0}{S-S_0}x\right)=h_0+\frac{1}{2}\frac{S}{S-S_0}x$	0,2	
	Формула (9) $\Delta U_2=\Delta mg\Delta h_C=\rho S_0xg\left(h_0+\frac{1}{2}\frac{S}{S-S_0}x\right)$	0,2	
	Формула (10) $\Delta U=\Delta U_1+\Delta U_2=\frac{1}{2}\frac{S_0S}{S-S_0}\rho gx^2$	0,2	
A2.2	Формула (11) $v_0S_0=v(S-S_0) \Rightarrow v=\frac{S_0}{S-S_0}v_0$	0,2	0,6
	Формула (12) $m_1=\rho(S-S_0)h_0$	0,2	
	Формула (13) $K=\frac{mv_0^2}{2}+\frac{m_1v^2}{2}=\rho S_0h_0\frac{v_0^2}{2}+\rho(S-S_0)h_0\frac{1}{2}\left(\frac{S_0}{S-S_0}v_0\right)^2=$ $=\frac{1}{2}\frac{S_0S}{S-S_0}\rho h_0v_0^2$	0,2	
A2.3	Формула (14) $\frac{1}{2}\frac{S_0S}{S-S_0}\rho h_0v_0^2+\frac{1}{2}\frac{S_0S}{S-S_0}\rho gx^2=E=const$	0,2	0,4
	Формула (15) $T=2\pi\sqrt{\frac{h_0}{g}}$	0,2	
Итого			**3,0**

Задача B (4.0 балла)



Пусть I_k — ток через резистор номер k (см. рис.), q_k — заряд, протекший через него к моменту закрывания диода, q — заряд, протекший через диод, Q — заряд конденсатора.

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно нулю, столько же на втором резисторе, поэтому $I_2 = 0$ и ответ на первый вопрос

$$I_0 = I_1(0) = U/R = 1 \text{ мА}. \tag{1}$$

В момент, когда ток через диод станет нулевым, токи через первый и второй резисторы будут одинаковы, поэтому будут одинаковы и напряжения на них: $U_1 = U_2 = U/2$. Такое же напряжение будет на конденсаторе и его заряд в этот момент:

$$Q = CU/2. \tag{2}$$

Правила Кирхгофа дают:

$$q_1 = q + q_2, \tag{3}$$

$$q_3 + q = Q. \tag{4}$$

$$I_1R = I_3R,$$

и, следовательно,

$$q_1 = q_3, \tag{5}$$

$$U = I_1R + I_2R. \tag{6}$$

Интегрируя последнее уравнение по времени от 0 до τ, получим:

$$U\tau = q_1R + q_2R. \tag{7}$$

Решая систему уравнений (2)—(6), получаем ответ:

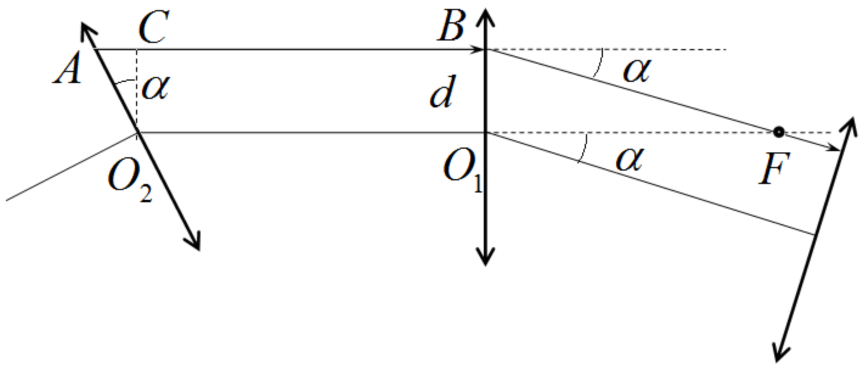
$$q = \frac{1}{3}CU\left(1 - \frac{\tau}{RC}\right) = 179 \text{ мкКл}. \tag{8}$$

Содержание	баллы
Формула (1) $I_0 = I_1(0) = U/R$	0.5
Численное значение $I_0 = 1$ мА	0.1
Формула (2) $Q = CU/2$	0.5
Формула (3) $q_1 = q + q_2$	0.5
Формула (4) $q_3 + q = Q$	0.5
Формула (5) $q_1 = q_3$	0.5
Формула (6) $U = I_1R + I_2R$	0.2
Формула (7) $U\tau = q_1R + q_2R$	0.5
Формула (8) $q = \frac{1}{3}CU\left(1 - \frac{\tau}{RC}\right)$	0.5
Численное значение $q = 179$ мкКл	0.2
Итого	**4.0**

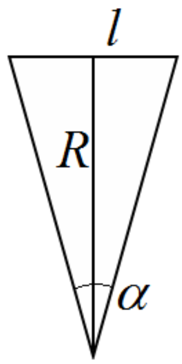
Задача C (3.0 балла)

Рассмотрим луч AB идущий параллельно одной из сторон многоугольника. Чтобы он описал замкнутую траекторию, необходимо, чтобы после преломления в линзе луч шел параллельно следующей стороне. Для этого луч должен отклониться на угол

$$\alpha = \frac{2\pi}{17}. \tag{1}$$



Угол α достаточно мал, поэтому в дальнейшем решении будем это использовать.



Так как этот луч идет параллельно оптической оси, то после преломления он проходит через фокус F. Требуемому условию удовлетворяет луч, идущий на расстоянии

$$d = F\,tg\alpha \approx F\alpha \qquad (2)$$

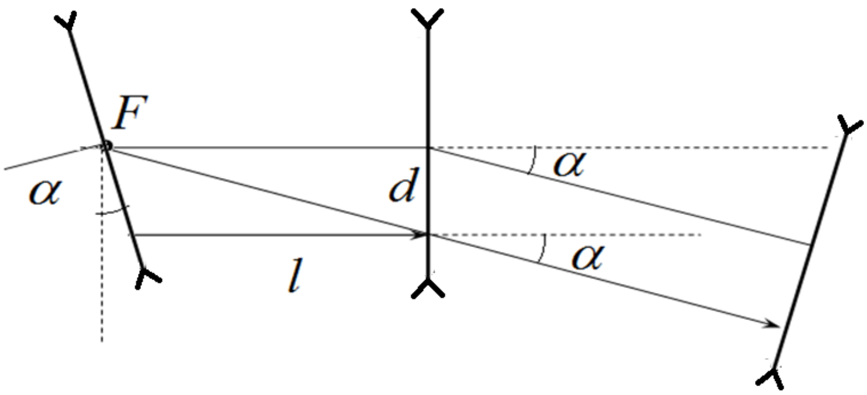
от оптической оси. Очевидно, что этот луч будет распространяться по сторонам правильного 17-угольника, длина стороны которого равна длине отрезка AB, или

$$l = F + d\,tg\,\alpha = F(1+\alpha^2)\,. \qquad (3)$$

Радиус окружности вписанной в этот 17-угольник равен

$$R = \frac{l}{2tg\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{F\left(1+\alpha^2\right)}{\alpha} = 30{,}8\,см\,. \qquad (4)$$

Для рассеивающих линз решение аналогично, только следует рассмотреть луч, попадающий на линзу ниже оптической оси.



В этом случае длина стороны 17-угольника, образуемого траекторией луча будет равна

$$l = F - F\,tg^2\alpha = F\left(1-\alpha^2\right) \qquad (5)$$

Тогда радиус вписанной окружности

$$R = F\frac{1-\alpha^2}{\alpha} = 23{,}4\,см\,. \qquad (6)$$

Содержание	баллы
Формула (1) $\alpha = \dfrac{2\pi}{17}$	0,2
Формула (2) $d = F\,\alpha$	0,6
Формула (3) $l = F + d\,tg\,\alpha \approx F(1+\alpha^2)$	0,4

Формула (4) $R=\frac{l}{2tg\frac{\alpha}{2}}\approx\frac{F(1+\alpha^2)}{\alpha}$	0,4
Не учтен α^2	*(-0,2)*
Численное значение $R=30{,}8\,см$	0,2
Формула (5) $l=F-F\,tg^2\alpha\approx F(1-\alpha^2)$	0,6
Формула (6) $R\approx F\frac{1-\alpha^2}{\alpha}$	0,4
Не учтен α^2	*(-0,2)*
Численное значение $R=23{,}4\,см$	0,2
Итого	**3,0**

Задача 2. Физика в горах (10,0 балла)

1. Изотермическая атмосфера (3,2 балла)

1.1 **[1,0 балла]** Давление воздуха на поверхности Земли вызвано силой тяжести атмосферы, условие равновесия которой требует

$$p_0S=Mg, \tag{1}$$

где

$$S=4\pi R_E^2 \tag{2}$$

представляет собой площадь поверхности Земли.

Из (1) и (2) получаем

$$M=\frac{4\pi p_0R_E^2}{g}=5.32\cdot10^{18}\text{ кг}. \tag{3}$$

1.2 **[1,0 балла]** Давление атмосферы изменяется с высотой вследствие действия силы тяжести на газ. Рассмотрим равновесие слоя газа толщиной dh. Разность давлений dp на этих высотах должна компенсировать силу тяжести слоя газа плотностью ρ, что приводит к уравнению

$$dp=-\rho g dh. \tag{4}$$

С другой стороны из уравнения идеального газа находим связь его плотности с давлением

$$\rho=\frac{\mu_{air}p}{RT_0}. \tag{5}$$

Из выражений (4) и (5) заключаем, что давление атмосферы на высоте h определяется так называемой барометрической формулой

$$p(h)=p_0\exp\left(-\frac{\mu_{air}g}{RT_0}h\right) \tag{6}$$

и составляет на высоте $H=1500$ м

$$p(H)=85.0\cdot10^3\text{ Па}. \tag{7}$$

1.3 **[0,6 балла]** В однородном поле тяжести давление атмосферы определяется массой воздуха, расположенного выше, поэтому процесс нагревания можно считать изобарным, а значит

$$\delta Q=\frac{M}{\mu_{air}}\frac{\gamma R}{\gamma-1}\Delta T=5.33\cdot10^{21}\text{Дж}, \tag{8}$$

где показатель адиабаты двуатомного газа

$$\gamma=7/5. \tag{9}$$

1.4 **[0,6 балла]** За время τ количество энергии Солнца, поглощенной Землей, будет равно

$$\delta Q=\alpha\pi R_E^2\tau. \tag{10}$$

откуда получаем искомое время

$$\tau=\frac{M}{\alpha\pi R_E^2\mu_{air}}\frac{\gamma R\Delta T}{\gamma-1}=30.3\cdot10^3\text{ с}. \tag{11}$$

2. Адиабатическая атмосфера (6,8 балла)

2.1 **[1,2 балла]** Температура атмосферы не остается постоянной по высоте, поэтому уравнение (5) следует переписать в виде

$$\rho = \frac{\mu_{air} p}{RT}. \qquad (12)$$

Так как атмосфера является адиабатической:

$$pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = const. \qquad (13)$$

Решая совместно (4), (12) и (13), получаем

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{(\gamma-1)\mu_{air} g}{\gamma R} = -\beta = const. \qquad (14)$$

Соотношение (14) показывает, что температура адиабатической атмосферы падает с высотой по закону

$$T(h) = T_0 - \frac{(\gamma-1)\mu_{air} g}{\gamma R} h = T_0 - \beta h \qquad (15)$$

и составляет на высоте $H = 1500$ м

$$T(H) = 278 \text{ К}. \qquad (16)$$

2.2 **[0,4 балла]** Распределение давления по высоте определяется уравнением адиабаты (13) и имеет вид

$$p(h) = p_0 \left(\frac{T_0}{T(h)}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_0 \left(\frac{T_0}{T_0 - \beta h}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \qquad (17)$$

и составляет на высоте $H = 1500$ м

$$p(H) = 84.6 \cdot 10^3 \text{ Па}. \qquad (18)$$

2.3 **[0,8 балла]** Так как температура верхней части тропосферы фиксирована, то из формулы (15) следует, что ее высота определяется условием

$$T(h) = T_0 - \beta h = \text{const}. \qquad (19)$$

Отсюда определяем изменение высоты тропосферы в дневное и ночное время

$$\Delta H_{atm} = \frac{\gamma R \Delta T_{dn}}{(\gamma-1)\mu_{air} g} = 2{,}05 \cdot 10^3 \text{ м}. \qquad (20)$$

2.4 **[0,6 балла]** В выбранном диапазоне температур и давлений аппроксимируем давление насыщенного водяного пара линейной функцией его температуры в виде

$$p(T) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1}(T - T_1). \qquad (21)$$

Кипение жидкости начинается в тот момент, когда давление насыщенных паров сравнивается с внешним давлением, что позволяет идти интенсивному процессу парообразования в всплывающих пузырьках. Приравнивая выражения (18) и (21), находим

$$T_{boil} = 368 \text{ К}. \qquad (22)$$

2.5 **[0,8 балла]** Температура плавления льда мало изменяется с давлением, поэтому снег появляется там, где температура достигает 0°C, то есть равна

$$T_{melt} = 273 \text{ К}. \qquad (23)$$

Отсюда с помощью формулы (15) определяем высоту, на которой появляется снежный покров

$$h_0 = \frac{\gamma R (T_0 - T_{melt})}{(\gamma-1)\mu_{air} g} = 2.05 \cdot 10^3 \text{ м}. \qquad (24)$$

2.6 **[0,4 балла]** Если воздух у подножия горы достаточно прогрет, то температура по всей высоте не успевает упасть до нуля градусов по Цельсию. Тогда из формулы (24) находим выслоту горы

$$H_0 = \frac{\gamma R (T - T_{melt})}{(\gamma-1)\mu_{air} g} = 3.78 \cdot 10^3 \text{ м}. \qquad (25)$$

2.7 **[2,0 балла]** Так как водяной пар находится в термодинамическом равновесии с окружающим его воздухом, то их температуры равны. Условие равновесия пара записывается аналогично (4) и имеет вид

$$dp_{vap} = -\rho_{vap} g dh, \qquad (26)$$

а его плотность определяется формулой

$$\rho_{vap} = \frac{\mu_{H_2O} p_{vap}}{RT}, \qquad (27)$$

в которой зависимость температуры от высоты имеет вид (15).

По условию давление ненасыщенных водяных паров у подножия горы равно

$$p_{vap}(0) = \varphi p_{vap0}, \qquad (28)$$

а давление насыщенных водяных паров на высоте H' составляет

$$p_{vap}(h) = p_{vap}. \tag{29}$$

Интегрируя (26) с учетом (27) и (15), а также начальных условий (28) и (29), находим

$$\ln\frac{p_{vap}}{p_{vap0}} = \ln\varphi + \frac{\mu_{H_2O}g}{\beta R}\ln\frac{T}{T_0}. \tag{30}$$

С другой стороны по условию из справочника

$$\ln\frac{P_{vap}}{P_{vap0}} = a + b\ln\frac{T}{T_0}, \tag{31}$$

и с использованием (30) получаем температуру на высоте H'

$$T(H') = T_0 \exp\left(\frac{a-\ln\varphi}{\frac{\mu_{H_2O}g}{\beta R}-b}\right). \tag{32}$$

Сама высота находится из формулы (15) и дает

$$H' = \frac{T_0 - T(H')}{\beta} = \frac{T_0}{\beta}\left(1-\exp\left(\frac{a-\ln\varphi}{\frac{\mu_{H_2O}g}{\beta R}-b}\right)\right) = 2.55\cdot 10^3 \text{ м}. \tag{33}$$

2.8 **[0,6 балла]** Для того, чтобы туман отсутствовал на всей горе, в формуле (33) надо положить

$$H' = H_0, \tag{34}$$

откуда получаем искомое выражение для влажности воздуха

$$\varphi_{min} = \left(1-\frac{\beta H_0}{T_0}\right)^{b-\frac{\mu_{H_2O}g}{\beta R}} \exp a = 0.119. \tag{35}$$

№	Содержание	баллы	
1.1	Формула (1) $p_0S = Mg$	0,4	**1,0**
	Формула (2) $S = 4\pi R_E^2$	0,2	
	Формула (3) $M = \frac{4\pi p_0 R_E^2}{g}$	0,2	
	Численное значение $M = 5.32\cdot 10^{18}$кг	0,2	
1.2	Формула (4) $dp = -\rho g dh$	0,2	**1,0**
	Формула (5) $\rho = \frac{\mu_{air}p}{RT_0}$	0,2	
	Формула (6) $p(h) = p_0\exp\left(-\frac{\mu_{air}g}{RT_0}h\right)$	0,4	
	Численное значение $p(H) = 85.0\cdot 10^3$ Па	0,2	
1.3	Формула (8) $\delta Q = \frac{M}{\mu_{air}}\frac{\gamma R}{\gamma-1}\Delta T$	0,2	**0,6**
	Численное значение $\delta Q = 5.33\cdot 10^{21}$Дж	0,2	
	Формула (9) $\gamma = 7/5$ или эквивалент $C_P = 7/2R$	0,2	
1.4	Формула (10) $\delta Q = \alpha\pi R_E^2\tau$	0,2	**0,6**
	Формула (11) $\tau = \frac{M}{\alpha\pi R_E^2\mu_{air}}\frac{\gamma R\Delta T}{\gamma-1}$	0,2	
	Численное значение $\tau = 30.3\cdot 10^3$ с	0,2	
2.1	Формула (12) $\rho = \frac{\mu_{air}p}{RT}$	0,2	**1,2**
	Формула (13) $pT^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = const$	0,2	
	Формула (14) $\frac{dT}{dh} = -\frac{(\gamma-1)\mu_{air}g}{\gamma R} = -\beta = const$	0,4	
	Формула (15) $T(h) = T_0 - \frac{(\gamma-1)\mu_{air}g}{\gamma R}h = T_0 - \beta h$	0,2	
	Численное значение $T(H) = 278$ K	0,2	
2.2	Формула (17) $p(h) = p_0\left(\frac{T_0}{T(h)}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = p_0\left(\frac{T_0}{T_0-\beta h}\right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$	0,2	**0,4**
	Численное значение $p(H) = 84.6\cdot 10^3$ Па	0,2	

2.3	Формула (19) $T(h) = T_0 - \beta h = const$	0,4	**0,8**
	Формула (20) $\Delta H_{atm} = \frac{\gamma R \Delta T_{dn}}{(\gamma-1)\mu_{air} g}$	0,2	
	Численное значение $\Delta H_{atm} = 2{,}05 \cdot 10^3$ м	0,2	
2.4	Формула (21) $p(T) = p_1 + \frac{p_2 - p_1}{T_2 - T_1}(T - T_1)$	0,4	**0,6**
	Численное значение $T_{boil} = 368$ К	0,2	
2.5	Формула (23) $T_{melt} = 273$ К.	0,2	**0,8**
	Формула (24) $h_0 = \frac{\gamma R(T_0 - T_{melt})}{(\gamma-1)\mu_{air} g}$	0,4	
	Численное значение $h_0 = 2.05 \cdot 10^3$ м	0,2	
2.6	Формула (25) $H_0 = \frac{\gamma R(T - T_{melt})}{(\gamma-1)\mu_{air} g}$	0,2	**0,4**
	Численное значение $H_0 = 3.78 \cdot 10^3$ м	0,2	
2.7	Формула (26) $dp_{vap} = -\rho_{vap} g dh$	0,2	**2,0**
	Формула (27) $\rho_{vap} = \frac{\mu_{H_2O} p_{vap}}{RT}$	0,2	
	Формула (28) $p_{vap}(0) = \varphi p_{vap0}$	0,2	
	Формула (30) $\ln\frac{p_{vap}}{p_{vap0}} = \ln\varphi + \frac{\mu_{H_2O} g}{\beta R}\ln\frac{T}{T_0}$	0,6	
	Формула (32) $T(H') = T_0 \exp\left(\frac{a - \ln\varphi}{\frac{\mu_{H_2O} g}{\beta R} - b}\right)$	0,2	
	Формула (33) $H' = \frac{T_0 - T(H')}{\beta} = \frac{T_0}{\beta}\left(1 - \exp\left(\frac{a - \ln\varphi}{\frac{\mu_{H_2O} g}{\beta R} - b}\right)\right)$	0,4	
	Численное значение $H' = 2.55 \cdot 10^3$ м	0,2	
2.8	Формула (34) $H' = H_0$	0,2	**0,6**
	Формула (35) $\varphi_{max} = \left(1 - \frac{\beta H_0}{T_0}\right)^{b - \frac{\mu_{H_2O} g}{\beta R}} \exp a$	0,2	
	Численное значение $\varphi_{max} = 0.119$	0,2	
Итого			**10,0**

Задача 3. Оптика движущихся сред (10,0 балла)

Часть 1. Четырехмерные векторы (1,4 балла)

1.1 **[0,8 балла]** Для приведения импульса и энергии к одинаковой размерности достаточно разделить энергию на скорость света или умножить импульс на скорость света. Кроме того, в силу принципа относительности, необходимо сделать замену $V \to -V$. Таким образом, получаем

$$p_x' = \frac{p_x - (V/c)(E/c)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad (1)$$

$$p_y' = p_y, \qquad (2)$$

$$p_z' = p_z, \qquad (3)$$

$$E'/c = \frac{E/c - (V/c)p_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (4)$$

1.2 **[0,6 балла]** В произвольной инерциальной системе отсчета выражение для импульса записывается как

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad (5)$$

а выражение для полной энергии имеет вид

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}. \tag{6}$$

Отсюда получаем, что искомый инвариант равен

$$inv = E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \tag{7}$$

Часть 2. Эффект Доплера и аберрация света (4,6 балла)

2.1 **[1,0 балла]** Так как масса покоя фотона равна нулю, то из (7) следует, что импульс и энергия фотона связаны следующим соотношением

$$p = \frac{E}{c}. \tag{8}$$

Известно, что энергия фотона определяется формулой Планка

$$E = \hbar\omega. \tag{9}$$

Проекции импульса фотона на оси координат равны

$$p_x = p\cos\varphi, \tag{10}$$

$$p_y = p\sin\varphi, \tag{11}$$

и после подстановки в (4), находим

$$\omega' = \omega\frac{1 - V\cos\varphi / c}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}. \tag{12}$$

Это и есть формула для релятивистского эффекта Доплера.

2.2 **[0,4 балла]** Из соотношений (2), (8) и (9) следует, что

$$\frac{\hbar\omega'}{c}\sin\varphi' = \frac{\hbar\omega}{c}\sin\varphi. \tag{13}$$

Используя (12), получаем

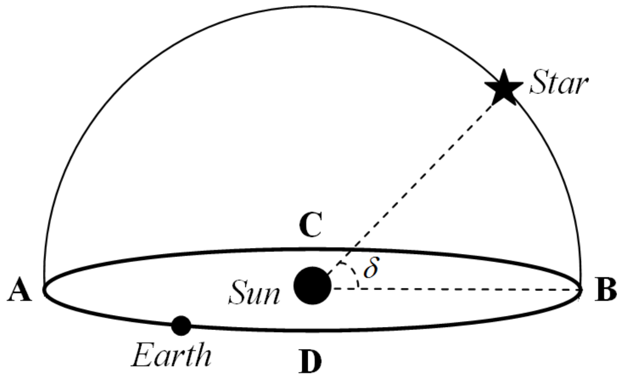
$$\sin\varphi' = \frac{\sqrt{1 - V^2 / c^2}\sin\varphi}{1 - V\cos\varphi / c}. \tag{14}$$

Выражение (14) представляет собой классическую формулу для аберрации света.

2.3 **[1,0 балла]** Положение звезды на небесной сфере меняется в течение года из-за орбитального движения Земли вокруг Солнца и аберрации света, что изображено на рисунке. Так как скорость орбитального движения Земли много меньше скорости света, то из формулы (14) следует, что угол аберрации равен

$$\delta\varphi = \varphi' - \varphi \approx \frac{V}{c}\sin\varphi, \tag{15}$$

где φ — угол между скоростью V и направлением на звезду.



Из рисунка видно, что угол φ периодически меняется от минимального значения δ в точке D, достигает величины $\pi/2$ в точке B, имеет максимальное значение $\pi - \delta$ в точке C и, наконец, вновь становится равным $\pi/2$ в точке A. Отсюда делаем вывод, что на небесной сфере видимое положение звезды описывает эллипс с угловыми размерами полуосей

$$a_1 = \frac{V}{c} \tag{16}$$

и

$$a_2 = \frac{V}{c}\sin\delta\,. \tag{17}$$

Из приведенных данных получаем

$$\delta = \arcsin\left(\frac{a_2}{a_1}\right) = 64.2°\,. \tag{18}$$

2.4 **[2,2 балла]** Согласно формуле (12) в эффекте Доплера относительный сдвиг частоты при $\varphi = 0$ равен

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D = 1 - \sqrt{\frac{1 - v_X / c}{1 + v_X / c}} \approx 9.95 \times 10^{-3}\,. \tag{19}$$

Отсюда видно, что эффект Доплера не может полностью объяснить красный сдвиг в спектре звезды. Естественно предположить, что при движении света от поверхности нейтронной звезды частота фотонов будет уменьшаться из-за гравитационного красного смещения.

Гравитационная масса фотона по принципу эквивалентности равна

$$m_{ph} = \frac{\hbar\omega}{c^2}, \tag{20}$$

а сила гравитации, действующая на фотон на расстоянии r от звезды, равна по закону Ньютона

$$F = G\frac{m_{ph}M}{r^2}\,. \tag{21}$$

Закон сохранения энергии для движения фотона записывается в виде

$$\hbar d\omega = -F dr\,. \tag{22}$$

Откуда

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{GM}{c^2}\frac{dr}{r^2}\,. \tag{23}$$

Интегрирование (23) в пределах от радиуса звезды R до ∞ приводит к уравнению

$$\ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\frac{GM}{c^2 R}\,, \tag{24}$$

где ω_0 и ω – частоты фотона на поверхности звезды и на бесконечном расстоянии от нее.

Отсюда окончательно находим частоту фотона

$$\omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{GM}{c^2 R}\right) = \omega_0 \exp\left(-\frac{v_{II}^2}{2c^2}\right), \tag{25}$$

где вторая космическая скорость определяется классическим выражением

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}\,. \tag{26}$$

Комбинируя формулы (19) и (25), получаем

$$\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_0 = 1 - \exp\left(-\frac{v_{II}^2}{2c^2}\right)\sqrt{\frac{1 - v_X / c}{1 + v_X / c}}\,. \tag{27}$$

Подставляя числовые значения, находим

$$v_{II} = \sqrt{2\ln\left(\frac{\sqrt{\dfrac{1-v_X/c}{1+v_X/c}}}{1-\left(\dfrac{\Delta\omega}{\omega}\right)_0}\right)}\,c = 2.83\cdot 10^6 \text{ м/с}. \quad (28)$$

Часть 3. Свет в движущейся среде (4,0 балла)

3.1 **[1,1 балла]** По определению, проекции скорости объекта в системе отсчета S' определяется выражениями

$$u_x' = \frac{dx'}{dt'}, \quad (29)$$

$$u_y' = \frac{dy'}{dt'}. \quad (30)$$

Те же самые проекции в системе отсчета S равны

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad (31)$$

$$u_y = \frac{dy}{dt}. \quad (32)$$

Преобразования Лоренца можно переписать в конечных разностях в виде

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, \quad (33)$$

$$dy = dy', \quad (34)$$

$$dt = \frac{dt' + dx'V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}. \quad (35)$$

Почленно деля левые и правые части (33)-(35) и используя (29)-(32), получим

$$u_x = \frac{u_x' + V}{1+\dfrac{u_x'V}{c^2}}, \quad (36)$$

$$u_y = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\dfrac{u_x'V}{c^2}}u_y'. \quad (37)$$

3.2 **[1,4 балла]** Перейдем в систему отсчета, связанную с водой. Согласно формуле (14) в этой системе отсчета будет наблюдаться аберрация, в результате чего угол падения плоской волны на воду α' будет равен

$$\cos\alpha' = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}\cos\alpha}{1-V\sin\alpha/c} \approx \cos\alpha\left(1+V\sin\alpha/c\right)$$

или

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha - V/c}{1-V\sin\alpha/c} \approx \sin\alpha - V\cos\alpha^2/c. \quad (38)$$

В системе отсчета, связанной с водой, закон преломления света выглядит обычным образом

$$\sin\alpha' = n\sin\beta', \quad (39)$$

а скорость распространения волны равна

$$v_{ph} = \frac{c}{n}. \quad (40)$$

Теперь переходя снова в лабораторную систему отсчета с помощью формул (36) и (37), получим

$$v_m \sin\beta = \frac{v_{ph}\sin\beta' + V}{1+\frac{v_{ph}V\sin\beta'}{c^2}} \approx v_{ph}\sin\beta' + V\ , \tag{41}$$

$$v_m \cos\beta = \frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{v_{ph}V\sin\beta'}{c^2}} v_{ph}\cos\beta' \approx v_{ph}\cos\beta'\ . \tag{42}$$

Используя (38)—(42), получаем

$$\sin\beta \approx \frac{1}{n}\sin\alpha - \frac{n^2+\cos 2\alpha}{n}\frac{V}{c}\ , \tag{43}$$

откуда

$$A_1 = \frac{1}{n}\sin\alpha\ , \tag{44}$$

$$B_1 = -\frac{n^2+\cos 2\alpha}{n}\ . \tag{45}$$

3.3 **[0,4 балла]** Вновь используя (38)—(42), находим

$$v_m \approx \frac{c}{n} + V\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sin\beta\ . \tag{46}$$

откуда

$$A_2 = \frac{c}{n}\ , \tag{47}$$

$$B_2 = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)\sin\beta\ . \tag{48}$$

3.4 **[0,9 балла]** При движении света в направлении течения воды угол β в формуле (48) составляет $\pi/2$ и соответствующая скорость равна

$$v_+ = \frac{c}{n} + V\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \tag{49}$$

а при движении против течения

$$v_- = \frac{c}{n} - V\left(1-\frac{1}{n^2}\right). \tag{50}$$

Общий путь в воде составляет $2L$, поэтому разность во времени распространения Δt по сравнению с неподвижной водой составляет

$$\Delta t = \frac{2L}{v_-} - \frac{2L}{v_+} \approx \frac{4Lv\left(n^2-1\right)}{c^2}\ , \tag{51}$$

а соответствующая разность хода равна

$$\Delta l = c\Delta t = \frac{4Lv\left(n^2-1\right)}{c}\ . \tag{52}$$

При этом интерференционная картина сдвинется на число полос, равное

$$\Delta N = \frac{\Delta l}{\lambda} = \frac{4Lv\left(n^2-1\right)}{c\lambda}\ . \tag{53}$$

3.5 **[0,2 балла]** Используя формулу (53), находим

$$n = \sqrt{1+\frac{c\lambda\Delta N}{4Lv}} = 1.37\ . \tag{54}$$

№	Содержание	баллы	

1.1	Формула (1) $p_x' = \dfrac{p_x - (V/c)(E/c)}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$	0,2	**0,8**
	Формула (2) $p_y' = p_y$	0,2	
	Формула (3) $p_z' = p_z$	0,2	
	Формула (4) $E'/c = \dfrac{E/c - (V/c)p_x}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$	0,2	
1.2	Формула (5) $p = \dfrac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	0,2	**0,6**
	Формула (6) $E = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$	0,2	
	Формула (7) $inv = E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$	0,2	
2.1	Формула (8) $p = \dfrac{E}{c}$	0,2	**1,0**
	Формула (9) $E = h\omega$	0,2	
	Формула (10) $p_x = p\cos\varphi$	0,2	
	Формула (11) $p_y = p\sin\varphi$	0,2	
	Формула (12) $\omega' = \omega\dfrac{1 - V\cos\varphi/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$	0,2	
2.2	Формула (13) $\dfrac{h\omega'}{c}\sin\varphi' = \dfrac{h\omega}{c}\sin\varphi$	0,2	**0,4**
	Формула (14) $\sin\varphi' = \dfrac{\sqrt{1-V^2/c^2}\sin\varphi}{1 - V\cos\varphi/c}$	0,2	
2.3	Формула (15) $\delta\varphi = \varphi' - \varphi \approx \dfrac{V}{c}\sin\varphi$	0,2	**1,0**
	Формула (16) $a_1 = \dfrac{V}{c}$	0,2	
	Формула (17) $a_2 = \dfrac{V}{c}\sin\delta$	0,2	
	Формула (18) $\delta = \arcsin\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$	0,2	
	Численное значение $\delta = 64.2°$	0,2	
2.4	Формула (19) $\left(\dfrac{\Delta\omega}{\omega}\right)_D = 1 - \sqrt{\dfrac{1 - v_X/c}{1 + v_X/c}} \approx 9.95\times10^{-3}$	0,2	**2,2**
	Формула (20) $m_{ph} = \dfrac{\hbar\omega}{c^2}$	0,2	
	Формула (21) $F = G\dfrac{m_{ph}M}{r^2}$	0,2	
	Формула (22) $\hbar d\omega = -Fdr$	0,2	
	Формула (23) $\dfrac{d\omega}{\omega} = -\dfrac{GM}{c^2}\dfrac{dr}{r^2}$	0,2	

	Формула (24) $\ln\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)=-\frac{GM}{c^2R}$	0,2	
	Формула (25) $\omega=\omega_0\exp\left(-\frac{GM}{c^2R}\right)=\omega_0\exp\left(-\frac{v_{II}^2}{2c^2}\right)$	0,2	
	Формула (26) $v_{II}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}$	0,2	
	Формула (27) $\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_0=\left[1-\sqrt{\frac{1-v_X/c}{1+v_X/c}}\right]\exp\left(-\frac{v_{II}^2}{2c^2}\right)$	0,2	
	Формула (28) $v_{II}=\sqrt{2}\ln\left(\frac{1-\sqrt{\frac{1-v_X/c}{1+v_X/c}}}{\left(\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)_0}\right)c$	0,2	
	Численное значение $v_{II}=7.108\times10^{-4}c=21.31$км/с	0,2	
3.1	Формула (29) $u_x'=\frac{dx'}{dt'}$	0,1	1,1
	Формула (30) $u_y'=\frac{dy'}{dt'}$	0,1	
	Формула (31) $u_x=\frac{dx}{dt}$	0,1	
	Формула (32) $u_y=\frac{dy}{dt}$	0,1	
	Формула (33) $dx=\frac{dx'+Vdt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$	0,1	
	Формула (34) $dy=dy'$	0,1	
	Формула (35) $dt=\frac{dt'+dx'V/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$	0,1	
	Формула (36) $u_x=\frac{u_x'+V}{1+\frac{u_x'V}{c^2}}$	0,2	
	Формула (37) $u_y=\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{u_x'V}{c^2}}u_y'$	0,2	
3.2	Формула (38) $\cos\alpha'=\frac{\sqrt{1-V^2/c^2}\cos\alpha}{1-V\sin\alpha/c}\approx\cos\alpha\left(1+V\sin\alpha/c\right)$ или $\sin\alpha'=\frac{\sin\alpha-V/c}{1-V\sin\alpha/c}\approx\sin\alpha-V\cos\alpha^2/c$	0,2	1,4
	Формула (39) $\sin\alpha'=n\sin\beta'$	0,2	
	Формула (40) $v_{ph}=\frac{c}{n}$	0,2	
	Формула (41) $v_m\sin\beta=\frac{v_{ph}\sin\beta'+V}{1+\frac{v_{ph}V\sin\beta'}{c^2}}\approx v_{ph}\sin\beta'+V$	0,2	

	Формула (42) $v_m \cos\beta = \dfrac{\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\dfrac{v_{ph}V\sin\beta'}{c^2}} v_{ph}\cos\beta' \approx v_{ph}\cos\beta'$	0,2	
	Формула (44) $A_1 = \dfrac{1}{n}\sin\alpha$	0,2	
	Формула (45) $B_1 = -\dfrac{n^2+\cos 2\alpha}{n}$	0,2	
3.3	Формула (47) $A_2 = \dfrac{c}{n}$	0,2	**0,4**
	Формула (48) $B_2 = \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\sin\beta$	0,2	
3.4	Формула (49) $v_+ = \dfrac{c}{n}+V\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$	0,2	**0,9**
	Формула (50) $v_- = \dfrac{c}{n}-V\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$	0,2	
	Формула (51) $\Delta t = \dfrac{2L}{v_-}-\dfrac{2L}{v_+} \approx \dfrac{4Lv\left(n^2-1\right)}{c^2}$	0,2	
	Формула (52) $\Delta l = c\Delta t = \dfrac{4Lv\left(n^2-1\right)}{c}$	0,2	
	Формула (53) $\Delta N = \dfrac{\Delta l}{\lambda} = \dfrac{4Lv\left(n^2-1\right)}{c\lambda}$	0,1	
3.5	Формула (54) $n = \sqrt{1+\dfrac{c\lambda\Delta N}{4Lv}}$	0,1	**0,2**
	Численное значение $n = \sqrt{1+\dfrac{c\lambda\Delta N}{4Lv}} = 1.37$	0,1	
Итого			**10,0**