Задача 1

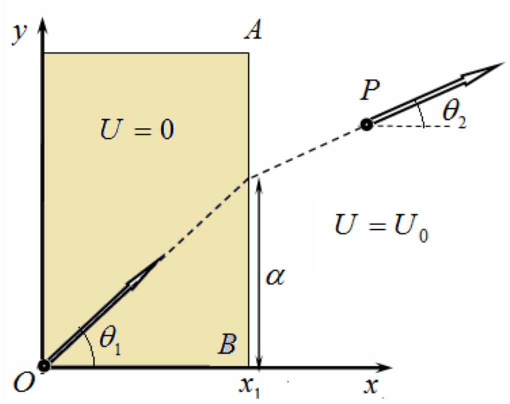
1	**Солнечные частицы**	**10**
	Фотоны, излучаемые с поверхности Солнца, и нейтрино, вылетающие из его ядра, несут нам информацию о температурах Солнца, а также могут подтвердить, что Солнце светит благодаря ядерным реакциям. Во всех пунктах этой задачи используйте следующие данные: - масса Солнца $M_S = 2{,}00 \cdot 10^{30}\,кг$; - радиус Солнца $R_S = 7{,}00 \cdot 10^{8}\,м$; - мощность Солнечного излучения (суммарная энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени) $L_S = 3{,}85 \cdot 10^{26}\,Вт$; - расстояние от Земли до Солнца $d_S = 1{,}50 \cdot 10^{11}\,м$. При решении задачи могут понадобиться следующие формулы (i) $\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax} + const$ (ii) $\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax} + const$ (ii) $\int x^3 e^{ax} dx = \left(\frac{x^3}{a} - \frac{3x^2}{a^2} + \frac{6x}{a^3} - \frac{6}{a^4}\right) e^{ax} + const$	
A	**Излучение Солнца**	
A1	Полагая, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, вычислите температуру T_S поверхности Солнца	**0,3**
	Спектр солнечного излучения может быть хорошо аппроксимирован распределением Вина. Согласно которому, солнечная энергия, приходящая на некоторую площадку на Земле в единицу времени в единичном диапазоне частот, равна: $$u(\nu) = A\frac{R_S^2}{d_S^2} \cdot \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_S}\right)$$ где ν — частота, и A — площадь поверхности этой площадки, нормальной к направлению падающего излучения, h - постоянная Планка, k - постоянная Больцмана, c - скорость света.	
	Рассмотрим солнечный элемент, который представляет собой тонкий диск из полупроводникового материала. Площадь диска — A. Солнечный элемент расположен перпендикулярно направлению падения солнечных лучей	
A2	Используя приближение Вина, выразите полную мощность солнечного излучения P_{in}, падающего на поверхность солнечного элемента, через A, R_S, d_S, T_S и фундаментальные константы c, h, k.	**0,3**
A3	Найдите зависимость числа фотонов $n_\gamma(\nu)$, падающих на поверхность солнечного элемента в единицу времени в единичном диапазоне частот	**0,2**

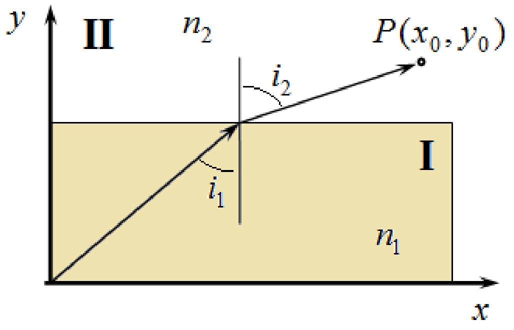
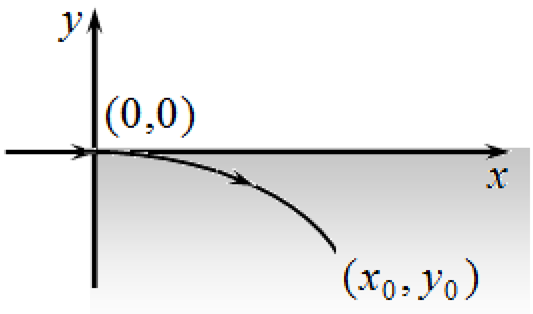
	от частоты. Выразите ответ через A, R_S, d_S, T_S и фундаментальные константы c, h, k	
	Ширина запрещенной зоны полупроводника, из которого изготовлен солнечный элемент, равна E_g. Используйте следующую модель. Каждый фотон с энергией $E \geq E_g$ вызывает переход электрона через запрещенную зону, т.е. его переход в зону проводимости. При этом часть энергии электрона, равная E_g преобразуется в полезную энергию (электрическую), остальная часть энергии электрона рассеивается в виде тепловой энергии и не может быть преобразована в полезную.	
А4	Обозначим $x_g = \frac{h\nu_g}{kT_S}$, где $h\nu_g = E_g$. Выразите полезную мощность солнечного элемента P_{out} через x_g, A, R_S, d_S, T_S и фундаментальные константы c, h, k.	**1,0**
А5	Выразите КПД солнечного элемента η через x_g.	**0,2**
А6	Нарисуйте качественный график зависимости η от x_g. Явно укажите значения η при $x_g = 0$ и $x_g \to \infty$. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику $\eta(x_g)$ при $x_g = 0$ и $x_g \to \infty$?	**1,0**
А7	Пусть x_0 — такое значение x_g, при котором КПД η максимален. Получите кубическое уравнение для определения x_0. Оцените численное значение x_0 с точностью $\pm 0{,}25$. Рассчитайте также $\eta(x_0)$.	**1,0**
А8	Ширина запрещенной зоны чистого кремния $E_g = 1{,}11$ эВ. Рассчитайте КПД кремниевого солнечного элемента η_{Si}.	**0,2**
	В конце XIX века Кельвин и Гельмгольц предложили гипотезу, которая объясняет возникновение энергии, необходимой для свечения Солнца. Они предположили, что вначале Солнце было очень большим облаком материи массы M_S и пренебрежимо малой плотности, которое впоследствии начало медленно сжиматься. Таким образом, энергия, излучаемая Солнцем, возникает благодаря уменьшению гравитационной энергии при его сжатии.	
А9	Предположим, что плотность вещества внутри Солнца всюду одинакова. Найдите полную гравитационную потенциальную энергию Солнца Ω, которой оно обладает в наши дни. Выразите ее через G, M_S, R_S.	**0,3**
А10	Считая, что мощность излучения Солнца оставалась постоянной на протяжении всего времени, оцените максимально возможное время τ_{KH} (в годах), на протяжении которого Солнце могло бы светить согласно гипотезе Кельвина и Гельмгольца.	**0,5**
	Значение τ_{KH}, рассчитанное выше, не согласуется с возрастом солнечной системы, который был оценен при изучении метеоритов. Это говорит о том, что источником энергии Солнца не может быть только гравитационная энергия.	

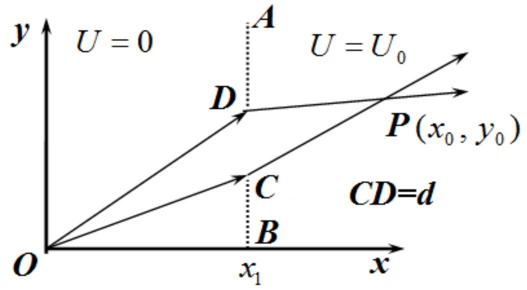
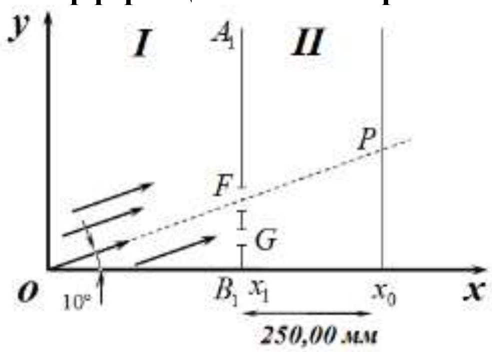
B	**Солнечные нейтрино** В 1938 Ганс Бете предположил, что источником энергии Солнца являются ядерная реакция синтеза гелия из водорода, происходящая в ядре Солнца. Результирующее уравнение ядерной реакции: $$4\,{}^1H \rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e$$ Электронные нейтрино ν_e, которые получаются в этой реакции, можно считать безмассовыми. Они вылетают из Солнца, их регистрация на Земле подтверждает, что внутри Солнца происходят ядерные реакции. Во всех пунктах этой задачи вы можете пренебречь энергией, уносимой нейтрино.	
B1	Рассчитайте плотность потока нейтрино Φ_ν, которые достигают Земли. Энергия, которая выделяется в приведенной выше реакции, равна $\Delta E = 4{,}0 \cdot 10^{-12}$ *Дж*. Считайте, что полная энергия, излучаемая Солнцем, выделяется только в реакции, приведенной выше.	**0,6**
	На пути из ядра Солнца к Земле часть электронных нейтрино ν_e превращается в нейтрино других типов ν_x. Эффективность детектирования этих нейтрино ν_x составляет 1/6 эффективности детектирования электронных нейтрино ν_e . Если бы не происходило превращения нейтрино, мы бы в среднем детектировали N_1 нейтрино в год. Однако, из-за этих превращений в среднем детектируется N_2 нейтрино в год (ν_e и ν_x вместе).	
B2	Какая доля f электронных нейтрино ν_e превращается в нейтрино других типов ν_x? Выразите ответ через N_1 и N_2.	**0,4**
	Чтобы детектировать нейтрино, построены огромные детекторы, наполненные водой. Хотя взаимодействия нейтрино с веществом крайне редки, иногда они выбивают электроны из молекул воды в детекторе. Эти высокоэнергетические электроны летят в воде с большими скоростями и при этом излучают свет. Пока скорость электрона больше скорости света в воде (ее показатель преломления n), это излучение, называемое излучением Черенкова, испускается в виде конуса.	
B3	Предположим, что при движении в воде электрон, выбитый нейтрино, теряет энергию с постоянной скоростью α в единицу времени. Найдите энергию, переданную электрону E_{im} от нейтрино, считая, что такой электрон после соударения излучает на протяжении времени Δt . Перед соударением электрон покоился. Выразите ответ через $\alpha, \Delta t, n, m_e, c$.	**2,0**
	Синтез гелия He из водорода H внутри Солнца происходит в несколько этапов. На одном из промежуточных этапов образуется ядро бериллия (масса покоя m_{Be}), которое может поглотить электрон и образовать ядро лития (масса покоя $m_{Li} < m_{Be}$), испустив нейтрино ν_e. Уравнение этой реакции $${}^7Be + e^- \rightarrow {}^7Li + \nu_e$$ Когда покоящееся ядро бериллия Be ($m_{Be} = 11{,}65 \cdot 10^{-13}$ *кг*) поглощает покоящийся электрон, испускаемое нейтрино уносит энергию	

	$E_\nu = 1{,}44 \cdot 10^{-13}\,Дж$. Однако, ядра бериллия находятся в постоянном тепловом движении при температуре T_C ядра Солнца и представляют собой движущиеся источники нейтрино. В результате, энергия испущенных нейтрино варьируется в среднем на ΔE_{rms} (ΔE_{rms} - среднеквадратичное отклонение энергии нейтрино).	
B4	Принимая $\Delta E = 5{,}54 \cdot 10^{-17}\,Дж$, рассчитайте среднеквадратичную скорость теплового движения ядер бериллия v_{Be} и затем оцените температуру T_C ядра Солнца. (Подсказка: ΔE_{rms} зависит от среднеквадратичного значения проекции скорости на направление, вдоль которого ведется наблюдение.)	**2,0**

Задача 2

	Принцип экстремума	**10**
A	**Принцип экстремума в механике**	
	 **Рис. 1** Рассмотрим горизонтальную плоскость Oxy, по которой движение происходит без трения (рис.1). Она разделена на две области I и II прямой линией ***AB***, удовлетворяющей уравнению $x = x_1$. Потенциальная энергия точечной частицы массы m в области I равна $U = 0$, в то время как в области II она равна $U = U_0$. Частица начинает двигаться из начала отсчета O со скоростью v_1 по прямой, образующей угол θ_1 с осью Ox. Она достигает точки ***P*** в области II со скоростью v_2, двигаясь по прямой, образующей угол θ_2 с осью Ox. Во всех частях этой задачи следует пренебречь силой тяжести и релятивистскими эффектами.	
A1	Выразите значение скорости v_2 через параметры m, v_1, U_0.	**0,2**
A2	Выразите значение скорости v_2 через параметры v_1, θ_1, θ_2.	**0,3**
	Определим величину, называемую действием, $A = m\int v(s)ds$, где ds – бесконечно малый элемент длины вдоль траектории частицы массы m, движущейся со скоростью $v(s)$. Интеграл берется вдоль траектории. Например, для частицы, движущейся с постоянной скоростью v по окружности радиуса R, действие A за один оборот равно $2\pi Rmv$. Можно показать, что если полная энергия частицы E не изменяется, то она движется между двумя фиксированными точками по такой траектории, для которой действие экстремально. Исторически это утверждение известно как принцип наименьшего действия (ПНД).	
A3	Из ПНД следует, что траектория частицы, движущейся между двумя фиксированными точками в области постоянного потенциала, представляет собой прямую линию. Пусть фиксированные точки ***O*** и ***P*** на рис.1 имеют координаты (0,0) и (x_0, y_0) соответственно, а точка на границе, в которой частица переходит из области I в область II, имеет координаты (x_1, α). Заметим, что величина x_1 фиксирована, а действие зависит только от координаты α. Получите выражение для действия $A(\alpha)$. Как функцию этой координаты. Используя ПНД, получите выражение для отношения между v_1/v_2 и упомянутыми координатами.	**1,0**

В	**Принцип экстремума в оптике**	
	 **Рис. 2** Луч света переходит из среды I в среду II с показателями преломления n_1 и n_2, соответственно. Эти две среды разделены прямой линией, параллельной оси Ox. Луч света образует угол i_1 в среде I, и угол i_2 в среде II (рис.2). Для расчета траектории луча воспользуемся другим принципом экстремума (максимума или минимума), известным как принцип наименьшего времени Ферма.	
В1	Принцип утверждает, что между двумя фиксированными точками луч света движется по тому пути, которому соответствует экстремум времени, затраченного на движение между двумя точками. Найдите отношение между $\sin i_1$ и $\sin i_2$, исходя из принципа Ферма.	**0,5**
	 **Рис. 3** На рис.3 схематически показана траектория лазерного луча, падающего горизонтально на раствор сахара, в котором концентрация сахара уменьшается с высотой. Следовательно, показатель преломления раствора также уменьшается с высотой.	
В2	Пусть показатель преломления $n(y)$ зависит только от координаты y. Используйте уравнение, полученное в пункте В1, чтобы получить выражение для коэффициента наклона $\dfrac{dy}{dx}$ луча, выразите его через n_0 и. $n(y)$.	**1,5**
В3	Лазерный луч направлен горизонтально из начала отсчета (0,0) в раствор сахара на высоте y_0 от дна сосуда, как показано на рис.3. Считайте, что $n(y) = n_0 - ky$, где n_0 и k – положительные константы. Получите выражение для координаты траектории луча x в зависимости от его координаты y и параметров задачи. $\int \sec\theta\, d\theta = \ln(\sec\theta + tg\theta) + const$, $\sec\theta = 1/\cos\theta$, или $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + const$	**1,2**

B4	Определите координату точки падения луча x_0 на дно сосуда. Считайте, что $y_0 = 10{,}0\,см$, $n_0 = 1{,}50$, $k = 0{,}050\,см^{-1}$.	**0,8**
C	**Принцип экстремума и волновая природа материи** Теперь мы исследуем связь между ПНД и волновой природой движущейся частицы. Для этого предположим, что частица, движущаяся из точки ***O*** в точку ***P***, может выбирать все возможные траектории, и найдем траекторию, соответствующую конструктивной интерференции (когда волны усиливают друг друга) волн де Бройля.	
C1	Частица перемещается на бесконечно малое расстояние Δz вдоль некоторой траектории. Выразите изменение $\Delta\varphi$ фазы волны де Бройля через изменение действия ΔA и постоянную Планка h.	**0,6**
C2	 **Рис. 4** Вновь обратимся к задаче, описанной в части А, где частица движется из точки ***O*** в точку ***P*** (см. Рис.4). Предположим, что вдоль границы ***AB*** между двумя областями установлена непрозрачная перегородка. В ней имеется небольшая щель ***CD*** шириной d, причем $d << (x_0 - x_1)$ и $d << x_1$. Рассмотрим две крайние траектории ***OCP*** и ***ODP***, причем ***OCP*** соответствует классической траектории, рассмотренной в части А. Найдите разность фаз $\Delta\varphi_{CD}$ между двумя траекториями с точностью до до малых величин первого порядка.	**1,2**
D	**Интерференция волн материи**  **Рис. 5** Электронная пушка, находящаяся в точке ***O***, направляет параллельный пучок электронов к узкой щели в точке ***F*** в непрозрачной перегородке ***A₁B₁***, расположенной на прямой $x = x_1$, так что участок ***OFP*** является прямой линией. ***P*** – точка на экране в плоскости $x = x_0$ (см.рис.5). Скорость электронов в области I равна $v_1 = 2{,}0000 \cdot 10^7\,м/с$, угол $\theta_1 = 10{,}0000°$ Потенциал в области II выбран так, что скорость $v_2 = 1{,}9900 \cdot 10^7\,м/с$ $v_2 = 1{,}9900 \cdot 10^7\,м/с$ Расстояние $x_0 - x_1 = 250{,}00\,мм$. Взаимодействием между электронами следует пренебречь.	

D1	Считая, что начальная скорость электронов рана нулю, найдите ускоряющую разность потенциалов U_1 электронной пушки.	**0,3**
D2	Вторая щель ***G*** проделана в перегородке ***A₁B₁*** на расстоянии $\lvert FG \rvert = 215{,}00\,нм$ ниже щели ***F*** (см. Рис.5). Пусть разность фаз между волнами де Бройля, пришедшими в точку ***P*** через щели ***F*** и ***G***, равна $2\pi\beta$. Рассчитайте значение β.	**0,8**
D3	Каково наименьшее расстояние Δy от точки ***P,*** на котором вероятность обнаружить электрон на экране равна нулю? (Примечание: Вы можете воспользоваться приближенной формулой $\sin(\theta+\Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$).	**1,2**
D4	Пучок электронов имеет квадратное сечение 500нм×500нм, длина установки – 2 м. Какова минимальная интенсивность потока электронов $I_{\min}$, если в среднем в установке в любой момент времени имеется хотя бы один электрон?	**0,4**

Задача 3

Конструирование ядерного реактора

В природном уране, в соединении UO_2 только 0,720% процента атомов урана являются атомами изотопа ^{235}U. Если ядро поглощает нейтрон, то оно практически мгновенно делится, испуская при этом 2-3 нейтрона, имеющих большую кинетическую энергию. Вероятность деления будет возрастать, если нейтрон, вызывающий реакцию деления, обладает малой кинетической энергией. Таким образом, уменьшение кинетической энергии нейтронов, появившихся в результате деления, может привести к возникновению цепной ядерной реакции. Эта идея является основой работы ядерных реакторов (ЯР).

Типичный ЯР представляет собой цилиндрический сосуд высоты H и радиуса R, заполненный веществом, которое называется замедлителем. Цилиндрические трубы, называемые топливными каналами, каждый из которых состоит из набора цилиндрических топливных стержней природного UO_2 высотой H, расположены параллельно оси цилиндра в вершинах квадратной сетки. Нейтроны, возникшие в процессе деления, выходят из топливного канала, сталкиваются с замедлителем, теряют энергию и попадают в другие топливные каналы уже с низкой энергией, и приводят к делению других ядер (рис. I-III). Теплота, выделившаяся в результате деления в топливных стержнях, переносится охлаждающей жидкостью, текущей вдоль стержней. В данной задаче вам необходимо изучить некоторые физические явления, проходящие в (A) топливных стержнях, (B) замедлителе, и (C) ЯР цилиндрической формы.

Рис-I Рис-II Рис-III

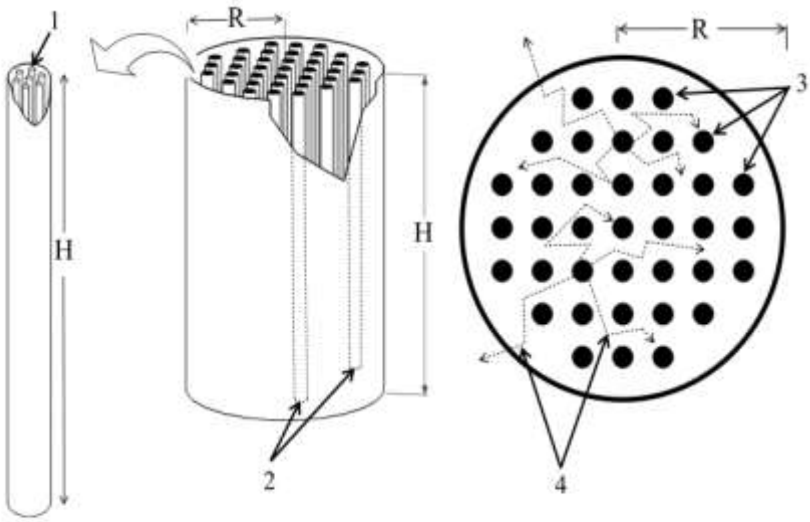


Схема ядерного реактора (ЯР)

Рис. I. Увеличенное изображение топливного канала (1 – топливные стержни)

Рис. II. Изображение ЯР (2- топливный канал)

Рис. III Вид сверху ЯР (3 - квадратная сетка ядерных каналов, 4 – типичные траектории нейтронов)

Показаны только те элементы реактора, которые имеют отношение к данной задаче (например, не показаны управляющие стержни, охладитель)

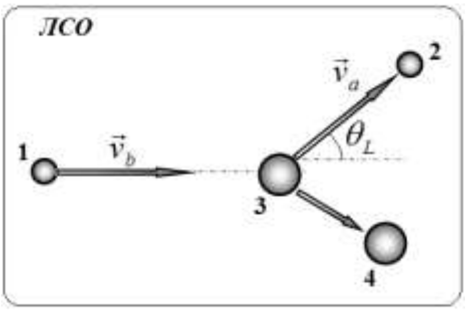
A Топливный стержень

Данные для UO_2	1. Молярная масса $M_w = 0.270$ кг ·моль$^{-1}$	2. Плотность $\rho = 1.060\times10^4$ кг ·м$^{-3}$
	3. Температура плавления $T_m = 3.138\times10^3$ K	4. Теплопроводность $\lambda = 3.280$ Вт ·м$^{-1}$ ·K^{-1}

A1	Рассмотрим следующую реакцию деления – неподвижное ядро ^{235}U после поглощения нейтрона с пренебрежимо малой кинетической энергией распадается по схеме $$^{235}U+^{1}n\rightarrow^{94}Zr+^{140}Ce+2^{1}n+\Delta E$$ Рассчитайте полную энергию ΔE (в МэВ), выделяющуюся в реакции. Массы частиц равны: $m(^{235}\mathrm{U})$ = 235.044 а.е.м.; $m(^{94}\mathrm{Zr})$ = 93.9063 а.е.м.; $m(^{140}\mathrm{Ce})$ = 139.905 а.е.м.; $m(^{1}\mathrm{n})$ = 1.00867 а.е.м., где 1 а.е.м. = 931.502 МэВ. Не обращайте внимание на не сохранение электрического заряда в этом уравнении.	**0.5**
A2	Рассчитайте N - число атомов ^{235}U в единице объема природного UO_2.	**0.5**
A3	Предположим, что поток нейтронов в ядерном топливе является однородным, а его плотность равна $\varphi = 2.000\times10^{18}$ м$^{-2}$ ·с$^{-1}$. Сечение реакции деления равно ядра ^{235}U равно $\sigma_f = 5.400\times10^{-26}$ м^2 (эффективная площадь сечения ядра). Считая, что 80,00% энергии, выделяющейся при делении, превращается в тепловую, найдите мощность теплоты, выделяющейся в единице объема ядерного топлива - Q (в Вт ^{l}/м$^{-3}$). 1МэВ = 1.602×10^{-13} Дж	**1.0**
A4	Установившаяся разность температур между центром и поверхностью топливного стержня может быть описана формулой $T_c - T_s = k\,F(Q,a,\lambda)$, где $k = 1/4$ – безразмерная постоянная, a – радиус стержня. Используя метод размерностей, получите выражение для функции $F(Q,a,\lambda)$ λ - теплопроводность стержня.	**0.5**
A5	Требуемая температура охладителя равна 5.770×10^2 K. Рассчитайте максимально возможный радиус a_u топливного стержня.	**1.0**

B Замедлитель

Рассмотрим абсолютно упругое столкновение на плоскости двух частиц, нейтрона массой 1 а.е.м и частицей замедлителя массы A а.е.м. Считайте, что в лабораторной системе отсчета (ЛСО) все частицы замедлителя перед столкновениями находятся в состоянии покоя. Пусть $\vec{v_b}$ и $\vec{v_a}$ – скорости нейтрона в ЛСО до и после столкновения соответственно. Обозначим $\vec{v_m}$ скорость центра масс системы в ЛСО, а θ угол отклонения нейтрона в системе отсчета, связанной с центром масс (СОЦМ).

B1	На Рис. IV показан схематически процесс столкновения в ЛСО, где θ_L угол отклонения нейтрона. Нарисуйте схематически процесс столкновения в СОЦМ. На рисунке укажите угол рассеяния θ и скорости частиц после рассеяния и выразите их через $\vec{v_b}$, $\vec{v_a}$ и $\vec{v_m}$. Обозначьте угол рассеяния.  **Рис.IV** *Процесс столкновения в ЛСО* 1-*Нейтрон* до столкновения 2-*Нейтрон* после столкновения 3-*Частица замедлителя* до столкновения 4-*Частица замедлителя* после столкновения	**0.5**
B2	Определите в СОЦМ скорости после столкновения v и V, нейтрона и атома замедлителя, соответственно, выразив их через A и v_b.	**1.0**

B3	Получите выражение для зависимости $G(\alpha, \theta) = E_a / E_b$, где E_b и E_a – кинетические энергии нейтрона в ЛСО до и после столкновения соответственно, а $\alpha = [(A-1)/(A+1)]^2$.	**1.0**
B4	Предположим, что полученное выражение справедливо для молекулы D_2O. Вычислите максимально возможную долю потери энергии f_l нейтрона в замедлителе D_2O (20 а.е.м).	**0.5**

C **Ядерный реактор**

Для работы ядерного реактора при любом постоянном потоке нейтронов ψ (в стабильном режиме), количество нейтронов покидающих реактор должно быть скомпенсировано числом нейтронов вырабатываемых в ядерном процессе. Для реактора цилиндрической формы, количество покидающих нейтронов в единицу времени равно $k_1 [(2.405/R)^2 + (\pi/H)^2]\,\psi$, в то время как количество нейтронов, образуемых в ядерных реакциях в единицу времени, равно $k_2\,\psi$. Константы k_1 и k_2 зависят от свойств материалов, из которого сделан ядерный реактор.

C1	Рассмотрите ядерный реактор, для которого $k_1 = 1.021\times10^{-2}$ м и $k_2 = 8.787\times10^{-3}$ м$^{-1}$. Заметим, что для упрощения утилизации топлива, количество улетающих нейтронов при работе в стационарном режиме должно быть минимально. Рассчитайте размеры ядерного реактора (высоту и радиус), при фиксированном его объеме, удовлетворяющие указанному условию.	**1.2**
C2	Топливные каналы расположены в узлах квадратной сетки, как показано на Рис.III, расстояния между ближайшими каналами равно 0.286 м, а радиус топливного канала 3.617×10^{-2} м. Определите количество топливных каналов F_n в ядерном реакторе и массу M природного урана UO_2, необходимого для работы ядерного реактора в стационарном режиме.	**0.8**