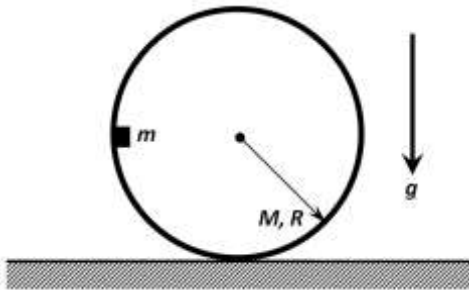


### Задача 1 (9 баллов)

Эта задача состоит из трёх независимых частей

#### Часть А (3 балла)



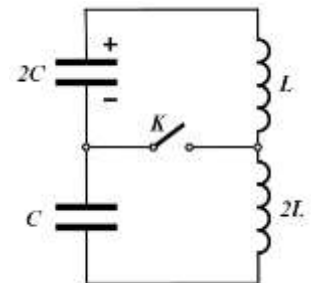
Небольшое тело массой  $m$  осторожно положили на внутреннюю поверхность полого тонкого цилиндра массой  $M$  и радиуса  $R$ . В начальный момент времени цилиндр покоится на горизонтальной поверхности, а тело находится на высоте  $R$  над поверхностью стола. Найдите силу взаимодействия тела и цилиндра в тот момент, когда тело находится в нижней точке своей траектории. Трение между телом и внутренней поверхностью цилиндра отсутствует, а он сам движется по поверхности без проскальзывания. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

#### Часть В (3 балла)

В вакууме находится мыльный пузырь радиуса  $r = 5.00$  см и толщиной стенок  $h = 10.0$  мкм, внутри которого содержится двухатомный идеальный газ. Мыльная пленка имеет поверхностное натяжение  $\sigma = 4.00 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$  и плотность  $\rho = 1.10 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ . 1) Найдите и рассчитайте молярную теплоемкость газа  $C$  в мыльном пузыре; 2) Найдите и рассчитайте частоту радиальных колебаний пузыря. Считайте, что теплоемкость мыльной пленки много больше теплоемкости газа в пузыре.

#### Часть С (3 балла)

В начальный момент в схеме, изображенной на рисунке, ключ  $K$  разомкнут, конденсатор емкостью  $2C$  имеет заряд  $q_0$ , конденсатор емкостью  $C$  не заряжен, ток в катушках индуктивности отсутствует. Конденсатор начинает разряжаться и в момент времени, когда сила тока в катушках достигает максимального значения, ключ  $K$  замыкают. Найдите максимальную силу тока, протекающего через ключ  $K$ . Индуктивности катушек известны и равны  $L$  и  $2L$  соответственно.



## Задача 2. Уравнение состояния Ван-дер-Ваальса

В хорошо известной модели идеального газа, описываемого уравнением Менделеева—Клапейрона, не учитываются два важных физических эффекта. Во-первых, молекулы реального газа имеют конечный размер, во-вторых — они взаимодействуют друг с другом. Во всех частях задачи рассматривается *один моль водяного пара*.

### Часть А. Уравнение состояния неидеального газа

С учетом конечного размера молекул уравнение состояния газа примет вид

$$P(V - b) = RT, \quad (1)$$

где  $P, V, T$  — давление газа, его объем и температура, соответственно,  $R$  — универсальная газовая постоянная, а  $b$  — некоторая постоянная,

<b>A1</b>	Оцените параметр $b$ и выразите его через диаметр атомов $d$ .
-----------	--

С учетом сил межмолекулярного притяжения Ван-дер-Ваальс предложил следующее уравнение, которое описывает жидкое и газообразное состояние вещества

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

При температурах  $T$  ниже некоторой критической температуры  $T_c$  изотерма уравнения (2) представляет собой немонотонную кривую 1, изображенную на рис. 1, которая называется изотермой Ван-дер-Ваальса. На этом же рисунке построена кривая 2 — изотерма идеального газа при той же температуре. Реальная изотерма отличается от изотермы Ван-дер-Ваальса прямым участком  $AB$  с постоянным давлением  $P_{LG}$ , расположенным по оси объемов между  $V_L$  и  $V_G$ , на котором реализуется равновесие жидкости (обозначенной индексом  $L$ ) и газа (обозначенного индексом  $G$ ). Используя второе начало термодинамики Дж. Максвелл показал, что давление  $P_{LG}$  должно быть выбрано таким образом, чтобы показанные на рисунке 1 площади  $I$  и  $II$  были одинаковы.

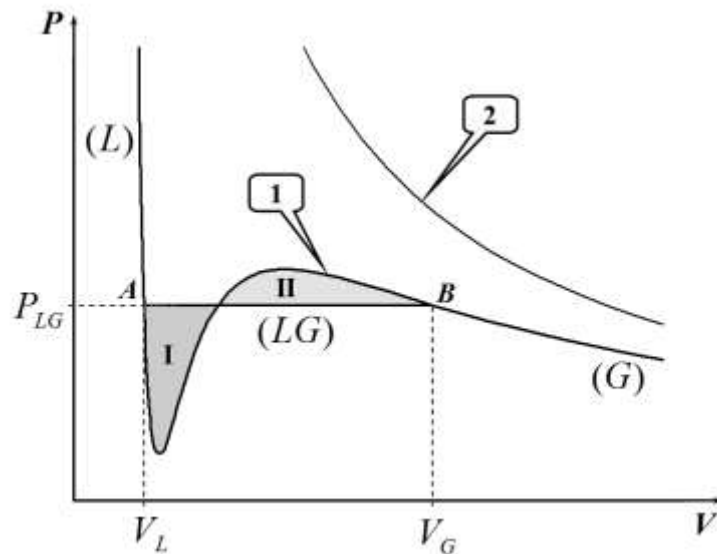


Рисунок 1. Изотерма Ван-дер-Ваальса газа/жидкости (1) и изотерма идеального газа (2).

С увеличением температуры длина прямолинейного участка изотермы уменьшается и при некоторой температуре  $T_c$  и давлении  $P_{LG} = P_c$  обращается в нуль. Параметры  $P_c$  и  $T_c$  называются критическими и могут быть измерены экспериментально с большой точностью.

<b>A2</b>	Выразите постоянные Ван-дер-Ваальса $a$ и $b$ через $T_c$ и $P_c$ .
<b>A3</b>	Для воды $T_c = 647$ К и $P_c = 2.2 \cdot 10^7$ Па. Вычислите $a_w$ и $b_w$ для воды.
<b>A4</b>	Оцените диаметр молекулы воды $d_w$ .

**Часть В. Свойства газа и жидкости**

В данной части задачи рассматриваются свойства воды в газообразном и жидком состояниях, находящейся при температуре  $t = 100\text{ }^\circ\text{C}$ . Давление насыщенного пара при этой температуре равно  $p_0 = 1.0 \cdot 10^5\text{ Па}$ . Молярная масса воды  $\mu = 1.8 \cdot 10^{-2}\text{ кг/моль}$ .

Можно считать, что при описании свойств воды в газообразном состоянии выполняется условие  $V_G \gg b$ .

<b>В1</b>	Получите формулу для объема пара $V_G$ при заданных условиях и выразите его через $R, T, P_{LG}$ и $a$ .
-----------	--

Этот же объем можно приближенно рассчитать с помощью уравнения состояния идеального газа, который мы обозначим  $V_{G0}$ .

<b>В2</b>	Рассчитайте, на сколько процентов уменьшается объем газа вследствие межмолекулярных взаимодействий $\frac{\Delta V_G}{V_{G0}} = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}}$ .
-----------	--

При уменьшении объема пара ниже значения  $V_G$  начинается его конденсация. Однако очищенный пар может оставаться в механически метастабильном состоянии (переохлажденный пар) до тех пор, пока его объем не станет меньше некоторого значения  $V_{G\min}$ .

<b>В3</b>	Найдите и рассчитайте, во сколько раз $V_G/V_{G\min}$ можно уменьшить объем пара, чтобы он оставался в газообразном состоянии.
-----------	--

Можно считать, что при описании свойств воды в жидком состоянии выполняется условие  $P \ll a/V^2$ .

<b>В4</b>	Выразите объем воды в жидком состоянии $V_L$ через $a, b, R$ и $T$ .
-----------	--

Полагая, что  $bRT \ll a$ , рассчитайте следующие характеристики воды. *Не удивляйтесь, если некоторые данные не совпадут с известными вам табличными значениями.*

- |           |  |
|-----------|--|
| <b>В5</b> | Выразите плотность воды $\rho_L$ через $\mu, a, b, R$ и рассчитайте ее.  |
| <b>В6</b> | Выразите объемный коэффициент теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T}$ через $a, b, R$ и рассчитайте его. |
| <b>В7</b> | Выразите удельную теплоту парообразования воды $L$ через $\mu, a, b, R$ и рассчитайте ее.  |
| <b>В8</b> | Рассмотрев мономолекулярный слой воды, оцените ее коэффициент поверхностного натяжения $\sigma$ .  |

**Часть С. Система жидкость-пар**

Из правила Максвелла и уравнения Ван-дер-Ваальса при использованных в части В приближениях следует, что зависимость давления насыщенного пара  $p_0$  от температуры имеет вид

$$\ln p_0 = A + \frac{B}{T} \quad (3)$$

где  $A, B$  — постоянные величины.

<b>C1</b>	Найдите $A, B$ и выразите их через $\mu, a, b, R$ .
<b>C2</b>	Рассчитайте давление насыщенного пара воды из формулы (3) при температуре $t = 100$ °С.

У. Томсон показал, что давление насыщенного водяного пара зависит от кривизны поверхности жидкости. Рассмотрим жидкость, которая не смачивает материал капилляра. При погружении капилляра жидкость опускается на некоторую высоту вследствие поверхностного натяжения (см. рис. 2).

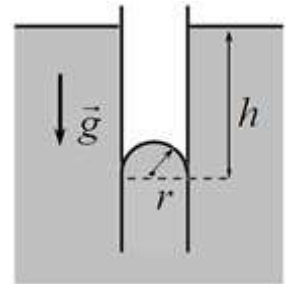


Рисунок 2. Капилляр, погруженный в несмачивающую его жидкость.

<b>C3</b>	Найдите малое изменение давления $\Delta p_T$ насыщенных паров над искривленной поверхностью и выразите его через плотность пара $\rho_s$ , плотность жидкости $\rho_L$ , коэффициент поверхностного натяжения $\sigma$ и радиус кривизны поверхности $r$ .
-----------	---

Метастабильные состояния используются в реальных физических установках, таких как камера Вильсона, пузырьковая камера для регистрации элементарных частиц, а также встречаются в природных явлениях, например, при образовании утренней росы. Переохлажденный пар стремится сконденсироваться, образуя капельки жидкости. Очень маленькие капли быстро испаряются, а достаточно большие могут расти.

<b>C4</b>	Предположим, что вечером при температуре $t_e = 20$ °С пар был насыщенным, а утром температура окружающей среды упала на небольшую величину $\Delta t = 5.0$ °С. Считая давление пара неизменным, оцените минимальный радиус капель, которые не испаряются. Коэффициент поверхностного натяжения воды равен $\sigma = 7.3 \cdot 10^{-2}$ Н/м, его изменением с температурой можно пренебречь.
-----------	---

### Задача 3. Простейшая модель газового разряда

Процесс протекания электрического тока через газ называется газовым разрядом. Существует много типов газовых разрядов, тлеющий разряд используется в осветительных лампах, дуговой разряд применяется для сварки, искровой разряд возникает между облаками и землей в виде молнии.

#### Часть А. Несамостоятельный газовый разряд

В этой части будем изучать так называемый несамостоятельный газовый разряд. Для его поддержания необходимо постоянное присутствие внешнего ионизатора, который в единицу объема газа в единицу времени создает  $Z_{\text{ext}}$  пар однократно ионизированных ионов и электронов.

При включении внешнего ионизатора число пар электронов и ионов начинает расти. Неограниченному увеличению концентрации электронов и ионов в газе препятствует процесс рекомбинации, при котором свободный электрон соединяется с ионом и образуется нейтральный атом. Число рекомбинаций в единицу объема в единицу времени  $Z_{\text{rec}}$  дается формулой

$$Z_{\text{rec}} = r n_e n_i,$$

где  $r$  — постоянная, называемая коэффициентом рекомбинации, а  $n_e$  и  $n_i$  — концентрации электронов и ионов соответственно.

Пусть в момент  $t = 0$  включается внешний ионизатор, а начальная концентрация электронов и ионов в газе равна нулю. Тогда зависимость концентрации электронов  $n_e(t)$  от времени  $t$  выражается формулой

$$n_e(t) = n_0 + a \tanh bt,$$

где  $n_0, a, b$  — некоторые постоянные, а  $\tanh x$  — так называемый гиперболический тангенс.

<b>A1</b>	Найдите $n_0, a, b$ и выразите ответ через $Z_{\text{ext}}$ и $r$ .
-----------	---

При включении одного внешнего ионизатора в газе устанавливается концентрация электронов, равная  $n_{e1} = 12 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ . При включении другого внешнего ионизатора в газе устанавливается концентрация электронов, равная  $n_{e2} = 16 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

<b>A2</b>	Найдите установившуюся концентрацию электронов $n_e$ , если два ионизатора будут включены одновременно.
-----------	---

**Внимание!** В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор действует в течение достаточно длительного промежутка времени, так что все процессы являются стационарными и не зависят от времени. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.

Пусть газ находится в трубке между двумя параллельными проводящими пластинами площади  $S$  расположенными на расстоянии  $L \ll \sqrt{S}$  друг от друга. Приложим к пластинам напряжение  $U$ , при этом между ними образуется электрическое поле. Считайте, что концентрация обоих носителей в трубке практически везде одинакова.

Известно, что в электрическом поле как электроны (обозначенные индексом  $e$ ), так и ионы (обозначенные индексом  $i$ ) приобретают одинаковую скорость упорядоченного движения, равную

$$v = bE,$$

где  $E$  — напряженность электрического поля, а  $b$  — так называемая подвижность.

<b>A3</b>	Выразите силу тока в газе $I$ через $U, b, L, S, Z_{\text{ext}}, r, e$ где $e$ — элементарный заряд.
-----------	--

<b>A4</b>	Найдите удельное сопротивление газа $\rho_{\text{gas}}$ при малых значениях напряжения и выразите его через $b, L, Z_{\text{ext}}, r, e$ .
-----------	--

**Часть В. Самостоятельный газовый разряд**

Изучим процесс зажигания так называемого самостоятельного газового разряда, при котором ток становится самоподдерживающимся.

**Внимание!** В дальнейшем считайте, что внешний ионизатор продолжает действовать, электрическое поле всюду однородно, а рекомбинацией можно полностью пренебречь. Собственным электрическим полем носителей заряда полностью пренебрегайте.

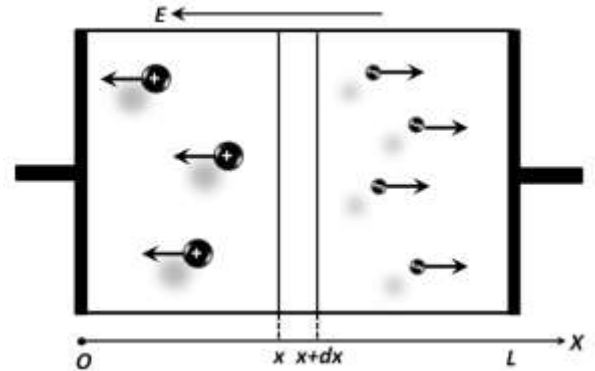
Для самостоятельного газового разряда важны два процесса, не рассмотренных выше. Первый процесс — вторичная электронная эмиссия, а второй — образование электронной лавины. Вторичная электронная эмиссия возникает в тот момент, когда ионы ударяют по отрицательному электроду, называемому катодом, и выбивают из него электроны, которые затем двигаются к положительному электроду, называемому анодом. Отношение числа выбитых в единицу времени электронов  $\dot{N}_e$  к числу ионов  $\dot{N}_i$ , ударяющих катод в единицу времени, называется коэффициентом вторичной электронной эмиссии  $\gamma = \dot{N}_e / \dot{N}_i$ . Образование электронной лавины происходит следующим образом. Электрическое поле ускоряет свободные электроны, которые, ударяя атомы, ионизуют их, в результате чего при движении свободных электронов их число растет. Этот процесс характеризуется коэффициентом Таунсенда  $\alpha$ , который характеризует увеличение числа электронов  $dN_e$  на единице длины их пути  $dl$ , то есть

$$\frac{dN_e}{dl} = \alpha N_e.$$

Полный ток  $I$  в любом сечении трубки с газом складывается из ионного  $I_i(x)$  и электронного токов  $I_e(x)$ , которые в стационарном режиме зависят от координаты  $x$ , показанной на рисунке. Изменение электронного тока  $I_e(x)$  вдоль оси  $x$  описывается формулой

$$I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2,$$

где  $A_1, A_2, C_1$  — некоторые постоянные.



**B1** Найдите  $A_1, A_2$  и выразите их через  $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S$ .

Изменение ионного тока  $I_i(x)$  вдоль оси  $x$  описывается формулой

$$I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x},$$

где  $B_1, B_2, C_2$  — некоторые постоянные.

**B2** Найдите  $B_1, B_2$  и выразите их через  $Z_{\text{ext}}, \alpha, e, L, S, C_1$ .

**B3** Запишите условие для тока  $I_i(x)$  в точке  $x = L$ .

**B4** Запишите условие для токов  $I_i(x)$  и  $I_e(x)$  в точке  $x = 0$ .

**B5** Найдите полный ток  $I$  и выразите его через  $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ .

Пусть коэффициент Таунсенда  $\alpha$  постоянен. Тогда при длине разрядного промежутка, большей некоторого критического значения  $L > L_{\text{cr}}$ , внешний ионизатор может быть отключен и разряд становится самостоятельным.

**B6** Найдите  $L_{\text{cr}}$  и выразите его через  $Z_{\text{ext}}, \alpha, \gamma, e, L, S$ .

Для неона было установлено, что коэффициент Таунсенда  $\alpha$  зависит от напряженности электрического поля  $E$  и давления газа  $p$  по закону

$$\alpha = \alpha_1 p \exp\left(-\frac{\alpha_2 p}{E}\right),$$

где  $\alpha_1 = 4.1 \text{ см}^{-1} \cdot \text{торр}^{-1}$  и  $\alpha_2 = 100 \text{ В}/(\text{см} \cdot \text{торр})$  — постоянные. Считайте, что  $\gamma = 0.20$ .

**B7** Найдите и рассчитайте минимальное значение напряжения  $U_{\text{min}}$ , при котором в неоне может происходить самостоятельный газовый разряд.