Решения задач.

Конечно, первое впечатление от приведенных условий – «Шок и трепет!». Действительно, во-первых, условия занимают 6 страниц[1] убористого текста, да еще в придачу 2 страницы титульного листа и плюс листы для ответов! Во-вторых, темы совсем не привычные: где брусок на наклонной плоскости, где диаграммы $(P,V)$, где электрические цепи с тремя резисторами, где тонкие линзы? Но это же международная олимпиада, поэтому «глаза боятся, а руки делают!». Или должны что-то делать. Поэтому попытаемся успокоиться и еще раз внимательно начнем читать условия, размышлять и … решать.

**Задача 1.**

Не будем пугаться приведенных интегралов (тем более, что их значения приведены в условии), подумает о смысле того, что требуется найти – тем более, что мы солнышка не видели? Лампочка, но только большая.

**A1.** Для многих удивительно, но излучение Солнца хорошо описывается моделью абсолютно черного тела. Что мы про это излучение знаем? Функция, описывающая спектр такого излучения была получена еще в 1900 году Максом Планком, ее вывод фактически явился рождением квантовой физики. Но еще до этого был установлен закон Стефана-Больцмана - суммарная мощность потока теплового излучения пропорциональная 4 степени абсолютной температуры! Заглянем в лист физических постоянных (не зря же авторы задач его нам выдали), нет ли там чего-нибудь полезного? Конечно – приведена постоянная Стефана-Больцмана $\sigma$. Осталось вспомнить, что это такое[2]. Энергия, испускаемая площадкой единичной площади в единицу времени определяется этим законом. Что еще известно[3] – $L_S$, полная энергия, испускаемая всей поверхностью Солнца в единицу времени (то есть мощность)! Площадь поверхности Солнца найдем без труда, поэтому

$$L_S = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4, \qquad (1)$$

Откуда находим:

$$T_S = \sqrt[4]{\frac{L_S}{4\pi R_S^2 \sigma}}. \qquad (2)$$

Осталось подставить численные значения, вспомнить, что корень четвертой степени это «два раза корень квадратный», подсчитать и правильно округлить (до трех значащих цифр – как светимость и радиус Солнца в условии). В итоге $T_S = 5{,}76 \cdot 10^3 K$.

Не вредно и помнить, что температура поверхности Солнца около шести тысяч градусов – поэтому ответ очень похож на правильный.

*Изучение законов теплового излучения: Кирхгофа, Вина, Рэлея-Джинса, Стефана – Больцмана не входит в программу средней школы в нашей стране. Но эти вопросы перечислены в программе Международной физической олимпиады, поэтому не должны «пугать» участников этой олимпиады.*

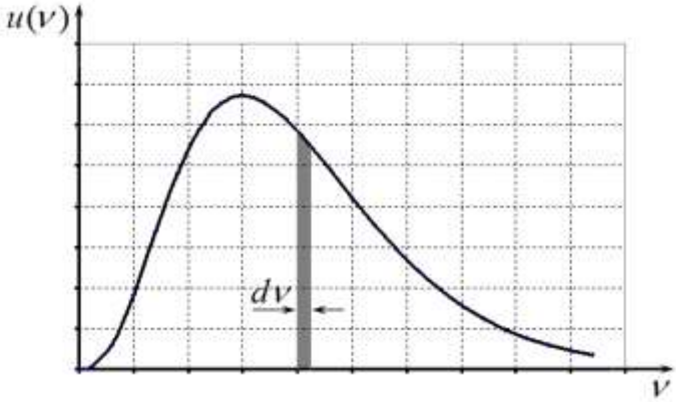
---

[1] В данной книжке – еще больше, в оригинале шрифт и рисунки были поменьше!

[2] Подсказку (для тех, кто от волнения все забыл) может дать размерность этой величины $\frac{Вт}{м^2 \cdot K^4}$ !

[3] Интересна также «филологическая» часть задачи: понять смысл обозначений. В данном случае – почти очевидно – индекс «S» это просто Sun – Солнце.

Далее следует разобраться с приведенной функцией $u(\nu)$ - ее смысл указан в условии задачи: мощность, излучаемая с площадки единичной площади в единичном Интервале. Схематически изобразим график этой функции: тем более что сделать это не сложно: при малых частотах экспонента близка к единице, поэтому функция возрастает пропорционально $\nu^3$, при больших частотах экспонента убывает быстрее любой степенной функции, поэтому и приведенная функция монотонно убывает до нуля (рис. 1). Если умножить значение $u(\nu)$ на малую ширину некоторого диапазона частот $d\nu$, то получим мощность, излучаемую в этом спектральном интервале, графически эта мощность равна площади по кривой (на рис. 1 заштрихована).




Следовательно, полная мощность, излучаемая с площадки единичной площади равна, площади под графиком функции $u(\nu)$, т.е. интегралу от этой функции во всем диапазоне частот $\nu \in [0, \infty]$. В формуле, приведенной в условии задачи, учтено, что полный поток энергии, излучаемой Солнцем, равномерно пересекает сферу с радиусом, равным радиусу земной орбиты[4]. Поэтому в ней стоит отношение квадратов радиуса Солнца к радиусу орбиты Земли.

**A2.** Таким образом, мощность излучения, падающего[5] на поверхность солнечной ячейки, равна интегралу

$$P_{in} = \int_0^\infty u(\nu) d\nu = \int_0^\infty A \frac{R_S^2}{d_S^2} \cdot \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_S}\right) d\nu = \frac{12\pi k^4}{c^2 h^3} T_S^4 \cdot A \frac{R_S^2}{d_S^2} \qquad (2)$$

*Примечание. Этот результат можно также получить, используя значение суммарной мощности излучения Солнца, вычислив, какая его часть попадает на солнечный элемент. Авторы задачи также предусмотрели этот простейший вариант решения:*

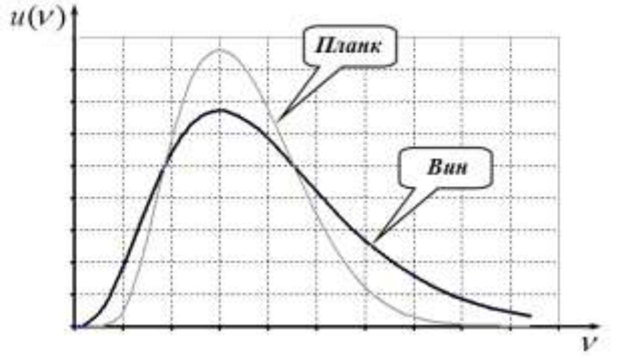
$$P_{in} = L_S \frac{A}{4\pi d_S^2}. \qquad (3)$$

*Эта формула дает более точный результат, чем формула (2), так как не использует приближение Вина!*

*Спектр излучения Солнца, как абсолютно черного тела точно описывается формулой Планка, которая имеет вид*

$$u(\nu) = \frac{2\pi h}{c^2} \nu^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT_S}\right) + 1}.$$

*Формула Вина следует из нее, если пренебречь единицей в знаменателе. Понятно почему, авторы предпочитают использовать приближенную формулу – при интегрировании точной формулы Планка возникают серьезные математические*




---

[4] Важно не перепутать: $d_S$ - это distance, а не диаметр, поэтому distance равен радиусу.

[5] Подсказка для расшифровки обозначения $P_{in}$ - «incident» - падающий.

*проблемы. Для сравнения приведем графики функции Планка и функции Вина (Рис.3). Если все же использовать точную формулу, то в результате интегрирования в формуле (2) коэффициент* $12\pi \approx 37{,}7$ *следует заменить на коэффициент* $\frac{2\pi^5}{15} \approx 40{,}1$. *Различие – менее 10%.*
*Тем не менее, более точный и простой результат (3) оценивался ниже, чем официальный, рассчитанный по формуле (2): очень уж хотелось авторам задач заставить участников провести интегрирование!*

**А3.** Для того, чтобы получить следующие 0,2 балла, следует вспомнить, что энергия фотона определяется формулой $E = h\nu$, Тогда число фотонов в единичном спектральном интервале будет равно

$$n_\gamma(\nu) = \frac{u(\nu)}{h\nu} = A\frac{R_S^2}{d_S^2}\cdot\frac{2\pi}{c^2}\nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_S}\right) \qquad \text{вч} \qquad (4)$$

Разберемся теперь с полупроводниковым солнечным элементом и его КПД. Авторы предлагают простейшую модель: если энергия фотона меньше ширины запрещенной зоны[6] $E_g$, то он не поглощается (его энергия теряется), все фотоны с энергией большей, чем $E_g$ полностью поглощаются, но полезной оказывается только энергия $E_g$ (избыток энергии фотона теряется). Поэтому «полезная» мощность[7] равна произведению числа фотонов, поглощенных в единицу времени, на энергию $E_g$. Все эти рассуждения переводятся на математический язык как

$$P_{out} = h\nu_g \int_{\nu_g}^{\infty} n_\gamma(\nu)d\nu = h\nu_g \int_{\nu_g}^{\infty} A\frac{R_S^2}{d_S^2}\cdot\frac{2\pi}{c^2}\nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_S}\right)d\nu \qquad (5)$$

Подстановку $\frac{h\nu}{kT_S} = x$, приводит интеграл к виду, заданному в условии задачи:

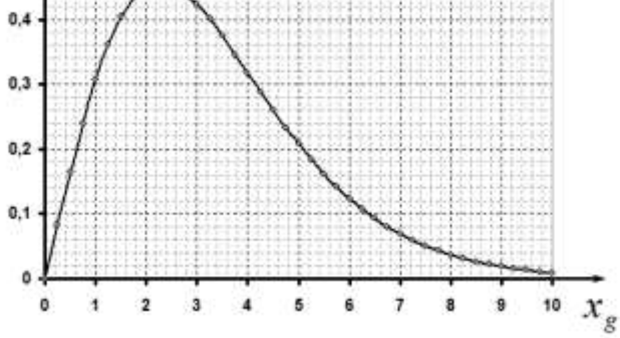
$$P_{out} = h\nu_g \int_{\nu_g}^{\infty} A\frac{R_S^2}{d_S^2}\cdot\frac{2\pi}{c^2}\nu^2 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT_S}\right)d\nu = kT_S\frac{h\nu_g}{kT_S}A\frac{R_S^2}{d_S^2}\cdot\frac{2\pi}{c^2}\left(\frac{kT_S}{h}\right)^3 \int_{x_g}^{\infty} x^2 e^{-x}dx =$$
$$= kT_S A\frac{R_S^2}{d_S^2}\cdot\frac{2\pi}{c^2}\left(\frac{kT_S}{h}\right)^3 x_g\left(x_g^2 + 2x_g + 2\right)e^{-x_g} \qquad (6)$$

Заметим, что для вычисления этого интеграла нужна только аккуратность в алгебраических преобразованиях, а также представление о том, что такое интеграл, и понимание того, какой интеграл необходимо вычислить … и за это целый балл!

**А5.** Следующие две десятых балла дает зацементированное в подсознании наших учеников определение: «КПД – работа полезная, на работу затраченную», точнее

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{1}{6}x_g\left(x_g^2 + 2x_g + 2\right)e^{-x_g}. \qquad (7)$$

**А6.** Вспоминаем уроки алгебры, и по известным правилам строим график этой функции. Опуская подробности, приводим этот график (рис. 3). *Хорошо строить графики, сидя дома за компьютером – на*




---
[6] «band gap» - отсюда индекс «g»
[7] $P_{out}$ : «output» - мощность на выходе.

*олимпиаде и на бумаге это делать несколько сложнее!*

**А7**. Максимуму функции соответствует нулевое значение производной[8], поэтому для нахождения точки максимума следует решить уравнение (правда, сначала его надо получить):

$$\frac{d\eta}{dx_g} = \frac{1}{6}\frac{d}{dx_g}\left(\left(x_g^3 + 2x_g^2 + 2x_g\right)e^{-x_g}\right) =$$
$$= \frac{1}{6}\left(3x_g^2 + 4x_g + 2\right)e^{-x_g} - \frac{1}{6}\left(x_g^3 + 2x_g^2 + 2x_g\right)e^{-x_g} = \frac{1}{6}\left(-x_g^3 + x_g^2 + 2x_g + 2\right)e^{-x_g} = 0 \quad (8)$$

Полученное кубическое уравнение необходимо решить численно, любым из известных методов (например, методом Ньютона, простой итерации, белением отрезка пополам, «научного тыка»). Приведем для примера решение методом простой итерации. Из уравнения

$$-x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0 \quad (9)$$

выразим

$$x = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 2} \quad (10)$$

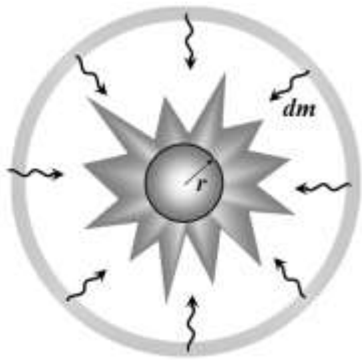
Выберем начальное приближение (очень грубо) $x_{(0)} = 1$ и проведем по формуле (10) подсчет последующих приближений

$$x_{(1)} = 1{,}710$$
$$x_{(2)} = 2{,}028$$
$$x_{(3)} = 2{,}167$$
$$x_{(4)} = 2{,}226$$

Видим, что разность между третьим и четвертым приближением меньше 0,1, поэтому с этой погрешностью корнем уравнения можно считать значение $x \approx 2{,}2$. Большее число итераций по формуле (10) дает значение $x \approx 2{,}26953$.

**А8.** Для заданной ширины запрещенной зоны $E_g = 1{,}11\ эВ$, величина $x_g = 2{,}23$, что дает значение КПД, близкое к максимально возможному $\eta = 0{,}46$.

А9. для расчета гравитационной энергии рассмотрим следующий процесс. Пусть в некоторый момент времени радиус растущей звезды равен $r$, а ее масса $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, соответственно; $\rho$ - плотность звездной материи, которая в данном случае полагается постоянной. Некоторый слой протозвездной материи массы $dm$ падает из бесконечности на поверхность звезды. При его падении выделится тепловая энергия, равная уменьшению потенциальной энергии[9] гравитационного взаимодействия




$$d\Omega = -G\frac{mdm}{r} \quad (11)$$

*Обратите внимание – при бесконечном расстоянии между телами энергия их взаимодействия равна нулю, при уменьшении расстояния она уменьшается (!), поэтому становится отрицательной. Следовательно, гравитационная энергия звезды*

[8] В нашем изложении мы опускаем большинство очевидных математических преобразований. Однако в данном пункте мы их приводим полностью, что у читателей проявилось чувство уважения к членам нашей команды, которые все-таки успели за отведенное время их проделать!

[9] Разгадать загадку, почему энергия обозначена $\Omega$, мы не в состоянии! Может просто буква красивая, и похожа на подкову, приносящую счастье?

*отрицательна, а выделяющаяся теплота, естественно положительна. Небольшой парадокс (для гуманитариев) – когда были далеко – никакой энергии ни гравитационной, ни тепловой; сблизились – появилась и гравитационная, и тепловая!*

Полную гравитационную энергию можно рассчитать, проинтегрировав выражение (11):

$$\Omega = -\int_0^{R_S} G\frac{mdm}{r} = -\int_0^{R_S} G\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\frac{4\pi r^2\rho dr}{r} = -\frac{3}{5}G\frac{M_S^2}{R_S}. \qquad (12)$$

Здесь $dm = 4\pi r^2\rho dr$ - увеличение массы Солнца, при увеличении его радиуса на $dr$.

**A10.** Подстановка численных значений дает оценку времени[10] возможного свечения Солнца за счет его гравитационной энергии

$$\tau_{KH} = -\frac{\Omega}{L_S} = \frac{3GM_S^2}{5L_S R_S} \approx 1{,}88\cdot 10^7\ \text{лет} \qquad (13)$$

Конечно, не мало, но Солнце светит гораздо дольше!

**Часть B. Солнечные нейтрино.**

**B1**. Разберемся теперь с потоком нейтрино. В каждой приведенной реакции

$$4\ {}^1H \rightarrow {}^4He + 2e^+ + 2\nu_e$$

выделяется две частицы. Известна, энергия, выделяющаяся в одной реакции, известна суммарная выделяющаяся энергия – легко найти, число реакций, умножим на два – получим число нейтрино; раделим на площадь уже рассмотренной сферы с радиусом земной орбиты – определим плотность потока нейтрино на поверхности Земли. Осталась арифметика:

$$\Phi_\nu = \frac{L_S}{\Delta E}\times 2\frac{1}{4\pi d_S^2} = 6{,}8\cdot 10^{14}\ \text{м}^{-2}\cdot \text{с}^{-1}. \qquad (14)$$

**B2**. Превращения нейтрино, эффект открытый, буквально «на днях» - и сразу его расчет в заданиях олимпиады для школьников? Не слишком ли? Но подумаем и переформулируем задачу: «У хорошего мальчика Феди было $N_1$ яблок. Плохой мальчик Вася отобрал у Феди какую-то часть яблок. Хорошая учительница поругала Васю, и он отдал $\frac{1}{6}$ часть отобранных яблок (остальные успел съесть). Какую часть яблок отобрал Вася, если после возвращения оставшейся части у Васи оказалось $N_2$ яблок?» С яблоками совсем просто:

$$N_2 = (1-f)N_1 + \frac{1}{6}N_2 \quad \Rightarrow \quad f = \frac{6}{5}\left(1-\frac{N_2}{N_1}\right). \qquad (15)$$

С нейтрино, конечно, сложнее, но ответ тот же.

**B3**. Опять интересное, важное явление, не изучаемое в школе – эффект Черенкова. Но для белорусских «олимпиадников» должно быть знакомое – несколько лет назад, модель этого эффекта рассматривалась на белорусской олимпиаде. Достаточно понимать, что это эффект абсолютно аналогичный волне, идущей от носа быстро движущегося корабля. Такой же «конус» можно наблюдать и на Свислочи, если внимательно посмотреть за плывущими утками. Основная идея проста: тока скорость утки… извините, электрона, больше скорости света в данной среде он излучает! Итак, электрон перестает излучать, когда его скорость становится равной $v = c/n$. Понятно, что энергию надо рассчитывать

[10] Очередная загадка с обозначениями $\tau_{KH}$ ? Прочитайте внимательно – кто авторы рассматриваемой гипотезы?

по релятивистским формулам, поэтому излучение прекратилось, когда энергия электрона уменьшилась до

$$E_{stop} = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} m_e c^2 \quad . \tag{16}$$

А его энергия[11] после столкновения с нейтрино, очевидно, равна этой конечной энергии, плюс та энергия, которую он потратил на излучение, поэтому

$$E_{start} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} m_e c^2 + \alpha\Delta t \quad . \tag{17}$$

Осталось найти, какую энергию электрон получил от нейтрино. Так как до столкновения он покоился, его энергия равнялась энергии покоя $E_0 = m_e c^2$. Окончательно, находим, энергию, полученную электроном от нейтрино

$$E_{im} = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}} m_e c^2 + \alpha\Delta t - m_e c^2 \quad . \tag{18}$$

**В4** Главное в решении данной задачи – понять, почему возникает разброс энергии испущенных нейтрино. Основная подсказка – нейтрино испускаются движущимися ядрами, поэтому энергия нейтрино зависит от скорости источника. Фактически речь идет об эффекте Доплера для нейтрино! Аналогично – фотоны, испущенные движущимися атомами, имеют энергию, которая слегка изменяется при изменении скорости атома. При скоростях малых по сравнению со скоростью света сдвиг частоты $\Delta\nu$ пропорционален скорости источника, точнее можно записать

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{v_z}{c} . \tag{19}$$

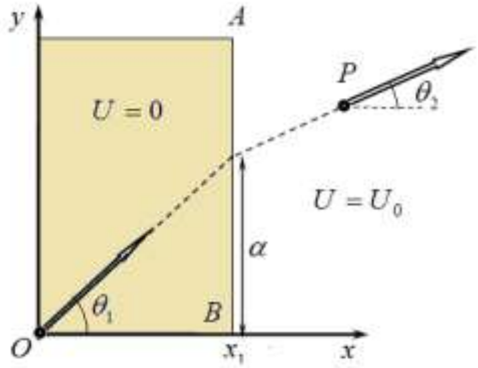
[11] Надеемся, что перевод здешних индексов «stop» и «start» читатели легко найдут в любом англо-русском словаре.

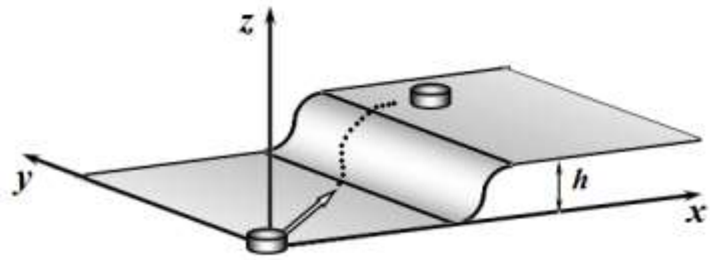
**Задача 2. Принцип экстремума**

*Самое важное для решения данной задачи – понять, что это задача теоретического тура и … сочиняли ее физики-теоретики! А они обладают редкой способностью так описать простейшую ситуацию, что нормальному человеку (не чистому теоретику) потребуется переводчик, чтобы представить себе реальную примитивную систему, о которой идет речь.*

С этой позиции и приступим к решению задачи.

**A1**. Итак, в некоторой области потенциальная энергия частицы скачком изменяется. Но давным-давно известно, что наиболее наглядным видом потенциальной энергии является потенциальная энергия в поле тяжести $U = mgh$, поэтому зависимость потенциальной энергии от координат $U(x, y)$ наглядно представима, как некий профиль земной поверхности $h(x, y)$. Поэтому движение частицы, рассматриваемое в части А данной задачи, можно рассматривать как движение без трения некоторой шайбы, по поверхности с небольшой «ступенькой», грань которой параллельна оси $Oy$ (рис.1)




Только ширину этой ступеньки надо представлять очень малой (что сути дела не изменяет). Итак, внизу модуль скорости шайбы равен $v_1$, чему он станет равным, когда шайба поднимется на высоту $h$ и приобретет потенциальную энергию $U_0$? Решение очевидно: запишем уравнение закона сохранения механической энергии шайбы

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + U_0 \qquad (1)$$

Из которого находим (и получаем первые баллы за решение):

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 - \frac{2U_0}{m}} \qquad (2)$$

Отметим, что этот результат не зависит от того, каким путем материальная точка (шайба) перешла из любой точки области I в любую точку области II.

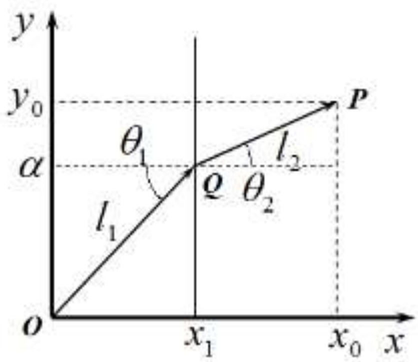
**A2.** Потенциальная энергия шайбы зависит только от координаты $x$, поэтому смещение ее вдоль оси $Oy$ не изменяет кинетической энергии, то есть модуль скорости в таком случае не изменяется. Логично, что в рассматриваемой системе при пересечении ступеньки, изменяется только проекция скорости $v_x$ на ось $Ox$, или сохраняется проекция скорости на ось $Oy$. Будущие теоретики могут вспомнить (даже не понимая!) связь между потенциальной энергией и действующей силой:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}; \qquad (3)$$

Из этих формул следует[1], $F_y = 0$, поэтому $v_y = const$. При любом ходе рассуждений:

$$v_{2y} = v_{1y} \quad \Rightarrow \quad v_2 \sin\theta_2 = v_1 \sin\theta_1 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}. \tag{4}$$

*Следующий пункт задачи, на первый взгляд, абсолютно не понятен для начинающих физиков, хорошо знакомыми только с курсом физики средней школы: непонятная величина «действие» (да еще определенная с помощью интеграла по траектории), непонятно откуда появившийся «принцип наименьшего действия», тем более не понятно, как из этого принципа находить траекторию и закон движения. Однако, во-первых, никто не запрещает немного выходить за рамки школьной программы, хотя бы на уровне чтения научно-популярной литературы. Во-вторых, на олимпиаде нужно уметь решать даже те задачи, с темами которых совсем не знаком – не зря же авторы пишут такие длинные условия, с необходимыми сведениями и подсказками. Воздадим должное и физикам-теоретикам: они сумели сформулировать исходные аксиомы в предельно общем виде, который чаще называют вариационными принципами. Из этих исходных аксиом (постулатов, принципов) логически выводят основные законы, которые изучаются в средней школе. Важность этих подходов подтверждает еще и тем, что они применимы практически ко всем разделам физики, объединяют физику в единую и цельную науку!*




A3. Вернемся к решению задачи путем перевода условия на простой язык. Рассматриваемая точка движется сначала по отрезку прямой $OQ$, длину которого обозначим $l_1$. В этой области потенциальная энергия постоянна, следовательно, на частицу никакие силы не действуют, модуль скорости также остается постоянным. По определению, действие[2] на этом участке равно $A_1 = mv_1 l_1$. После перехода в область II точка движется по отрезку $QP$ (длина которого $l_2$) с постоянной скоростью $v_2$, действие на этом участке: $A_2 = mv_2 l_2$. Суммарное действие на всей траектории равно сумме (интеграл – это сумма!)

$$A = mv_1 l_1 + mv_2 l_2. \tag{5}$$

По условию задачи начальная $O$ и конечная $P$ точки траектории фиксированы, поэтому все возможные траектории однозначно характеризуются точкой пересечения границы $Q$ - поиск реальной траектории сводится к поиску этой точки, то есть ее координаты[3] $y_Q = \alpha$. Также учтем, что скорости частицы $v_1$ и $v_2$ не зависят от координаты точки пересечения границы. Поэтому действие является функцией только одной переменной $\alpha$, от нее зависят длины отрезков $l_1, l_2$. Выразим эти зависимости в явном виде с помощью теоремы Пифагора и запишем в явном виде

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= mv_1 l_1(\alpha) + mv_2 l_2(\alpha) = \\ &= mv_1 \sqrt{x_1^2 + \alpha^2} + mv_2 \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2} \end{aligned} \tag{6}$$

---

[1] Рекомендуем рассмотреть нашу модель – подъем на ступеньку, нарисовать силы тяжести и нормальной реакции поверхности и убедится, что их проекции на ось $Oy$ равны нулю.

[2] Интересная языковая конструкция» силы не *действуют*, … поэтому *действие* равно…». Очевидно, что речь идет о разных «действиях» - сначала в обыденном смысле, а затем в смысле строгой физической величины!

[3] Надо же было так обозначить координату!?

Теперь воспользуемся «мистическим» принципом минимального действия: истинной траекторией является та, для которой записанная функция минимальна. Поиск минимума проводится традиционно: вычисляем производную и полагаем ее равной нулю

$$\frac{dA}{d\alpha} = mv_1 \frac{\alpha}{\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}} - mv_2 \frac{(y_0 - \alpha)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}} = 0. \tag{7}$$

Глянем на рисунок внимательно - видим, что

$$\frac{\alpha}{\sqrt{x_1^2 + \alpha^2}} = \sin\theta_1, \quad \frac{(y_0 - \alpha)}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - \alpha)^2}} = \sin\theta_2, \tag{8}$$

Откуда, находим

$$v_1 \sin\theta_1 = v_2 \sin\theta_2,$$

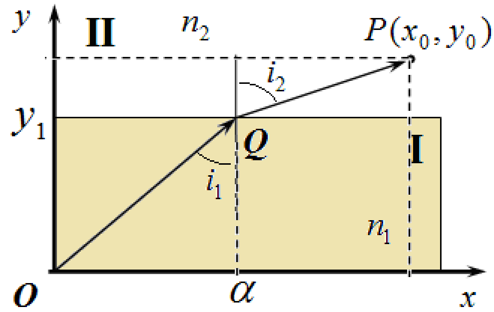
что и было получено ранее!

*Итак, оказывается, что принцип наименьшего действия позволяет формально находить траекторию движения. Почему он справедлив? Потому же, что справедливы законы Ньютона, законы сохранения импульса и энергии – которые можно вывести из этого принципа в самом общем случае!*

**B. Принцип экстремума в оптике**

*Принципу Ферма повезло больше – его упоминают в школьной программе. Как известно, из одного этого принципа следует три основных закона геометрической оптики: закон прямолинейного распространения, закон отражения и закон преломление света. Более того, сам принцип Ферма может быть объяснен исходя из волновых представлений о природе света. Поэтому решение этой части не должно вызывать особых затруднений.*

**B1.** Пусть световой луч пересекает границу областей в точке $Q$, одна из координат которой $y_1$ фиксирована, а вторая (не будем нарушать традицию) $\alpha$ должна рассматриваться как переменная (варьируемая) величина. Тогда время движения луча от точки $O$ до точки $P$ определяется формулой (см. рис. 3)




$$\tau = \frac{|OQ|}{(c/n_1)} + \frac{|QP|}{(c/n_2)} = n_1 \frac{\sqrt{\alpha^2 + y_1^2}}{c} + n_2 \frac{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - y_1)^2}}{c} \tag{9}$$

Реальной траекторией является та, для которой это время минимально, поэтому для определения координаты точ4ки пересечения границы следует решить уравнение

$$\frac{d\tau}{d\alpha} = n_1 \frac{\alpha}{c\sqrt{\alpha^2 + y_1^2}} - n_2 \frac{(x_0 - \alpha)}{c\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = 0 \tag{10}$$

Из рисунка 3 видно, $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + y_1^2}} = \sin i_1$, $\frac{(x_0 - \alpha)}{\sqrt{(x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - y_1)^2}} = \sin i_2$, Поэтому должно выполняться условие

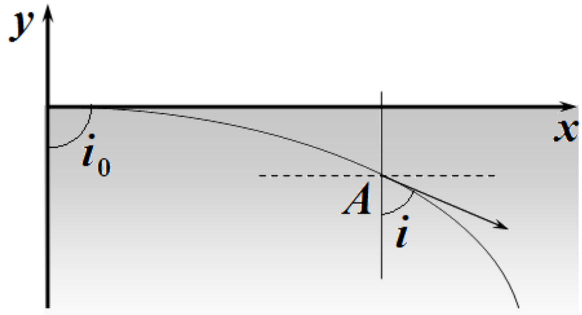
$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \tag{11}$$

которое и выражает закон преломления света – закон Снелиуса.

*Не смотря на внешнее сходство двух принципов наименьшего действия в механике и Ферма в оптики и подобие проведенных выкладок по поиску траектории, в них кроется принципиальной различие. Обратите внимание, что аналогом скорости в механике является показатель преломления в оптике (сравните формулы (4) и (11)). Но показатель преломления – величина обратная скорости! Поэтому траектория частицы, найденная в части А3 не является траекторией, время движения по которой экстремально! Впрочем, эта идея уже «играла» на одной из белорусских олимпиад, в задаче «Оптико-механическая аналогия». Кстати, в этой же задаче был пункт практически совпадающий со следующим пунктом рассматриваемой задачи международной олимпиады.*

**В2.** Закон преломления света (11) является уравнением, позволяющим находить траекторию луча в оптически неоднородной среде. В любой точке этой траектории, описываемой функцией $y(x)$ (которую надо найти) выполняется соотношение

$$ctg\, i = -\frac{dy}{dx} \tag{12}$$




Используя тригонометрическое тождество $1 + ctg^2 i = \frac{1}{\sin^2 i}$, найдем $\sin i = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2 i}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$ и подставим в закон преломления (11)

$$n_0 \sin i_0 = n(y)\sin i \quad \Rightarrow \quad n_0 = \frac{n(y)}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \tag{13}$$

При выводе учтено, что $\sin i_0 = 1$. Данное уравнение преобразуется к виду

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\left(\frac{n(y)}{n_0}\right)^2 - 1}\,. \tag{14}$$

Решение этого уравнения с учетом начального условия $(x = 0, \quad y = 0)$, дает уравнение траектории[4].

В3. Подставляя заданную зависимость показателя преломления от координаты[5] $n(y) = n_0 - ky$ и разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{ky}{n_0}\right)}} = -dx \tag{15}$$

Интегрирование этого уравнения с помощью приведенной формулы (промежуточные выкладки опускаем) дает уравнение траектории в виде

---

[4] Снова сошлемся на белорусский аналог задачи: во-первых, в ней была задана такая зависимость $n(y)$, при которой траектория являлась примитивной параболой; во-вторых, было объяснено, почему искривляется луч, идущий параллельно границе раздела сред. Из законов геометрической оптики этого не следует!

[5] Интересно, что будет в тех случаях, когда показатель преломления станет меньше единицы, или, еще интереснее, меньше нуля?

$$x = \frac{n_0}{k}\ln\left(\frac{n_0 - ky}{n_0} + \sqrt{\left(\frac{n_0 - ky}{n_0}\right)^2 - 1}\right). \qquad (16)$$

**B4.** Этот пункт проверяет навыки участников, как пианистов, то есть умение быстро и правильно нажимать на клавиши калькулятора. Подстановка заданных численных значений в полученную формулу дает результат $x_0 = 24{,}0\,см$.

## C. Принцип экстремума и волновая природа материи

*В этой части задачи рассматривается такое поразительное свойство матери как корпускулярно-волновой дуализм. Суть «безумной» идеи Луи де Бройля заключается в следующем: если световые волны обладают свойствами частиц, то частицы должны обладать свойствами волн! Поэтому формула, связывающая импульс фотона $p$ с длиной волны $\lambda$: $p = \frac{h}{\lambda}$ должна «работать» и в обратном направлении: длина волны движущейся частицы определяется ее импульсом $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. Понимание этой идеи приводит к решению данной части задачи.*

**C1**. Сдвиг фаз волны де Бройля на участке траектории $\Delta s$ определяется так же, как и для любых волн

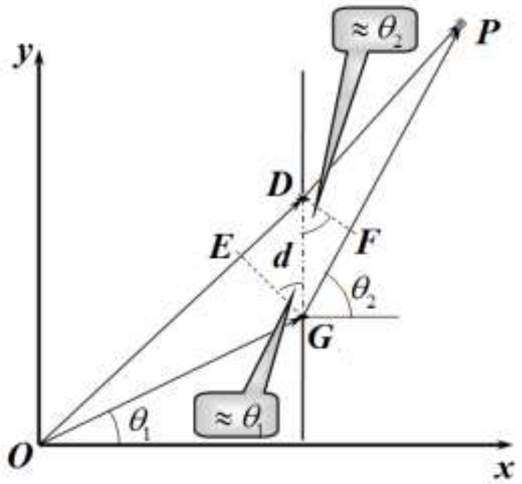
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s\,. \qquad (17)$$

Подставляя выражение для длины волны де Бройля, получим

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta s = \frac{2\pi}{h}mv\Delta s = \frac{2\pi}{h}\Delta A\,. \qquad (18)$$

где $mv\Delta s = \Delta A$ - изменение действия на рассматриваемом участке траектории.

**C2**. Для расчета разности фаз $\Delta\phi$ между классической траекторией $OGP$ и очень близкой к ней траекторией $ODP$ воспользуемся геометрическим методом. Построим для наглядности весьма огрубленный рисунок (вообразите, что ширина щели $|GD| = d$ меньше толщины линии). Из рисунка следует, что разность длин этих траекторий примерно равна разности длин отрезков $ED$ и $GF$, которые примерно равны $|ED| \approx d\sin\theta_1$, $|GF| \approx d\sin\theta_2$.




«Примерно» в данных рассуждениях означает: во-первых, отрезок $ED$ надо проводить не перпендикулярно $OD$, а так, чтобы длины отрезков $OG$ и $OE$ были равны; во-вторых, угол $\angle EGD$ только примерно равен[6] $\theta_1$; аналогично для лучей, идущих после щели. Для расчета разности фаз следует также

[6] Равенство этих углов будет выполняться, если пересекающиеся прямые $OG$ и $OD$ будут параллельными. Для тех, кто признает идею корпускулярно-волнового дуализма, возможная параллельность пересекающихся прямых почти очевидна. Естественно, вы имеете право провести точные алгебраические расчеты, после чего провести разложение полученного выражения, опуская малые величины порядка $d^2$ и выше и убедится в справедливости приведенного геометрического рассмотрения.

учесть, что длины волн до щели $\lambda_1 = \dfrac{h}{mv_1}$ и после нее $\lambda_2 = \dfrac{h}{mv_2}$ отличаются. С учетом проведенных рассуждений, получаем, что разность фаз волн, проходящих по рассматриваемым траекториям равна

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda_1}|ED| - \frac{2\pi}{\lambda_2}|GF| = \frac{2\pi}{(h/mv_1)} d\sin\theta_1 - \frac{2\pi}{(h/mv_2)} d\sin\theta_2 = \\ &= \frac{2\pi md}{h}(v_1\sin\theta_1 - v_2\sin\theta_2)\end{aligned} \qquad (19)$$

Ранее в части **A** было показано, что классической траектории удовлетворяет условие $v_1\sin\theta_1 = v_2 in\theta_2$, поэтому с точностью до малых величин первого порядка найденная разность фаз равна нулю!

*Часть **C** на этом заканчивается, а жаль! Видимо, авторы задач уверены, что участники олимпиады сумеют самостоятельно восхититься полученным результатом: волны прошедшие через щель, приходят в конечную точку **P** в одной фазе – следовательно в результате интерференции усиливают друг друга*[7]*. Следовательно, классической траектории соответствует условие максимума интерференции волн материи! Неужели и мы, люди, только рябь в бесконечном волнующемся океане материи? И только одно может утешить – рябь мыслящая: «Cogio ergo sum!»*

## D. Интерференция волн материи

*«Экран с двумя щелями освещается плоской волной, за ним находится еще один экран, на котором наблюдается интерференционная картина» - это же «знакомая с детства» интерференционная схема Юнга! Только вместо световой волны падает пучок электронов, описываемый волной де Бройля! Поэтому быстро к финишу!*

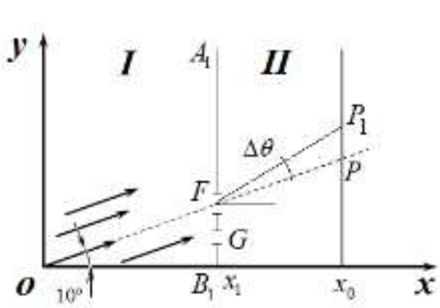
**D1.** Скорость электронов задана, поэтому из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = eU_1 \quad \Rightarrow \quad U_1 = \frac{mv^2}{2e} = 1{,}139\cdot 10^3\, B. \qquad (20)$$

**D2.** Формула (19) для разности фаз между для волн, проходящих через две близкие точки, получена ранее – используем ее при заданном $\sin\theta_1 = \sin\theta_2 = \sin 10°$:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi md}{h}(v_1 - v_2)\sin\theta = 2\pi f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{md}{h}(v_1 - v_2)\sin\theta = 5{,}13 \qquad (21)$$

**D3.** Если в точке $P$ разность фаз равна $2\pi\cdot 5{,}13$, то ближайшей точкой, где наблюдается минимум интерференции, будет точка $P_1$ в которой $\Delta\phi_1 = 2\pi\cdot 5{,}5$ (т.е. полуцелое число длин волн). Для нее разность фаз тоже описывается формулой (19):




$$\Delta\phi_1 = \frac{2\pi md}{h}(v_1\sin\theta - v_2\sin(\theta + \Delta\theta)) \qquad (22)$$

Из этой формулы находим (считая $\Delta\theta$ малым)

$$\begin{aligned}\Delta\phi_1 &= \frac{2\pi md}{h}(v_1\sin\theta - v_2\sin(\theta+\Delta\theta)) = \frac{2\pi md}{h}(v_1\sin\theta - v_2\sin\theta - v_2\cos\theta\cdot\Delta\theta) \quad \Rightarrow \\ \Delta\theta &= -\frac{\dfrac{h\Delta\phi_1}{2\pi md} - (v_1 - v_2)\sin\theta}{v_2\cos\theta}\end{aligned} \qquad (22)$$

---

[7] Фактически эти рассуждения, отнесенные к световым волнам, обосновывают принцип Ферма.

Если координата точки $P$ равна

$$y_P = (x_0 - x_1)tg\theta, \tag{23}$$

То ее изменение (это же искомое расстояние) при переходе к точке $P_1$ равно

$$\Delta y = \frac{x_0 - x_1}{\cos^2\theta}\Delta\theta. \tag{24}$$

Опять тренируем пальчики на клавиатуре калькулятора и находим

$$\Delta y = \frac{x_0 - x_1}{\cos^2\theta}\Delta\theta = -\frac{x_0 - x_1}{\cos^2\theta}\frac{\frac{h\Delta\phi_1}{2\pi md} - (v_1 - v_2)\sin\theta}{v_2\cos\theta} = -16{,}2\,мкм \tag{25}$$

Знак минус говорит, что эту точку надо было нарисовать ниже точки $P$.

**D4.** Если время пролета электрона через установку равно $\tau = \frac{l}{v_2}$ (временем подлета к щели пренебрегаем), то за этот промежуток времени должен испускаться один электрон, поэтому интенсивность потока электронов равна

$$I = \frac{1}{S\tau} \approx 4\cdot 10^{19}\frac{1}{м^2\cdot с}. \tag{26}$$

*Любопытно, а велика ли найденная интенсивность? Подсчитаем силу тока в электронной пушке:* $J = IeS = 1{,}9\cdot 10^{-12}\,A$ *- выводы делайте самостоятельно!*

*Трудно удержаться от последнего комментария: а зачем нужен последний пункт задачи? Действительно такой эксперимент проводился. Действительно, были обнаружены волновые свойства электронов. Для того, чтобы доказать, волновыми свойствами обладает каждый электрон, а не их пучок, интенсивность потока электронов была доведена до минимума, чтобы в каждый момент времени в установке находилось не более 1 электрона!*

## Задача 3. Конструирование ядерного реактора

*После того, как мы разобрались с предельно абстрактной предыдущей задачей, сконструировать ядерный реактор уже не кажется такой уж серьезной проблемой. Тем более, что эта проблема актуальна и хорошо знакома жителям Беларуси.*

### А. Топливный стержень.

**А1.** Выделяющаяся в реакции энергия рассчитывается по знаменитой формуле Эйнштейна $E = mc^2$, точнее

$$\Delta E = \Delta mc^2, \tag{1}$$

где $\Delta m$ - дефект массы, разность между массой исходных реагентов и продуктов реакции. Чтобы получить результат в электрон-вольтах необходимо джоули разделить на заряд электрона. Аккуратный расчет[1] по этой формуле приводит к результату $\Delta E = 208{,}684 МэВ$.

*Интересно, почему же не сохраняется электрический заряд в этой реакции?*

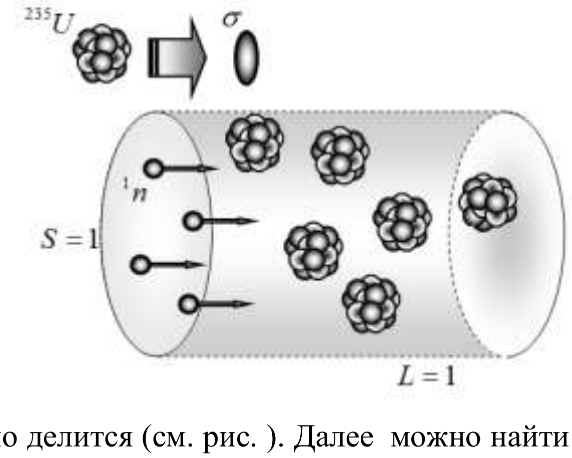
**А2.** Число молекул $UO_2$ в единице объема (следовательно, и число атомов урана) рассчитывается по понятной формуле

$$N_1 = \frac{\rho}{M_w} N_A, \tag{2}$$

где $M$ - молярная масса природного $UO_2$, $N_A$- число Авогадро. Далее не забудем, что только $\eta = 0{,}720\%$ из этого числа составляют атомы интересующего нас изотопа $^{235}U$. Поэтому числа атомов этого изотопа равно

$$N = \frac{\rho}{M_w} N_A \eta = 1{,}702 \cdot 10^{28} м^{-3}. \tag{3}$$

**А3.** К этому пункту задачи следует дать некоторые пояснения, касающиеся смысла заданных величин. В условии задана такая величина, как *«сечение реакции деления»* $\sigma_f$. Эта характеристика имеет строгое определение, связанное с вероятностью возникновения реакции. Однако, в данном случае ее можно понимать и в буквальном смысле: ядро урана рассматривается как диск площади $\sigma_f$, расположенный перпендикулярно потоку нейтронов, вызывающих деление ядра. Если нейтрон попадает в этот диск, то ядро обязательно делится (см. рис. ). Далее можно найти число реакций деления, проходящих в единице объема активной среды в единицу времени. Мысленно выделим внутри активного вещества цилиндр единичной площади поперечного сечения и единичной длины, ориентированный так, чтобы поток нейтронов двигался вдоль его оси (см. рис.) Число ядер урана в этом цилиндре равно их концентрации $N$, в сумме они перекрывают площадь $N\sigma_f$ (так как эта величина мала по сравнением с площадью поперечного сечения выбранного цилиндра, то наложением дисков можно пренебречь). В единицу времени через единичное поперечное сечение




[1] Возможно, что авторам эта задача показалась не слишком сложной. Поэтому они решили компенсировать недостаток сложности арифметическими расчетами с точностью до 6 значащих цифр.

цилиндра проходит число нейтронов, равное их плотности потока $\varphi$. Следовательно, число реакций деления в выделенном цилиндре в единицу времени равно $N\sigma_f\varphi$. В каждое реакции выделяется энергия $\Delta E$ (рассчитанная в пункте А1), при этом $\nu = 80\%$ этой энергии превращается в тепловую, поэтому мощность теплоты, выделяющейся в единицу времени в единице объема активного вещества равна

$$Q = N\sigma_f\varphi\Delta E\nu = 4{,}917\cdot 10^8 \frac{Вт}{м^3}. \qquad (4)$$

А4. Метод размерностей[2] предполагает, что зависимость искомой величины от параметров имеет степенной вид, в данном случае эта зависимость может быть представлена в виде формулы

$$T_c - T_z = kQ^\alpha a^\beta \lambda^\gamma. \qquad (5)$$

Показатели степеней в этой формуле должны быть такими, что бы в итоге получалась величина, имеющая размерность К (Кельвин). Запишем размерности величин (обозначаемых традиционно $[X]$), входящих в формулу (5) и потребуем совпадения размерностей правых и левых частей:

$$[T] = [Q]^\alpha [a]^\beta [\lambda]^\gamma. \qquad (6)$$

Единственной не очень знакомой величиной является теплопроводность $\lambda$, но ее размерность указана в условии рядом с численным значением.

*Поясним: в соответствии с законом теплопроводности Фурье плотность потока теплоты $q$ (количество теплоты, проходящей в единицу времени через площадку единичной площади $[q] = \frac{Вт}{м^2}$) пропорционально градиенту температуры $\frac{dT}{dx}$, причем коэффициентом пропорциональности и служит теплопроводность $\lambda$:*

$$q = -\lambda\frac{dT}{dx}.$$

*Этот закон позволяет установить размерность коэффициента теплопроводности $\lambda$, которая приведена в условии задачи $[\lambda] = \frac{кг\cdot м}{c^{-3}\cdot K}$.*

Подставляя в формулу (6) размерности входящих величин (выраженные через основные единицы системы СИ), получим

$$K = \left(\frac{кг}{м^{-1}\cdot c^{-3}}\right)^\alpha м^\beta \left(\frac{кг\cdot м}{c^{-3}\cdot K}\right)^\gamma. \qquad (7)$$

Чтобы размерности правой и левой частей совпадали должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &\gamma = -1 \\ &\alpha + \gamma = 0 \\ &-\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{aligned}. \qquad (8)$$

Решением этой системы являются числа $\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = -1$. Следовательно, искомая зависимость (5) имеет вид (численное значение безразмерного коэффициента $k = \frac{1}{4}$ задано в условии):

$$T_c - T_z = \frac{Qa^2}{4\lambda}. \qquad (9)$$

---

[2] Метод размерностей почему-то полностью игнорируют в белорусской школе, а зря: он предельно прост, но часто дает весьма значимые результаты.

**A5.** Теплота, выделяющаяся в стержнях[3] должна отводиться к охладителю и затем использоваться в работе генераторов. Так как теплота выделяется по всему объему стержня, то его температура убывает от оси стержня к его поверхности, достигая максимального значения на его оси. Понятно, что эта максимальная температура не должна превышать температуру его плавления $T_m$. Температура поверхности стержня практически совпадает[4] с температурой охладителя $T_0 = 577{,}0K$. Подставляя эти значения в формулу (9) , определим максимально возможный радиус стержня

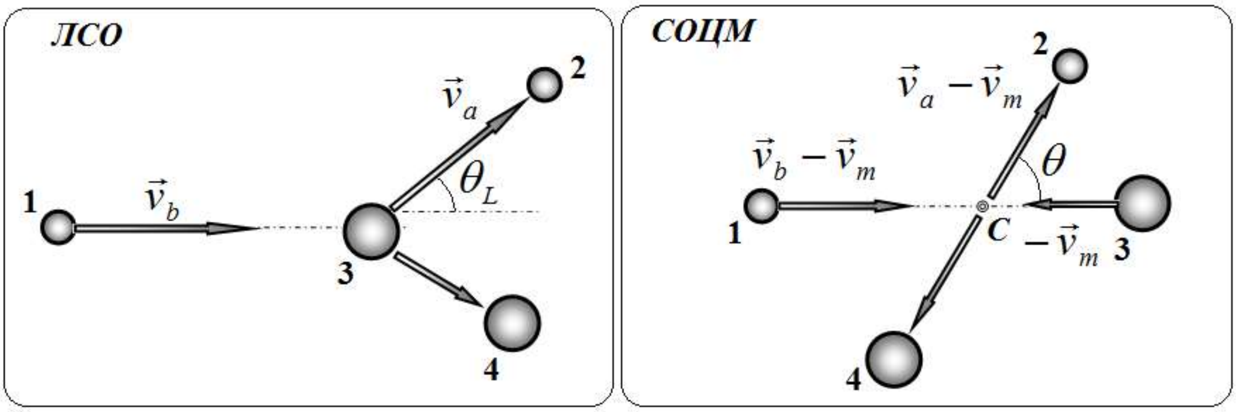
$$T_m - T_0 = \frac{Qa^2}{4\lambda} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{4\lambda(T_m - T_0)}{Q}} = 8{,}186\text{мм}. \qquad (10)$$

Согласитесь – совсем не много, меньше сантиметра!

**B. Замедлитель**

Эта часть задачи является практически традиционной – рассматривается упругое столкновение двух «шариков», правда при не центральном ударе. Расчет результатов таких столкновений легче проводить в системе отсчета, связанной с центром масс системы сталкивающихся тел, потому, что в этой системе центр масс покоится, а суммарный импульс равен нулю, как до столкновения, так и после него.

**B1.** На рисунке показан процесс столкновения в лабораторной системе отсчета (ЛСО), в которой атом замедлителя изначально покоится, и системе отсчета центра масс (СОЦМ), в которой покоится центр масс $C$. В этой системе частицы после столкновения разлетаются в противоположных направлениях, под некоторым углом $\theta$ к направлению исходных скоростей. Этот угол отличается от угла рассеяния нейтрона $\theta_L$ в ЛСО. При переходе в СОЦМ из всех скоростей (конечно, векторов) в ЛСО следует вычесть вектор скорости центра масс.




**B2.** Скорость центра масс в ЛСО находится «по определению»:

$$(1 + A)v_m = 1 \cdot v_b \quad \Rightarrow \quad v_m = \frac{1}{1 + A} v_b \qquad (11)$$

В рассматриваемой задаче используются законы сохранения импульса и механической энергии. Из вида уравнений, выражающих эти законы, следует, что единицы измерения масс частиц и их скоростей могут быть произвольными. Поэтому в уравнении (11) и последующих формулах массы измеряются в а.е.м., если вам это не нравится, считайте,

---

[3] В русскоязычной литературе этот стержень называют ТВЭл - тепловыделяющий элемент.

[4] Подумайте, почему она должна быть немного выше?

что $A$ есть отношение массы атома замедлителя к массе нейтрона[5]. Из закона сохранения импульса следует, что модули скоростей нейтрона $v$ и атома замедлителя $V$ связаны простым соотношением

$$v = AV \tag{12}$$

Уравнение закона сохранения энергии в СОЦМ имеет вид

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}AV^2 = \frac{1}{2}(v_b - v_m)^2 + \frac{1}{2}Av_m^2. \tag{13}$$

Решение системы уравнений (12)-(13), с учетом значения (11), приводит к результату:

$$\begin{aligned} v &= v_b \frac{A}{A+1} \\ V &= v_b \frac{1}{A+1} \end{aligned} \tag{14}$$

В3. Для расчета потерь энергии нейтрона в результате рассеяния следует вернуться в ЛСО. В этой системе скорость нейтрона после столкновения равна $\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}_m$ . Применяя теорему косинусов, для треугольника скоростей, входящих в это выражение, получим

$$v_a^2 = v^2 + v_m^2 - 2vv_m \cos\theta. \tag{15}$$

Так как все скорости. входящие в это уравнение уже известны, то можно найти отношение энергий нейтрона после и до столкновения

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{v_a^2}{v_b^2} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2}. \tag{16}$$

Теперь необходимо это отношение выразить через заданный параметр $\alpha = \left(\frac{A-1}{A+1}\right)^2$.

После не сложных алгебраических преобразований получаем результат

$$G(\alpha,\theta) = \frac{E_a}{E_b} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A+1)^2} = \frac{1}{2}\big((1+\alpha) + (1-\alpha)\cos\theta\big). \tag{17}$$

В4. Минимальная энергия нейтрона после столкновения будет при $\theta = \pi$, т.е. при его рассеянии «назад». В этом случае $G(\alpha, \theta = \pi) = \alpha$, соответственно, доля потерь энергии $f = 1-\alpha$ . При рассеянии нейтрона на тяжелой воде $f = 0{,}181$.

*В данной редакции условия многое не понятно.*

*Во-первых, зачем нужен параметр $\alpha$ ? Только для того, что бы ответ был таким простым $f = 1-\alpha$ ?*

*Во-вторых. Если цель данной части определить максимальные потери энергии, то можно сразу сказать (не переходя в СОЦМ, не решая уравнений, не выводя функцию $G(\alpha,\theta)$, не проводя ее анализ), что максимальные потери энергии будут в том случае, когда скорость атома замедлителя будет максимальна. Очевидно, в этом случае атом должен полететь вперед (а нейтрон назад), т.е при центральном ударе. После этого можно записать два закона сохранения*

$$\begin{aligned} v_b &= v_a + AV \\ v_b^2 &= v_a^2 + AV^2, \end{aligned}$$

*из которых легко определить скорость $V$ и энергию атома после столкновения.*
*Разгадка этого парадокса проста: эта часть задачи в первоначальном авторском варианте имела существенной продолжение, связанное с расчетом средних потерь энергии и количества столкновения, необходимых для того, чтобы энергия нейтрона уменьшилась до величин, при которых нейтрон сможет поглотиться ядром. В этих*

[5] Также мы уверены, что вы уже догадались, что означают индексы в обозначениях скоростей: «b» -before (до), «a» - after (после).

*частях проведенные расчеты полностью оправданы. Но во время обсуждения эти пункты задачи были выброшены!*

**С. Ядерный реактор.**

**С1.** Формальное решение данной задачи очевидно.

В стационарном режиме число вырабатываемых нейтронов должно быть равно числу нейтронов, покидающих реактор, поэтому

$$k_1\left(\left(\frac{2{,}405}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right)\psi=k_2\psi\ , \tag{18}$$

в этом уравнении $\psi$ можно сократить;

Поток нейтронов, покидающих реактор, должен быть минимальным (при постоянном объеме реактора). Поэтому в формуле, определяющий, поток нейтронов можно избавиться от одной из переменных (либо $R$, либо $H$), используя формулу для объема цилиндра $V=\pi R^2H$. Так, например, $R^2=\dfrac{V}{\pi H}$. Тогда производная от функции, определяющей поток нейтронов из реактора, должна быть равна нулю:

$$\frac{d}{dH}\left(\frac{2{,}405^2}{V}\pi H+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right)=0\,. \tag{19}$$

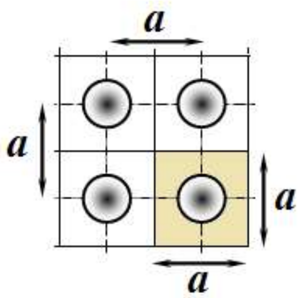
Совместное решение уравнений (18)-(19) приводит к результату $H=5{,}866м,\quad R=3{,}175м$.

*При обдумывании данного пункта задачи возникает целый ряд вопросов. Формулы для потока нейтронов, покидающих реактор, показывает, что их число уменьшается при увеличении размеров реактора!? Но, в эту формулу входит поток нейтронов внутри реактора $\psi$. А как он зависит от формы и размеров реактора? Или он является функцией только объема? Те же вопросы законны и при поиске экстремума – рассмотренный подход справедлив при постоянном $\psi$. А если $\psi$ является функцией от $R, H$, (а не только $V$). Если такие вопросы возникают во время выполнения задания непосредственно на Международной олимпиаде, то их надо сразу отбрасывать, оставляя на свободной время. Так, что иногда много думать вредно!*

Чтобы немного оправдать авторов[6] этой задачи, приводим фотографию ядерного реактора, который будет установлен на белорусской АЭС, его размеры примерно соответствуют полученным результатам!

[6] Ясно, что эту и следующую части задачи разрабатывали физики-экспериментаторы, или инженеры. Эта мысль обосновывается рядом факторов: численные значения коэффициентов приводятся непосредственно в формулах, да сами формулы не понятно откуда взялись, отношение к ним сугубо формальное.

**C2.** Если каналы находятся в вершинах квадратной решетки на расстоянии $a$ друг от друга, то на каждый канал приходится площадь поперечного сечения реактора, равная $a^2$. Поэтому число каналом можно рассчитать по формуле




$$N = \frac{\pi R^2}{a^2} = 387 \qquad (20)$$

где $R$ - радиус реактора, найденный ранее. Если считать, что каналы полностью заполнены двуокись урана, то его полная масса равна

$$m = N\rho\pi r^2 H = 9{,}892 \cdot 10^4 \, кг \qquad (21)$$

Здесь $\rho$ - плотность двуокиси урана, $r$ - заданный радиус канала[7], $H$ - найденная ранее высота реактора.

---

[7] Отметим, что заданный в этой части радиус $r = 3{,}617 см$ почти в 4 раза превышает максимально возможный радиус топливного стержня, найденный в части А5. Так что, стержни, поставленные экспериментаторами должны, по мнению теоретиков (писавших части А и В) расплавиться! Если же они не расплавились, то по мнению экспериментаторов, теоретики явно перестраховались, или … подождем!