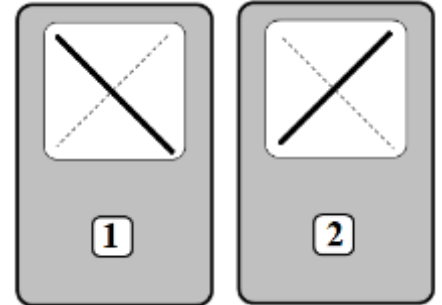


Экспериментальная задача. Увидеть невидимое!

Часть 1. Наблюдаем!

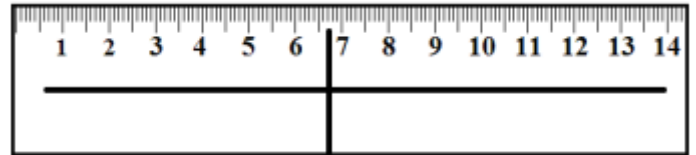
Часть 1.1. Поляризаторы.

Для определения плоскости пропускания поляризаторов можно воспользоваться любым бликом на блестящей поверхности. Известно, что отраженный свет поляризован в плоскости, параллельной отражающей поверхности. Определенные таким образом плоскости пропускания показаны на рисунке.



Часть 1.2. Линейки.

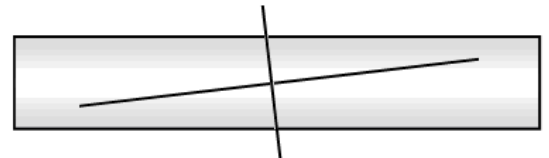
1.2.1. Если падающий свет поляризован вдоль оптической оси или перпендикулярно ей, то в среде будет возбуждаться только одна волна, поэтому изменения поляризации света не произойдет. При такой ориентации линейки между скрещенными поляризаторами свет через систему не пройдет. Таким образом, есть возможность определить либо направление оптической оси, или перпендикулярное ему направление. Эти возможные варианты показаны на рисунке (либо вдоль линейки, либо перпендикулярно ей).



1.2.2. Визуально можно определить те места на линейках, где наблюдаемые цвета одинаковы с преобладанием синего света. Для линейки №1 расстояние между ними равно примерно 12 см, для двух линеек примерно 8 см.

Часть 1.3. Полоска.

1.3.1 Возможные положения оптической оси полоски определяются аналогично. Эти направления образуют небольшой угол $\approx 10^\circ$ со сторонами полоски и показаны на рисунке справа.

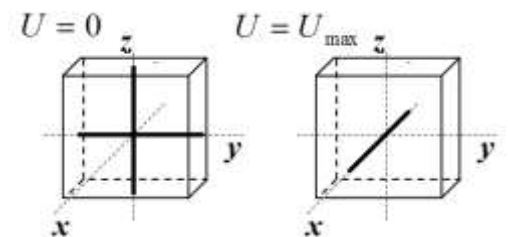


1.3.2 Координаты темных полос примерно равны $x_L = 3,5sm$, $x_R = 7,5sm$.

Часть 1.4. Жидкокристаллическая ячейка.

1.4.1 Положение оптической оси при выключенном напряжении определяется аналогично. Она либо горизонтальна, либо вертикальна. При максимальном напряжении оптическая ось ориентируется вдоль электрического поля, то есть перпендикулярно пластинке.

1.4.2 Значение напряжения на ячейке, при котором происходит резкая переориентация молекул жидкого кристалла, примерно равно

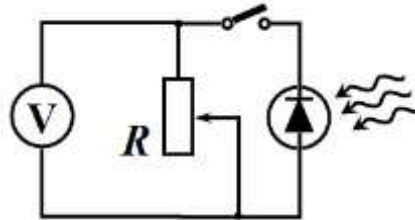


$$U_{cr} = 2 V.$$

Часть 2. Измеряем!

Часть 2.1. Изучение фотоприемника.

2.1.1. Место выключателя показано на рисунке ниже. При измерении сопротивления выключатель должен быть выключен.

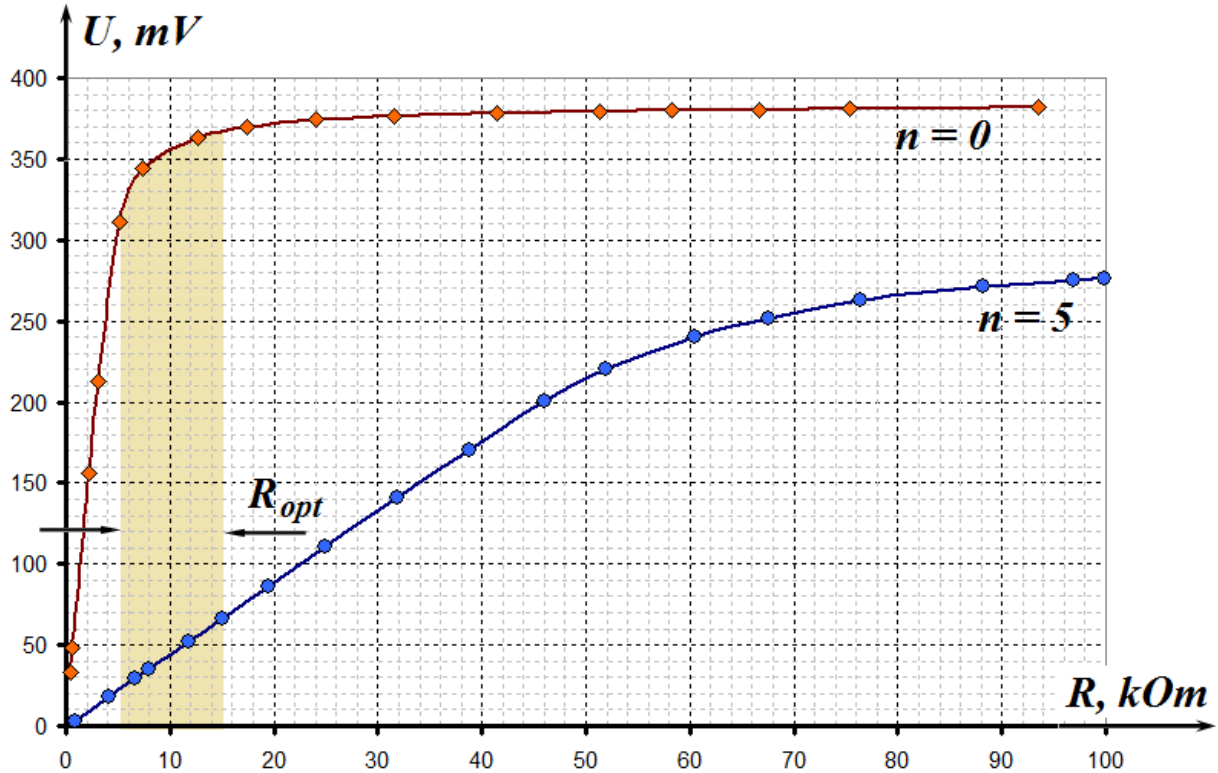


2.1.2 Результаты измерений зависимости напряжения на резисторе U от его сопротивления представлены в таблице 1 и на графике под ней.

Таблица 1.

$n = 0$		$n = 5$	
$R, \text{кОм}$	$U, \text{мВ}$	$R, \text{кОм}$	$U, \text{мВ}$
0,4	33	0,9	3
0,6	48	4,1	18
2,2	156	6,6	29
3,1	213	8,0	35
5,1	311	11,8	52
7,4	344	15,0	66
12,7	363	19,4	86
17,4	370	24,9	111
24,0	374	31,8	141
31,5	376	38,8	170
41,5	378	46,0	200
51,4	379	51,9	220
58,3	380	60,4	240
66,6	380	67,5	252
75,4	381	76,4	263
93,5	382	88,2	271
		96,9	275
		99,8	276

Оптимальное сопротивление резистора должно лежать в диапазоне 5-15 кОм, где диапазон изменения напряжения наибольший.



2.1.3 Результаты измерений зависимости измеряемого напряжения от числа светофильтров при разных значениях сопротивления резистора приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

$R =$	$5,1 \text{ k}\Omega$		$29,9 \text{ k}\Omega$		$20,4 \text{ k}\Omega$		$10,1 \text{ k}\Omega$	
n	$U, \text{ mV}$	$\ln U$	$U, \text{ mV}$	$\ln U$	$U, \text{ mV}$	$\ln U$	$U, \text{ mV}$	$\ln U$
0	351	5,861	391	5,969	388	5,961	377	5,932
1	290	5,670	370	5,914	364	5,897	341	5,832
2	168	5,124	346	5,846	336	5,817	294	5,684
3	92	4,522	317	5,759	309	5,733	179	5,187
4	56	4,025	288	5,663	234	5,455	105	4,654
5	35	3,555	212	5,357	148	4,997	66	4,190

Интенсивность прошедшего света I_n убывает в геометрической прогрессии с увеличением числа светофильтров n :

$$I_n = I_0 \gamma^n. \quad (1)$$

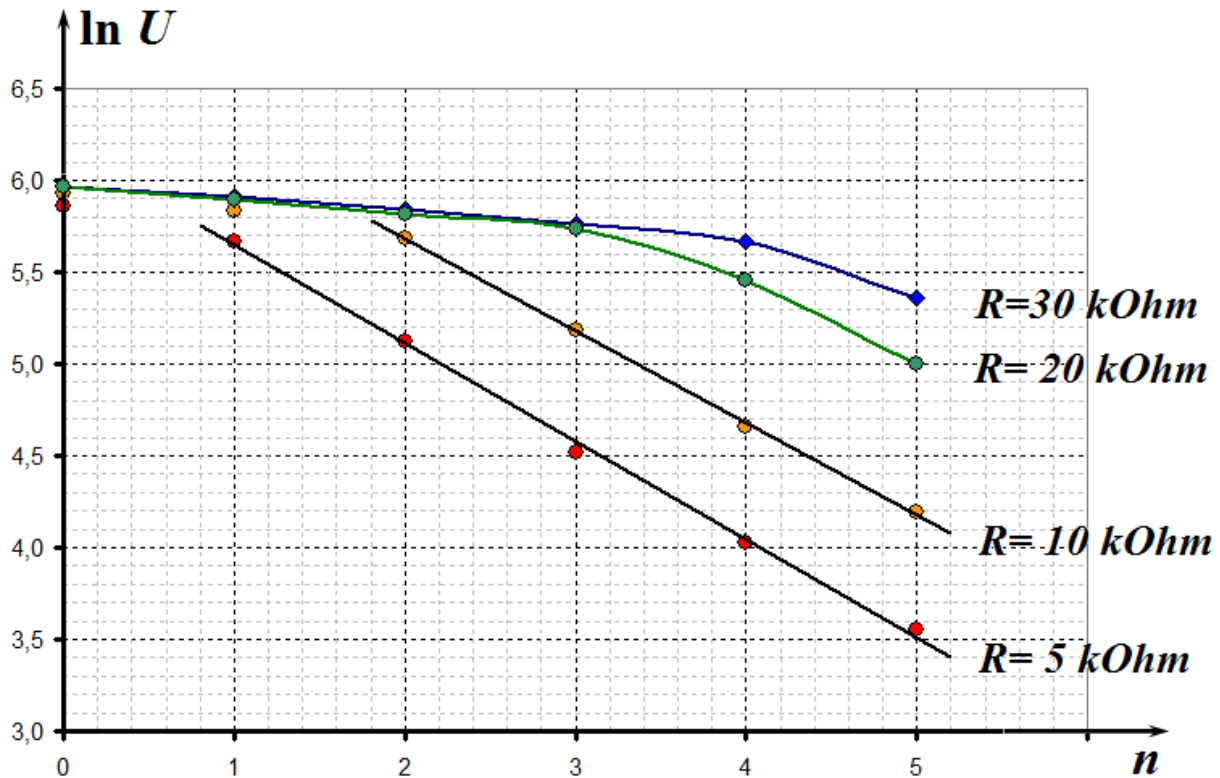
Если измеряемое напряжение пропорционально интенсивности падающего света, то оно будет изменяться по такому же закону:

$$U_n = U_0 \gamma^n. \quad (2)$$

Для проверки этой формулы следует использовать полулогарифмический масштаб, то есть построить график зависимости $\ln U$ от числа n

$$\ln U_n = \ln U_0 + n \ln \gamma. \quad (3)$$

Этот график показан на рисунке.



Из графика следует, что исследуемая зависимость приближается к линейной по мере уменьшения сопротивления. Это значит, что, во-первых, для увеличения точности определения коэффициента пропускания γ можно провести дополнительные измерения при меньшем сопротивлении (здесь приведены данные для $R = 5$ кОм); во вторых, дальнейшие измерения следует проводить при меньшем из заданных сопротивлений, т.е. при $R = 10$ кОм.

Из формулы (3) следует, что коэффициент наклона зависимости (3) равен $a = \ln \gamma$. Значение оттого коэффициента, рассчитанной по методу наименьших квадратов, равно $a = -0.53 \pm 0.03$. Тогда коэффициент пропускания оказывается равным $\gamma = \exp a = 0.59$ с погрешностью, которая рассчитывается по формуле $\Delta\gamma = \exp(a)\Delta a = 0.02$. Окончательно получаем

$$\gamma = 0.59 \pm 0.02.$$

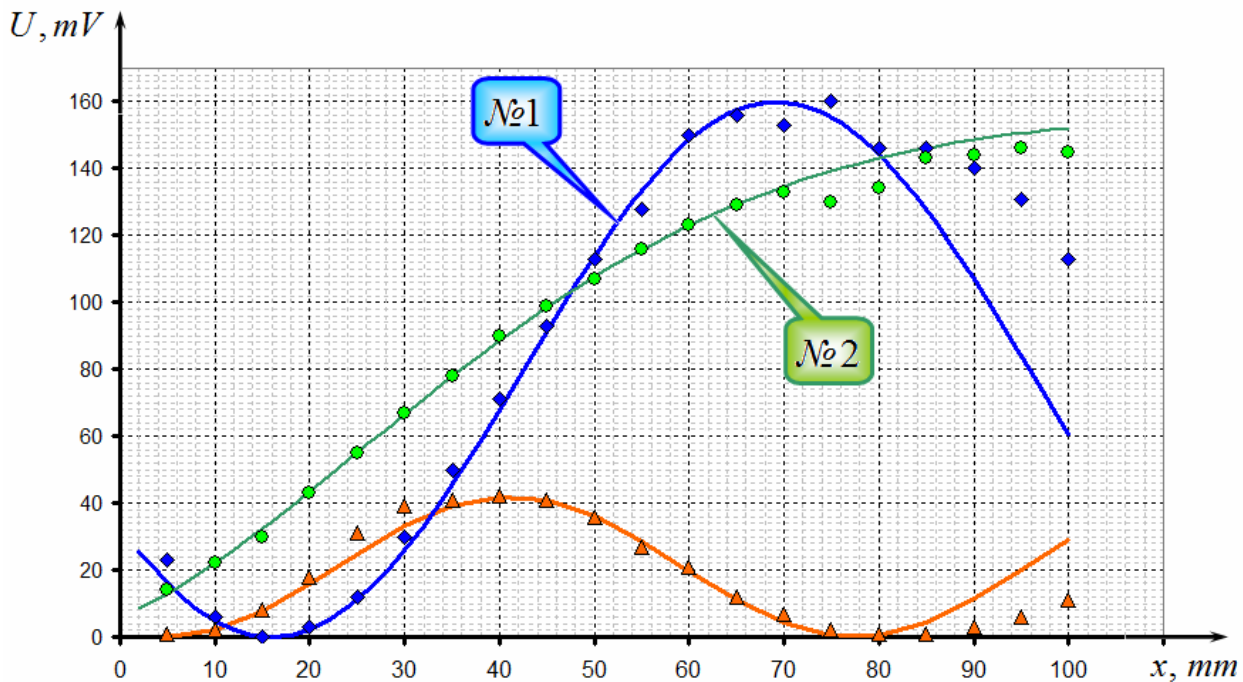
Отметим, что аналогичный расчет, проведенный по результатам измерений при $R = 10$ кОм дает результат $\gamma = 0.59 \pm 0.02$.

Часть 2.2 Прохождение света через пластиковые линейки.

2.2.1 Результаты измерений зависимости интенсивности света от координаты точки прохождения для линеек №1, №2 и двух линеек приведены в таблице 3 и на графике ниже.

Таблица 3.

№1			№2			Две линейки		
X, mm	U, mV	$\Delta\varphi$	X, mm	U, mV	$\Delta\varphi$	X, mm	U, mV	U_{calc}
5	23	0,778	5	14	0,601	5	1	0,0
10	6	0,390	10	22	0,760	10	2	2,1
15	0	0,000	15	30	0,896	15	8	7,7
20	3	0,275	20	43	1,090	20	18	15,7
25	12	0,555	25	55	1,253	25	31	24,7
30	30	0,896	30	67	1,408	30	39	33,0
35	50	1,186	35	78	1,546	35	41	39,2
40	71	1,458	40	90	1,696	40	42	41,9
45	93	1,734	45	99	1,811	45	41	40,8
50	113	1,996	50	107	1,915	50	36	36,0
55	128	2,214	55	116	2,038	55	27	28,5
60	150	2,636	60	123	2,138	60	21	19,6
65	156	2,824	65	129	2,230	65	12	10,9
70	153	2,720	70	133	2,295	70	7	4,1
75	160	3,142	75	130	2,246	75	2	0,4
80	146	2,541	80	134	2,312	80	1	0,5
85	146	2,541	85	143	2,478	85	1	4,4
90	140	2,419	90	144	2,498	90	3	11,4
95	131	2,262	95	146	2,541	95	6	20,1
100	113	1,996	100	145	2,519	100	11	29,0



2.2.2 Для расчета возникающего при прохождении света сдвига фаз необходимо воспользоваться формулой (1), приведенной в условии, которую можно переписать в виде

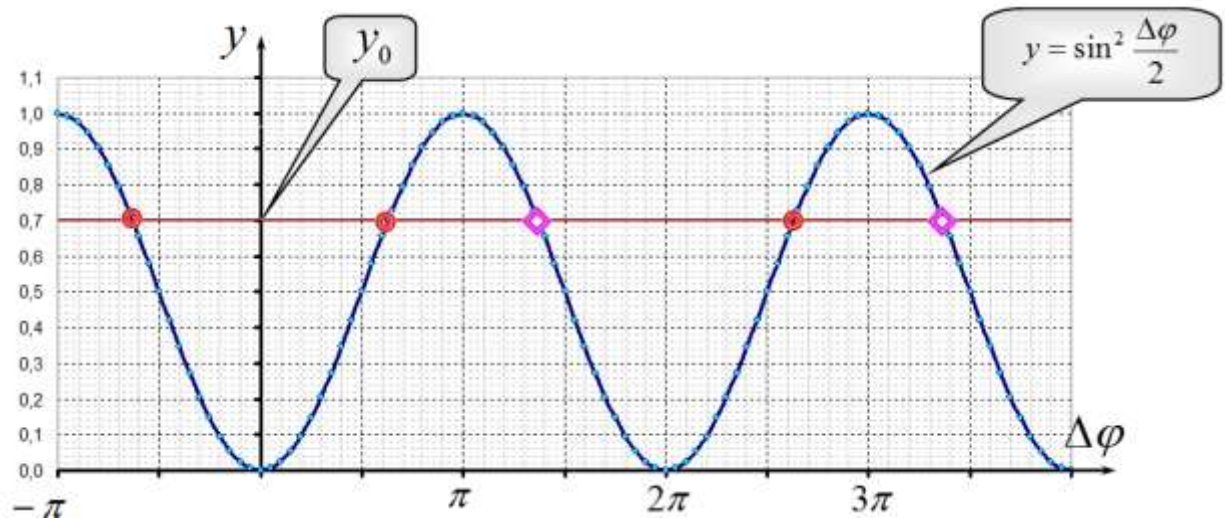
$$U = U_{max} \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad (1)$$

где U_{max} — максимальное значение напряжения. Причем следует быть уверенным, что это напряжение действительно соответствует максимуму функции (1), а не является некоторой граничной точкой. По результатам измерений (см. график) для каждой из линеек в качестве U_{max} следует принять значение $U_{max} = 160$ мВ.

Даже при правильном определении величины U_{max} нахождение сдвига фаз является не простой задачей, так как уравнение

$$y_0 = \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} \quad (1)$$

имеет множество корней. На рисунке ниже показаны эти корни



Формально их значения можно записать в различных формах, например,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \pm 2(\arcsin \sqrt{y_0} + k\pi), \\ \Delta\varphi &= \pm 2(\pi - \arcsin \sqrt{y_0} + k\pi), \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Выбор нужного корня должен основываться на анализе реальной экспериментальной зависимости.

В таблице 3 приведены значения сдвигов фаз, рассчитанных по формуле

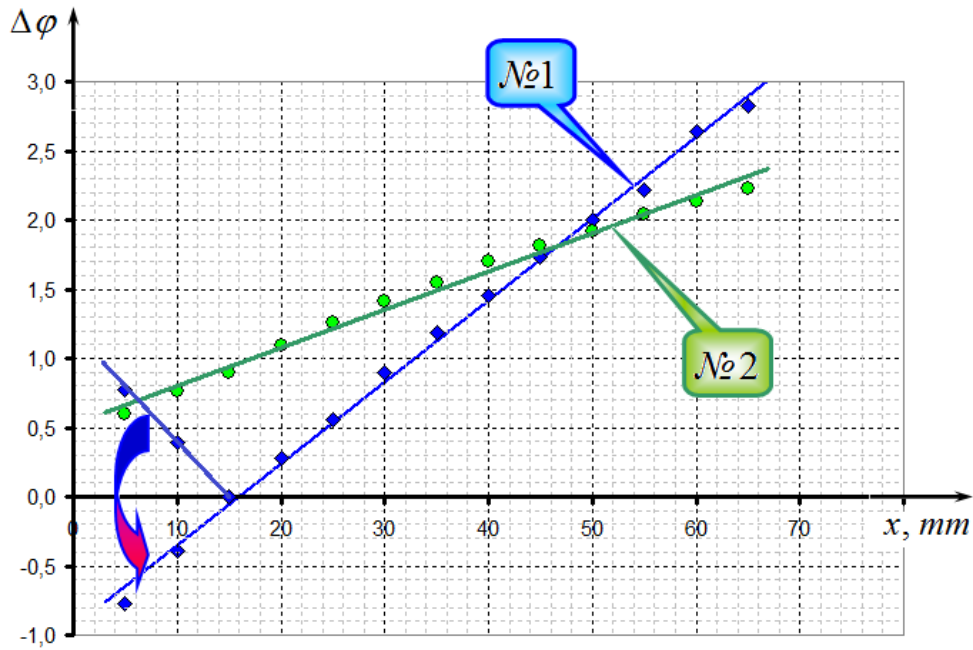
$$\Delta\varphi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{U}{U_{max}}}. \quad (3)$$

Понятно, что зависимость $\Delta\varphi(x)$ должна быть монотонной, поэтому для первых двух точек следует изменить знак корня, что является корректной операцией с точки зрения математики (графически – отразить). Заметим также, что в данном случае сдвиг фаз определен с точностью до аддитивного члена $\pm 2\pi k$.

Полученные зависимости близки к линейным, а расчет по МНК дает следующие значения параметров линеаризованной зависимости

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_1 &= 0.059x - 0.94, \\ \Delta\varphi_2 &= 0.028x + 0.52. \end{aligned}$$

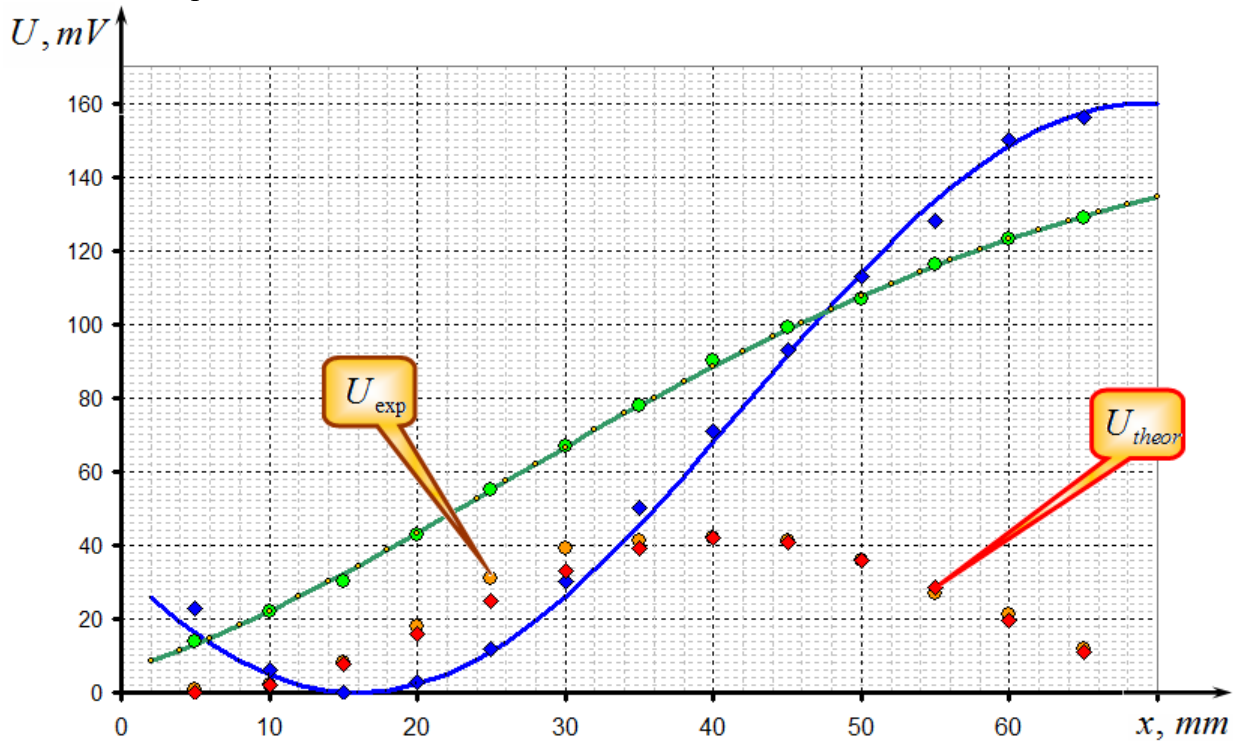
Ниже приведены графики этих зависимостей.



2.2.4 Если сложить две линейки, то возникающие разности фаз суммируются, поэтому теоретическая зависимость интенсивности от координаты имеет вид

$$U = U_{max} \sin^2 \frac{\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2}{2}. \quad (5)$$

Здесь U_{max} — максимальное значение напряжения при прохождении света через две линейки и может быть взято из экспериментальных данных.

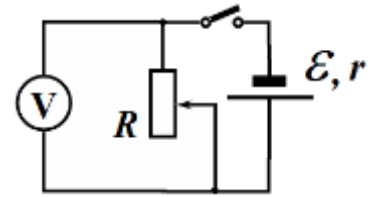


Результаты расчетов по этой формуле приведены в таблице 3 и на графике. Видно хорошее согласие между результатами измерений и теоретических расчетов.

Часть 2.3 ЖК-ячейка.

2.3.1 Изучение источника питания.

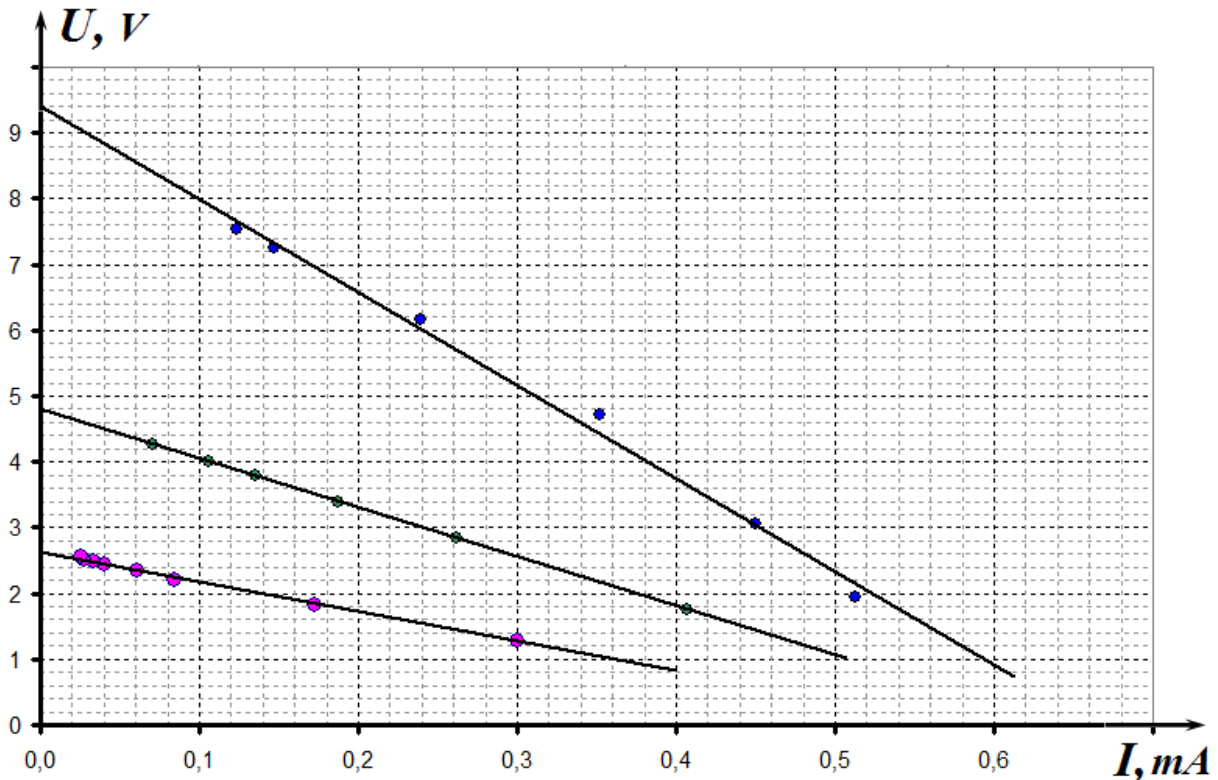
2.3.1.1 Используемая схема измерений приведена на рисунке. В положении выключателя «On» измеряется напряжение, в положении «Off» — сопротивление.



2.3.1.2 Результаты измерений зависимости напряжения U на резисторе от его сопротивления R и рассчитанные по формуле $I = U/R$ значения силы тока приведены в таблице 4. На графике показаны полученные зависимости, U_0 — значение напряжения при непосредственном подключении мультиметра к источнику питания.

Таблица 4.

$U_0=2,67\text{ V}$			$U_0=4,9\text{ V}$					
$R, k\Omega$	U, V	I, mA	$R, k\Omega$	U, V	I, mA	$R, k\Omega$	U, V	I, mA
4,3	1,29	0,300	4,3	1,75	0,407	60,8	7,53	0,124
10,6	1,83	0,173	10,9	2,85	0,261	49,1	7,24	0,147
26,2	2,20	0,084	18,2	3,40	0,187	25,7	6,15	0,239
38,5	2,34	0,061	28,1	3,80	0,135	13,4	4,72	0,352
60,1	2,43	0,040	37,8	4,01	0,106	6,8	3,06	0,450
74,7	2,48	0,033	60,6	4,26	0,070	3,8	1,95	0,513
90,7	2,52	0,028	4,3	1,75	0,407	60,8	7,53	0,124
100,0	2,55	0,026	10,9	2,85	0,261	49,1	7,24	0,147



Полученные зависимости являются линейными, а значит внутреннее сопротивление r не зависит от силы тока (и, следовательно, от сопротивления внешней цепи R), но изменяется при изменении выходного напряжения. В этом случае полученные зависимости определяются законом Ома для полной цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r}, \tag{6}$$

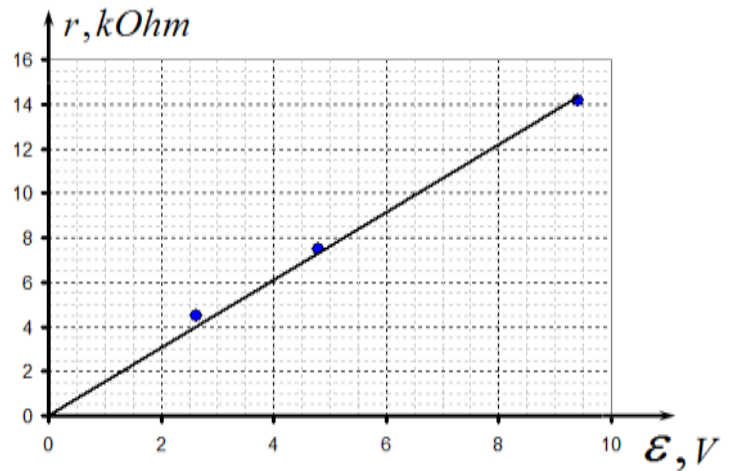
из которого следует формула, описывающая полученные экспериментальные зависимости

$$U = IR = \varepsilon - Ir. \tag{7}$$

Параметры ε и r легко находятся из полученных графиков, как предельное значение при $I \rightarrow 0$ и коэффициент наклона графиков, соответственно.

В таблице ниже приведены эти значения, найденные по экспериментальным данным, рядом — соответствующий график.

ε, V	$r, kOhm$
2,62	4,5
4,8	7,48
9,4	14,13



Таким образом, внутренне сопротивление пропорционально ЭДС:

$$r = C\varepsilon, \quad (8)$$

где коэффициент пропорциональности равен $C = 1.5 \frac{\text{кОм}}{\text{В}}$.

2.3.2 Изучение ЖК-ячейки

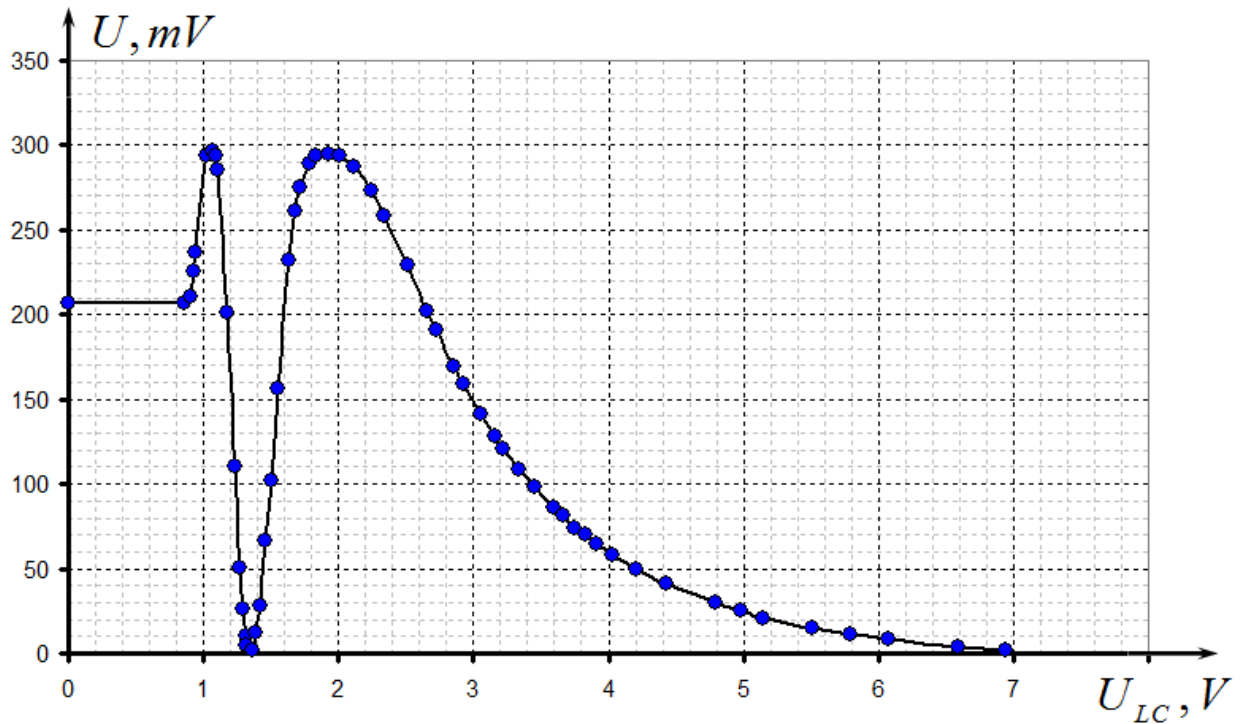
2.3.2.1 Результаты измерений зависимости интенсивности света U от напряжения на ячейке U_{LC} приведены в Таблице 5¹. График полученной зависимости показан на рисунке.

Таблица 5.

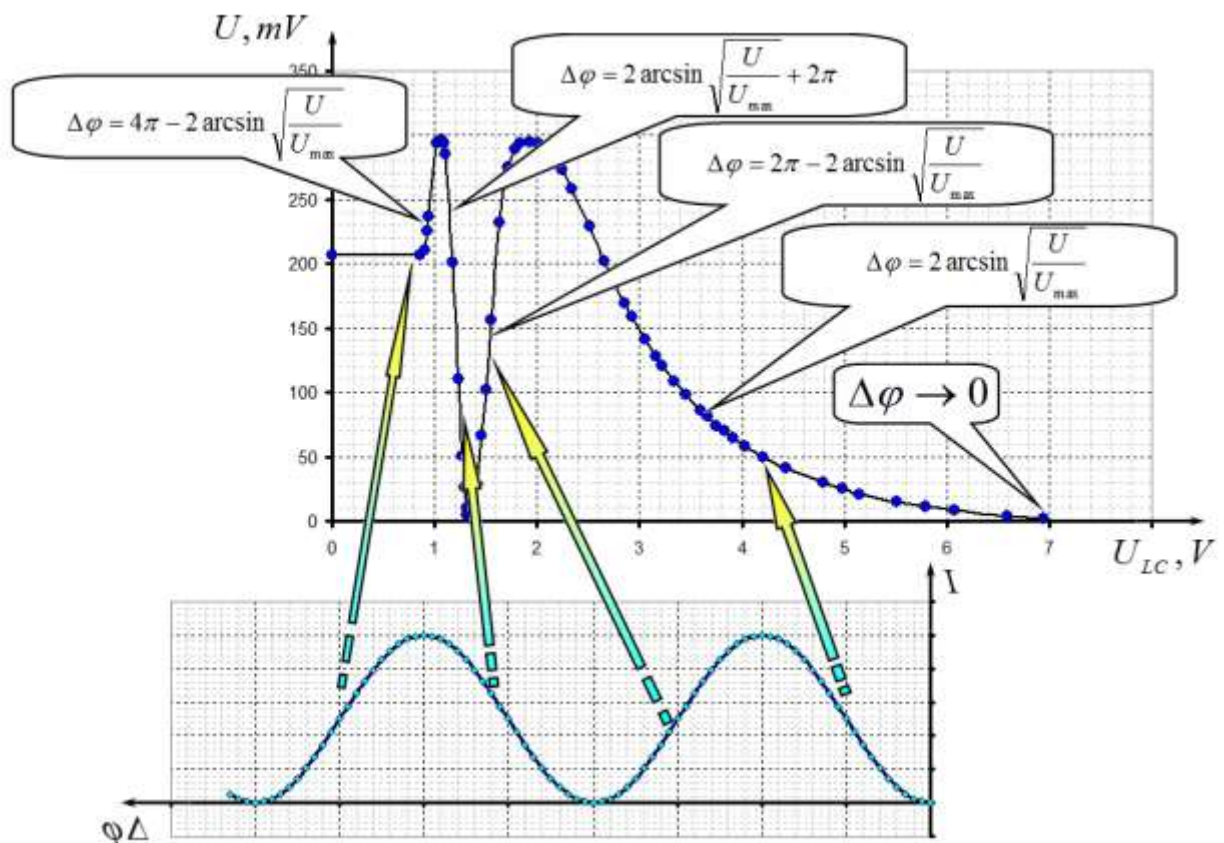
U_{LC}, V	U, mV	$(\Delta\varphi)'$	$\Delta\varphi$	$\ln U_{LC}$	$\ln \Delta\varphi$
0	207	1,961	10,606	-	2,361
0,86	207	1,961	10,606	-0,151	2,361
0,91	211	1,990	10,577	-0,094	2,359
0,93	226	2,102	10,464	-0,073	2,348
0,94	237	2,190	10,377	-0,062	2,340
1,02	294	2,858	9,709	0,020	2,273
1,07	297	2,941	9,625	0,068	2,264
1,09	294	2,858	9,709	0,086	2,273
1,11	285	2,691	8,974	0,104	2,194
1,18	201	1,918	8,201	0,166	2,104
1,23	110	1,301	7,584	0,207	2,026
1,27	51	0,850	7,133	0,239	1,965
1,29	26	0,598	6,881	0,255	1,929
1,31	10	0,367	6,650	0,270	1,895
1,32	5	0,259	6,542	0,278	1,878
1,36	2	0,163	6,447	0,307	1,864
1,39	12	0,403	5,880	0,329	1,772
1,42	28	0,621	5,662	0,351	1,734
1,46	66	0,976	5,307	0,378	1,669
1,5	102	1,245	5,038	0,405	1,617
1,55	156	1,611	4,672	0,438	1,542
1,63	232	2,149	4,134	0,489	1,419
1,68	261	2,404	3,879	0,519	1,356
1,71	275	2,556	3,727	0,536	1,316

¹ Мы не ожидаем, что участники олимпиады получат такое же число точек, вполне достаточно 15-20 значений. Принципиально важно обнаружение провала на графике.

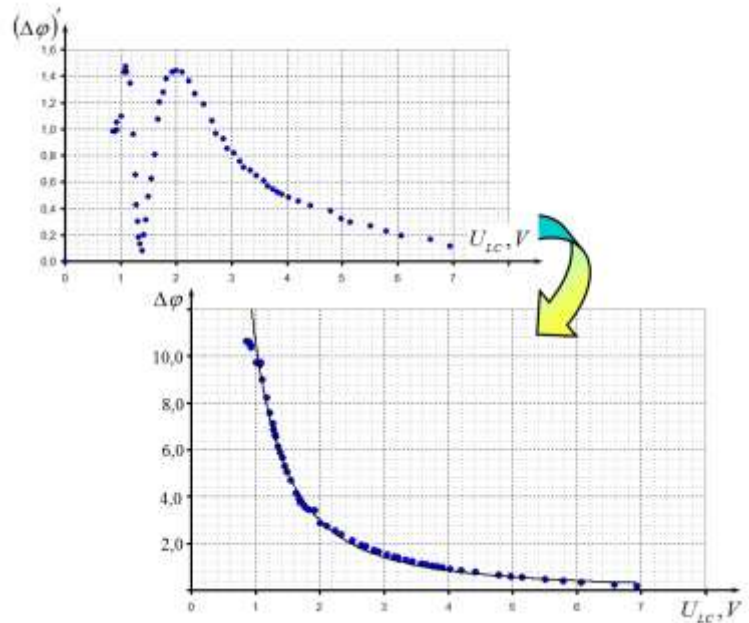
1,78	289	2,756	3,527	0,577	1,260
1,83	294	2,858	3,425	0,604	1,231
1,93	295	2,883	3,401	0,658	1,224
2,01	294	2,858	2,858	0,698	1,050
2,11	287	2,722	2,722	0,747	1,001
2,24	273	2,532	2,532	0,806	0,929
2,34	258	2,375	2,375	0,850	0,865
2,51	229	2,125	2,125	0,920	0,754
2,65	202	1,925	1,925	0,975	0,655
2,72	191	1,848	1,848	1,001	0,614
2,85	169	1,698	1,698	1,047	0,529
2,92	159	1,631	1,631	1,072	0,489
3,05	141	1,511	1,511	1,115	0,413
3,16	128	1,424	1,424	1,151	0,353
3,22	121	1,376	1,376	1,169	0,319
3,34	109	1,294	1,294	1,206	0,258
3,45	98	1,217	1,217	1,238	0,196
3,59	86	1,130	1,130	1,278	0,122
3,66	81	1,093	1,093	1,297	0,089
3,75	74	1,039	1,039	1,322	0,039
3,83	70	1,008	1,008	1,343	0,008
3,91	65	0,968	0,968	1,364	-0,032
4,03	58	0,911	0,911	1,394	-0,094
4,21	50	0,841	0,841	1,437	-0,173
4,43	41	0,757	0,757	1,488	-0,278
4,79	30	0,644	0,644	1,567	-0,441
4,98	25	0,586	0,586	1,605	-0,535
5,15	21	0,536	0,536	1,639	-0,625
5,51	15	0,451	0,451	1,707	-0,796
5,79	11	0,385	0,385	1,756	-0,954
6,07	8	0,328	0,328	1,803	-1,115
6,59	4	0,231	0,231	1,886	-1,463
6,94	2	0,163	0,163	1,937	-1,811



Для правильного расчета разности фаз необходимо правильно выбрать корни уравнения (2). В данном случае это можно сделать однозначно, так как при больших напряжениях U_{LC} разность фаз стремится к нулю $\Delta\varphi \rightarrow 0$. Остальные ветви решений и соответствующие формулы для расчета показаны на рисунке.



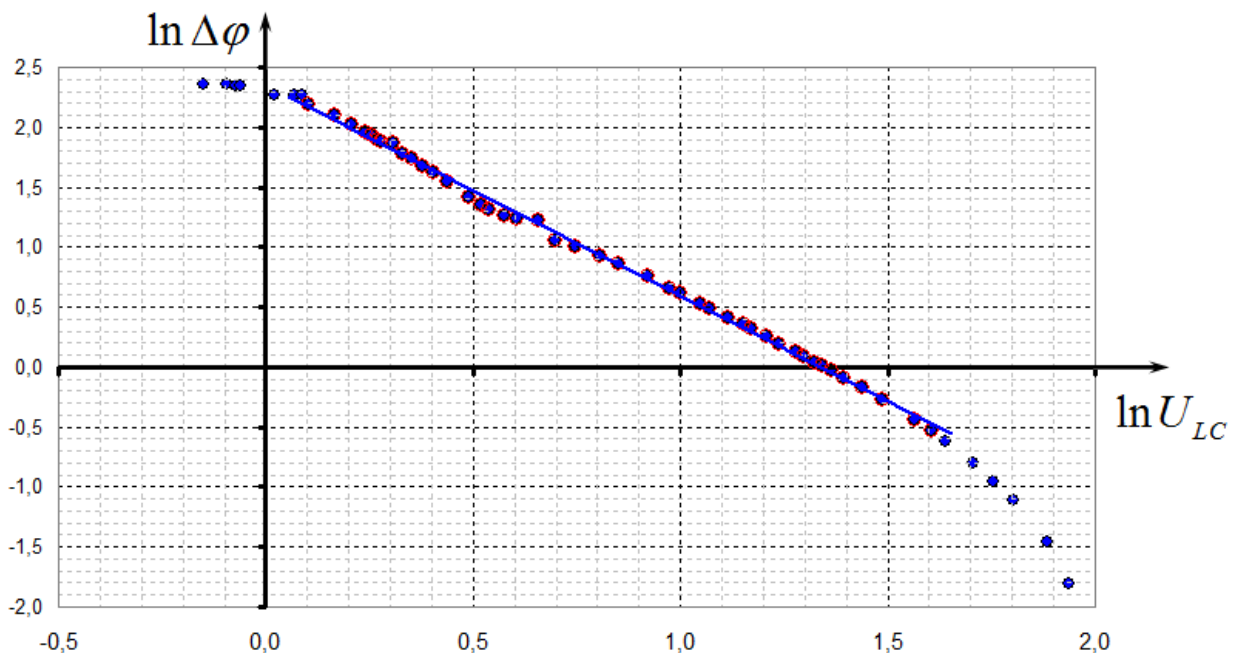
В Таблице приведены результаты расчета величины $(\Delta\varphi)' = \arcsin \sqrt{\frac{U}{U_{max}}}$ и правильное значение сдвига фаз $\Delta\varphi$.



Для наглядности представлены графики этих зависимостей (от участников олимпиады построение этих графиков не требуется).

Значение разности фаз при нулевом напряжении $\Delta\varphi_0 \approx 10.6$.

Для проверки применимости степенной зависимости $\Delta\varphi = CU^\beta$ следует построить последний график в логарифмическом масштабе, что показано на рисунке ниже.



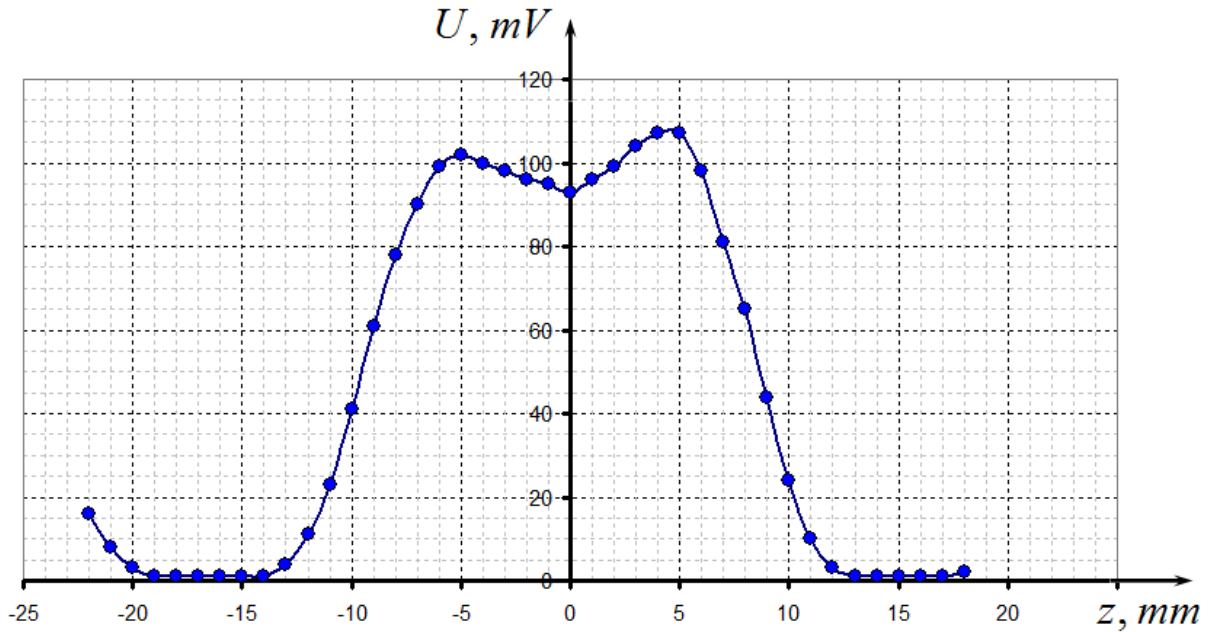
Из графика следует, что в диапазоне напряжений от 1 В до 5 В зависимость практически линейная, что подтверждает применимость рассматриваемой формулы. Показатель степени в этой формуле равен коэффициенту наклона графика, его численное значение $\beta \approx 1.75$.

Часть 2.4 Прохождение света через изогнутую полосу.

2.4.1 Результаты измерений зависимости интенсивности света от координаты точки попадания на пленку приведены в таблице 6 и на графике.

Таблица 6.

x, mm	U, mV	$\Delta\varphi'$	$\Delta\varphi$	z, mm
40	16	0,794	5,489	-22
41	8	0,554	5,729	-21
42	3	0,336	5,947	-20
43	1	0,194	6,090	-19
44	1	0,194	6,090	-18
45	1	0,194	6,090	-17
46	1	0,194	6,090	-16
47	1	0,194	6,090	-15
48	1	0,194	6,090	-14
49	4	0,389	5,894	-13
50	11	0,653	5,630	-12
51	23	0,964	5,319	-11
52	41	1,335	4,948	-10
53	61	1,711	4,572	-9
54	78	2,046	4,237	-8
55	90	2,322	3,962	-7
56	99	2,588	3,696	-6
57	102	2,706	2,706	-5
58	100	2,624	2,624	-4
59	98	2,553	2,553	-3
60	96	2,489	2,489	-2
61	95	2,459	2,459	-1
62	93	2,401	2,401	0
63	96	2,489	2,489	1
64	99	2,588	2,588	2
65	104	2,805	2,805	3
66	107	3,142	3,142	4
67	107	3,142	3,142	5
68	98	2,553	3,730	6
69	81	2,111	4,173	7
70	65	1,787	4,496	8
71	44	1,392	4,891	9
72	24	0,987	5,296	10
73	10	0,621	5,662	11
74	3	0,336	5,947	12
75	1	0,194	6,090	13
76	1	0,194	6,090	14
77	1	0,194	6,090	15
78	1	0,194	6,090	16
79	1	0,194	6,090	17
80	2	0,274	6,009	18



Вид графика свидетельствует, что значение $\Delta\varphi_0$ лежит на восходящей ветви зависимости интенсивности от сдвига фаз, поэтому рассчитывается по формуле

$$\Delta\varphi_0 = 10\pi + 2 \arcsin \sqrt{\frac{U_0}{U_{max}}} \approx 33.9.$$

Так как пленка изогнута, то оптическая длина пути света при его прохождении через пленку зависит от координаты места падения света на пленку. Вблизи центра пленки ее форму приближенно можно считать дугой окружности. Пусть на расстоянии z от центра пленки она наклонена под углом α к плоскости экрана. Тогда радиус кривизны пленки определяется по формуле

$$R = \frac{z}{\sin \alpha}. \quad (9)$$

Рассмотрим прохождения света через пленку, наклоненную под углом α . Оптическая длина пути света в этом случае определяется формулой

$$l = |BC| = \frac{h}{\cos \beta} = \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}, \quad (10)$$

где h — толщина пленки. При выводе формулы (10) использован закон преломления $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$.

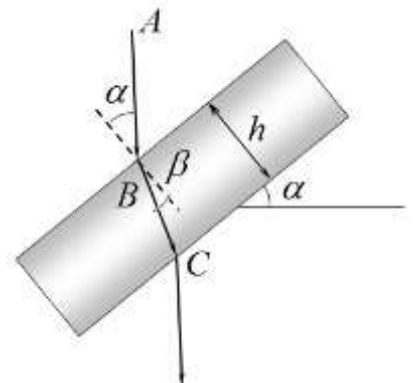
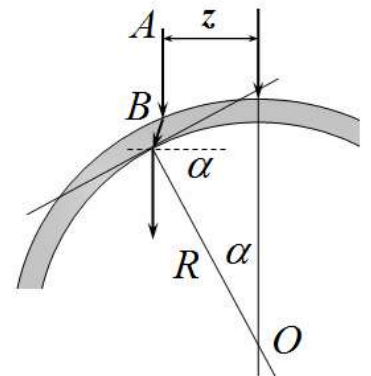
Следовательно, разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами, возникающая при прохождении света, равна

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} l \Delta n = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \Delta n = \frac{\Delta\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}}, \quad (8)$$

где $\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} h \Delta n$ — разность фаз для неизогнутой пленки, или разность фаз в центре.

При малых углах α формулу (8) можно заменить приближенной

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}} \approx \Delta\varphi_0 \left(1 + \frac{z^2}{2n^2 R^2} \right). \quad (9)$$



Таким образом, для определения радиуса кривизны следует проанализировать зависимость сдвига фаз от квадрата расстояния до центра полоски. В таблице приведены рассчитанные значения сдвига фаз (без учета слагаемого 10π). На рисунке справа приведен график этой зависимости. Так как нас интересует только центральная область графика, то «отражение» крайних ветвей графика не проведено. (От участников олимпиады этот график не требуется)

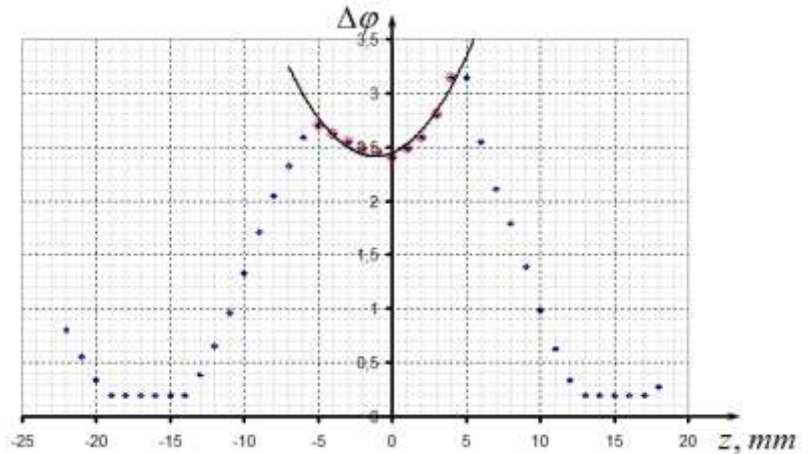


График показывает, что центральная область хорошо аппроксимируется параболической зависимостью

$$\Delta\varphi = az^2 + b. \quad (10)$$

Для определения коэффициентов этой функции можно построить график зависимости $\Delta\varphi$ от z^2 (см. рисунок справа). Используя МНК, можно определить искомые параметры

$$a = 0.0104 \text{ мм}^{-1},$$

$$b = 2.45.$$

К найденному значению b следует прибавить 10π .

Из сравнения формул (9) и (10) следует, что эти параметры выражаются через характеристики полоски следующим образом:

$$\alpha = \frac{\Delta\varphi_0}{2n^2R^2}, \quad b = \Delta\varphi_0. \quad (11)$$

Из этих формул находим значение радиуса кривизны

$$R = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{b}{2a}}. \quad (12)$$

Подстановка численных значений приводит к окончательному результату $R = 29$ мм. Следует отметить, что полученное значение является достаточно грубой оценкой, из-за неточностей измерений.

