

## Задача 1 Часть А

Рассмотрим силы, действующие на тело и цилиндр, они изображены на рисунке. На тело действуют сила тяжести  $mg$  и реакция со стороны цилиндра  $N$ .

На цилиндр действуют сила тяжести  $Mg$ , сила реакции стола  $N_1$ , сила трения  $F_{\text{fr}}$  и сила давления со стороны тела  $N' = -N$ . Запишем уравнения движения в проекции на горизонтальное направление. Для тела имеем

$$ma_x = N \sin \alpha, \quad (\text{A.1})$$

где  $a_x$  — проекция ускорения тела на горизонтальное направление.

Для цилиндра уравнение движения центра масс с ускорением  $w$  запишется так

$$Mw = N \sin \alpha - F_{\text{fr}}. \quad (\text{A.2})$$

Так как цилиндр движется по столу без проскальзывания, то его угловое ускорение равно

$$\varepsilon = w/R. \quad (\text{A.3})$$

Уравнение вращательного движения цилиндра вокруг центра масс имеет вид

$$I\varepsilon = F_{\text{fr}}, \quad (\text{A.4})$$

а момент инерции полого цилиндра равен

$$I = MR^2. \quad (\text{A.5})$$

Решая совместно (A.2) — (A.5), находим

$$2Mw = N \sin \alpha. \quad (\text{A.6})$$

Из уравнений (A.1) и (A.6) заключаем, что

$$ma_x = 2Mw. \quad (\text{A.7})$$

Так как начальные скорости тела и цилиндра равны нулю, то из (A.7) получаем аналогичное соотношение для скоростей в нижней точке

$$mu = 2Mv. \quad (\text{A.8})$$

Запишем закон сохранения энергии с учетом вращательного движения цилиндра в виде

$$mgR = \frac{mu^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \quad (\text{A.9})$$

а угловая скорость вращения цилиндра равна

$$\omega = \frac{v}{R}, \quad (\text{A.10})$$

так как он не проскальзывает.

Решая систему (A.8) — (A.10), окончательно получаем

$$u = 2\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}, \quad (\text{A.12})$$

$$v = \frac{m}{M}\sqrt{\frac{MgR}{2M+m}}. \quad (\text{A.13})$$

В поступательно движущейся системе отсчета, в которой ось цилиндра покоится, тело движется по окружности радиуса  $R$  и в нижней точке имеет скорость

$$v_{\text{rel}} = u + v \quad (\text{A.14})$$

и ускорение

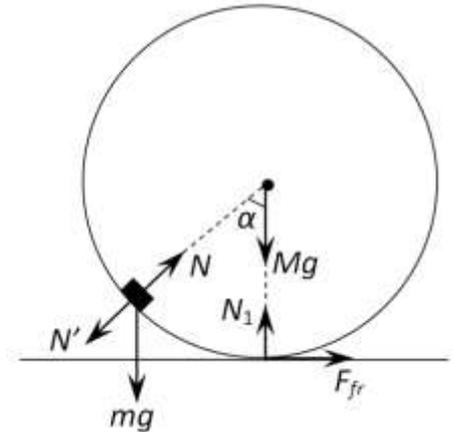
$$a_{\text{rel}} = \frac{v_{\text{rel}}^2}{R}, \quad (\text{A.15})$$

направленное вертикально. Ускорение оси цилиндра относительно ИСО, очевидно, не может иметь вертикальной компоненты, поэтому проекция на вертикальную ось ускорения тела относительно ИСО также равно  $v_{\text{rel}}^2/R$ . Таким образом, уравнение движения тела по окружности в проекции на вертикаль имеет вид

$$F - mg = \frac{mv_{\text{rel}}^2}{R}, \quad (\text{A.16})$$

откуда сила взаимодействия тела и цилиндра равна

$$F = 3mg \left(1 + \frac{m}{3M}\right). \quad (\text{A.17})$$



Часть В

1) По первому началу термодинамики количество передаваемой газу теплоты  $\delta Q$  равно

$$\delta Q = \nu C_V dT + p dV, \quad (B.1)$$

откуда теплоемкость газа при произвольном процессе равна

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT} = C_V + \frac{p}{\nu} \frac{dV}{dT}. \quad (B.2)$$

Здесь  $C_V$  — молярная теплоемкость газа при постоянном объеме,  $p$  — его давление,  $\nu$  — количество молей,  $V$  и  $T$  — объем и температура газа соответственно.

Вычислим производную, стоящую справа. Согласно формуле Лапласа, давление газа внутри пузыря определяется выражением

$$p = \frac{4\sigma}{r}, \quad (B.3)$$

поэтому уравнением любого равновесного процесса с газом является политропа

$$p^3 V = \text{const}. \quad (B.4)$$

Уравнение состояния идеального газа для одного моля имеет вид

$$pV = \nu RT, \quad (B.5)$$

а значит уравнение (B.4) переписывается в виде

$$T^3 V^{-2} = \text{const}. \quad (B.6)$$

Дифференцируя уравнение (B.6) получим искомую производную объема по температуре

$$\frac{dV}{dT} = \frac{3V}{2T}. \quad (B.7)$$

Принимая во внимание, что молярная теплоемкость двухатомного газа при постоянном объеме равна

$$C_V = \frac{5}{2} R, \quad (B.8)$$

с учетом (B.5) получаем

$$C = C_V + \frac{3}{2} R = 4R = 33.2 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}. \quad (B.9)$$

2) Так как теплоемкость газа много меньше теплоемкости пленки и между ними происходит теплообмен, то газ можно считать изотермическим. Рассмотрим круглый фрагмент мыльной пленки, ограниченный углом  $\alpha$  как показано на рисунке. Его площадь равна

$$S = \pi(\alpha r)^2. \quad (B.10)$$

а масса

$$m = \rho S h. \quad (B.11)$$

Пусть  $x$  — увеличение радиуса мыльного пузыря, тогда второй закон Ньютона для участка мыльной пленки имеет вид

$$m\ddot{x} = p'S - F_{\text{surf}}, \quad (B.12)$$

где  $F_{\text{surf}}$  — проекция суммы сил поверхностного натяжения на радиальное направление,  $p'$  — давление газа под поверхностью пленки.

Величина  $F_{\text{surf}}$  легко находится и равна

$$F_{\text{surf}} = F_{ST} \alpha = \sigma \cdot 2 \cdot 2\pi[(r+x)\alpha] \cdot \alpha. \quad (B.13)$$

Так как процесс, происходящий с газом, можно считать изотермическим, то

$$p'V' = pV. \quad (B.14)$$

Считая изменение объема маленьким, получим

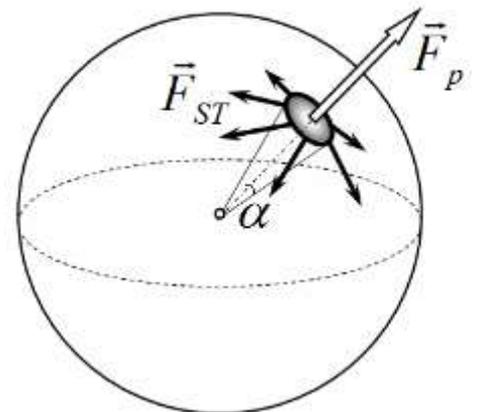
$$p' = p \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{r}\right)^3} \approx p \frac{1}{\left(1 + \frac{3x}{r}\right)} \approx p \left(1 - \frac{3x}{r}\right). \quad (B.15)$$

Таким образом, из (B.10) — (B.16) и (B.3) находим уравнение малых колебаний мыльной пленки

$$\rho h \ddot{x} = -\frac{8\sigma}{r^2} x \quad (B.16)$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h r^2}} = 108 \text{ с}^{-1}. \quad (B.17)$$



### Часть С

Задачу можно решать различными способами. Рассмотрим несколько возможных решений.

#### Метод 1. Прямое вычисление.

В момент максимального тока напряжения на катушках равны нулю, поэтому напряжения на конденсаторах должны быть равны по величине и противоположны по полярности. Пусть  $U$  — напряжения на конденсаторах в момент максимального тока, а  $I_0$  — сам максимальный ток. По закону сохранения заряда

$$q_0 = 2CU + CU, \quad (C2.1)$$

откуда

$$U = \frac{q_0}{3C}. \quad (C2.2)$$

Теперь по закону сохранения энергии

$$\frac{q_0^2}{2 \cdot 2C} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} + \frac{CU^2}{2} + \frac{2CU^2}{2} \quad (C2.3)$$

определяем максимальный ток в катушках

$$I_0 = \frac{q_0}{3\sqrt{2LC}} \quad (C2.4)$$

После замыкания ключа  $K$  в контурах происходят независимые колебания с частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}}. \quad (C2.5)$$

Их амплитуды определяются из законов сохранения энергии

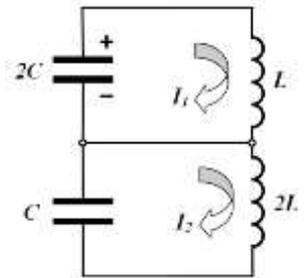
$$\frac{2CU^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2} = \frac{LJ_1^2}{2}, \quad (C2.6)$$

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{2LI_0^2}{2} = \frac{2LJ_2^2}{2}. \quad (C2.7)$$

Отсюда находим соответствующие токи

$$J_1 = \sqrt{5}I_0, \quad (C2.8)$$

$$J_2 = \sqrt{2}I_0. \quad (C2.9)$$



Выберем положительные направления токов в контурах как показано на рисунке. Тогда ток в перемычке

$$I = I_1 - I_2. \quad (C2.10)$$

Зависимость токов от времени имеет вид

$$I_1(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (C2.11)$$

$$I_2(t) = D \cos \omega t + F \sin \omega t, \quad (C2.12)$$

Постоянные  $A, B, D, F$  можно найти, используя уже найденные значения токов в начальный момент времени и их амплитуд

$$I_1(0) = A = I_0, \quad (C2.13)$$

$$A^2 + B^2 = J_1^2, \quad (C2.14)$$

$$I_2(0) = D = I_0, \quad (C2.15)$$

$$D^2 + F^2 = J_2^2. \quad (C2.16)$$

Решая (C.13) — (C.16), получаем

$$B = 2I_0, \quad (C2.17)$$

$$F = -I_0, \quad (C2.18)$$

Знак  $B$  выбран положительным, так как в начальный момент времени ток в первой катушке возрастает.

Знак  $F$  выбран отрицательным, так как в начальный момент времени ток во второй катушке убывает.

Таким образом, зависимость токов от времени имеет вид

$$I_1(t) = I_0(\cos \omega t + 2 \sin \omega t), \quad (C2.19)$$

$$I_2(t) = I_0(\cos \omega t - \sin \omega t). \quad (C2.20)$$

В соответствии с (C.10), ток в перемычке зависит от времени по закону

$$I(t) = I_1(t) - I_2(t) = 3I_0 \sin \omega t. \quad (C2.21)$$

Значит, амплитуда колебаний тока в перемычке равна

$$I_{\max} = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \quad (C2.22)$$

Метод 2.

Вместо определения коэффициентов  $A, B, D, F$  можно воспользоваться векторной диаграммой, показанной на рисунке. Отрезок  $AC$  представляет собой искомый ток, его проекция в начальный момент времени на ось токов равна нулю, так как в момент включения ключа ток через него равен нулю. Ток  $I_1$  в катушке индуктивностью  $L$  возрастает, так как конденсатор емкостью  $2C$  продолжает разряжаться, поэтому этот ток изображается на рисунке отрезком  $OC$ . Ток  $I_2$  в катушке индуктивностью  $2L$  убывает, так как он продолжает заряжать конденсатор емкостью  $2C$ , поэтому этот ток изображается на рисунке отрезком  $OA$ .

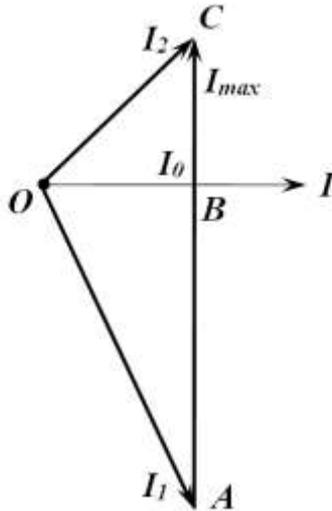
Нам известно, что  $OB = I_0, OA = \sqrt{5}I_0, OC = \sqrt{2}I_0$ . Отсюда находим по теореме Пифагора, что

$$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = 2I_0, \quad (C3.1)$$

$$BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = I_0, \quad (C3.2)$$

Откуда

$$I_{\max} = AC = 3I_0 = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}} \quad (C3.3)$$



Метод 3. Эвристический.

Понятно, что ток в перемычке совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2LC}} \quad (C1.1)$$

и в начальный момент равен нулю, то есть

$$I(t) = I_{\max} \sin \omega t. \quad (C1.2)$$

Поскольку ток в момент переключения равен нулю, то его амплитуда равна производной тока в этот момент времени поделенной на частоту колебаний. Найдем искомую производную тока. Пусть на конденсаторе емкостью  $2C$  остался заряд  $q_1$ . Тогда заряд на конденсаторе емкостью  $C$  будет заряд

$$q_2 = q_0 - q_1. \quad (C1.3)$$

После замыкания ключа скорость изменения тока в катушке индуктивностью  $L$  равна

$$\dot{I}_1 = \frac{q_1}{2LC}, \quad (C1.4)$$

а в катушке индуктивностью  $2L$

$$\dot{I}_2 = \frac{q_0 - q_1}{2LC}. \quad (C1.5)$$

Так как полярности конденсаторов разные, то искомая производная тока по времени равна

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{q_0}{2LC} = \omega^2 q_0. \quad (C1.6)$$

Эта производная не зависит от момента времени, в который включается ключ  $K$ !

Отсюда находим максимальный ток

$$I_{\max} = \frac{\dot{I}}{\omega} = \omega q_0 = \frac{q_0}{\sqrt{2LC}}, \quad (C1.7)$$

который не зависит от момента времени переключения ключа  $K$ !

Задача 2. Газ Ван-дер-Ваальса

Решение

Часть А. Уравнение состояния неидеального газа

**A1.** Для оценки параметра  $b$  можно считать, что этот параметр примерно равен объёму всех молекул:

$$b = N_A d^3 \quad (\text{A1.1})$$

**A2.** Из уравнения Ван-дер-Ваальса можно получить уравнение на объём, занимаемый веществом при заданных значениях давления и температуры

$$P_c V^3 - (RT_c + bP_c)V^2 + aV - ab = 0. \quad (\text{A2.1})$$

Так как при критических значениях параметров длина горизонтального участка равна нулю, то решение уравнения (A2.1) должно иметь один вещественный трехкратный корень, то есть его можно переписать в виде

$$P_c(V - V_c)^3 = 0. \quad (\text{A2.2})$$

Сравнивая коэффициенты выражений (A2.1) и (A2.2), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 3P_c V_c = RT_c + bP_c \\ 3P_c V_c^3 = a \\ P_c V_c^3 = ab \end{cases}. \quad (\text{A2.3})$$

Решением системы (A2.3) являются формулы для коэффициентов Ван-дер-Ваальса

$$a = \frac{27R^2 T_c^2}{64P_c}, \quad (\text{A2.4})$$

$$b = \frac{RT_c}{8P_c}. \quad (\text{A2.5})$$

*Альтернативное решение.*

Критические параметры достигаются при наличии на изотерме точки перегиба, в которой первая и вторая производные обращаются в нуль. Поэтому они определяются выражениями

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_T = 0, \quad (\text{A2.6})$$

и

$$\left(\frac{d^2P}{dV^2}\right)_T = 0. \quad (\text{A2.7})$$

Отсюда получается система уравнений

$$\begin{cases} -\frac{RT_c}{(V_c - b)^2} + \frac{2a}{V_c^3} = 0 \\ \frac{2RT_c}{(V_c - b)^3} - \frac{6a}{V_c^4} = 0 \\ \left(P_c + \frac{a}{V_c^2}\right)(V_c - b) = RT_c \end{cases}, \quad (\text{A2.8})$$

которая имеет тоже самое решение (A2.4) и (A2.5).

**A3.** Вычисления для воды приводят к следующему результату

$$a_w = 0.56 \frac{\text{м}^6 \cdot \text{Па}}{\text{моль}^2}. \quad (\text{A3.1})$$

$$b_w = 3.1 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}. \quad (\text{A3.2})$$

**A4.** Из уравнений (A1.4) и (A3.2), получаем

$$d_w = \sqrt[3]{\frac{b}{N_A}} = 3.7 \cdot 10^{-10} \text{ м} \approx 4 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (\text{A4.1})$$

Если для оценки размера молекул считать, что параметр  $b$  равен суммарному объёму всех молекул ( $b = N_A \pi d^3 / 6$ ), то получится

$$d_w = \sqrt[3]{\frac{6b}{\pi N_A}} = 4.6 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (\text{A4.1a})$$

В дальнейших расчётах мы будем полагать

$$d_w = 4 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

**Часть В. Свойства пара и жидкости**

**В1.** Используя условие  $V_G \gg b$ , уравнение Ван-дер-Ваальса можно переписать в виде

$$\left(p_0 + \frac{a}{V_G^2}\right)V_G = RT. \quad (B1.1)$$

Решением квадратного уравнения является

$$V_G = \frac{RT}{2p_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right). \quad (B1.2)$$

Меньший корень в выражении (B1.2) дает объем в неустойчивом состоянии на возрастающей ветви изотермы Ван-дер-Ваальса. Объему пара соответствует больший корень, так как при  $a = 0$  должно получаться выражение для объема идеального газа, то есть

$$V_G = \frac{RT}{2p_0} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right). \quad (B1.3)$$

При заданных значениях параметров величина  $\frac{ap_0}{(RT)^2} = 5.8 \cdot 10^{-3}$ . Поэтому можно считать, что  $\frac{ap_0}{(RT)^2} \ll 1$ , тогда (B1.3) принимает вид

$$V_G \approx \frac{RT}{p_0} \left(1 - \frac{ap_0}{R^2T^2}\right) = \frac{RT}{p_0} - \frac{a}{RT}. \quad (B1.4)$$

**В2.** Для идеального газа

$$V_{G0} = \frac{RT}{p_0}, \quad (B2.1)$$

откуда

$$\left(\frac{\Delta V_G}{V_{G0}}\right) = \frac{V_{G0} - V_G}{V_{G0}} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4ap_0}{R^2T^2}}\right) \approx \frac{ap_0}{R^2T^2} = 0.58\%. \quad (B2.2)$$

**В3.** Механическая устойчивость термодинамической системы реализуется при условии

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_T < 0. \quad (B3.1)$$

Минимальный объем, при котором вещество еще находится в газообразной фазе, соответствует точке, в которой

$$V_{Gmin} \rightarrow \left(\frac{dP}{dV}\right)_T = 0 \quad (B3.2)$$

Используя уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(\frac{dP}{dV}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0. \quad (B3.3)$$

Из (B3.2) и (B3.3), используя приближение  $V_{Gmin} \gg b$ , получаем

$$V_{Gmin} = \frac{2a}{RT}. \quad (B3.4)$$

Таким образом

$$\frac{V_G}{V_{Gmin}} = \frac{R^2T^2}{2ap_0} = 86. \quad (B3.5)$$

**В4.** Используя условие  $P \ll a/V^2$ , уравнение Ван-дер-Ваальса можно переписать в виде

$$\frac{a}{V_L^2}(V_L - b) = RT \quad (B4.1)$$

Решением квадратного уравнения является

$$V_L = \frac{a}{2RT} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}\right). \quad (B4.2)$$

В данном случае следует взять меньший корень, так как при  $T \rightarrow 0$  должно получаться выражение для объема жидкости  $V_L = b$ , то есть

$$V_L = \frac{a}{2RT} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4bRT}{a}}\right) \approx b \left(1 + \frac{bRT}{a}\right). \quad (B4.3)$$

**В5.** Так как формула (B4.3) дает объем одного моля жидкости, то ее плотность равна

$$\rho_L = \frac{\mu}{V_L} = \frac{\mu}{b(1 + \frac{bRT}{a})} \approx \frac{\mu}{b} = 5.8 \cdot 10^2 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (B5.1)$$

**В6.** В соответствии с формулой (B4.3) объемный коэффициент теплового расширения равен

$$\alpha = \frac{1}{V_L} \frac{\Delta V_L}{\Delta T} = \frac{bR}{a + bRT} \approx \frac{bR}{a} = 4.6 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}. \quad (B6.1)$$

**B7.** Теплота, необходимая для превращения жидкости в газ, расходуется на преодоление межмолекулярных сил, которые создают отрицательное давление  $a/V^2$ . Поэтому

$$E = L\mu \approx \int_{V_L}^{V_G} \frac{a}{V^2} dV = a \left( \frac{1}{V_L} - \frac{1}{V_G} \right), \quad (\text{B7.1})$$

откуда с учетом  $V_G \gg V_L$

$$L = \frac{a}{\mu V_L} = \frac{a}{\mu b \left( 1 + \frac{bRT}{a} \right)} \approx \frac{a}{\mu b} = 1.0 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}. \quad (\text{B7.2})$$

**B8.** Рассмотрим некоторый объем воды  $V$ . Если из него изготовить мономолекулярный слой толщиной  $d$ , то затраченная на это работа будет равна

$$A = 2\sigma S. \quad (\text{B8.1})$$

Изготовление мономолекулярного слоя может быть интерпретировано как испарение эквивалентного объема воды, на которое затрачивается количество теплоты

$$Q = Lm, \quad (\text{B8.2})$$

где масса дается выражением

$$m = \rho Sd. \quad (\text{B8.3})$$

Используя (A4.1), (B5.1) и (B7.2), получаем

$$\sigma = \frac{a}{2b^2} d_w = 0.12 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (\text{B8.4})$$

### Часть С. Система жидкость-пар

**C1.** Из правила Максвелла следует

$$\int_{V_L}^{V_G} P(V) dV = p_0(V_G - V_L). \quad (\text{C1.1})$$

Вычисление интеграла приводит к уравнению для определения  $p_0$

$$\int_{V_L}^{V_G} \left( \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right) dV = RT \ln \left( \frac{V_G-b}{V_L-b} \right) + a \left( \frac{1}{V_G} - \frac{1}{V_L} \right) = p_0(V_G - V_L). \quad (\text{C1.2})$$

Используя неравенство  $b, V_L \ll V_G$  и формулы (B2.1) и (B4.3), это уравнение можно упростить

$$RT \ln \left( \frac{RT}{p_0 b^2 RT} - \frac{a}{b} \right) = RT. \quad (\text{C1.3})$$

Решением этого уравнения является

$$\ln p_0 = \ln \frac{a}{b^2} - \frac{a}{bRT} - 1. \quad (\text{C1.4})$$

Следовательно, для А и В справедливы выражения

$$A = \ln \left( \frac{a}{b^2} \right) - 1, \quad (\text{C1.5})$$

$$B = -\frac{a}{bR}. \quad (\text{C1.6})$$

**C2.** Собирая вместе формулы (C1.4), (C1.5) и (C1.6), получим выражение для давления

$$p_0 = \frac{a}{b^2 \exp\left(\frac{a}{bRT} + 1\right)} = 6.2 \cdot 10^5 \text{ Па}. \quad (\text{C2.1})$$

**C3.** В состоянии равновесия давление в жидкости и газе на всех высотах должно быть одинаковым. Давление в жидкости  $p$  на глубине  $h$  связано с давлением насыщенного пара над плоской поверхностью соотношением

$$p = p_0 + \rho_L gh. \quad (\text{C3.1})$$

Известно, что поверхностное натяжение создает избыточное давление, определяемое формулой Лапласа

$$\Delta p_L = \frac{2\sigma}{r}. \quad (\text{C3.2})$$

То же самое давление зависит от давления пара над искривленной поверхностью жидкости  $p_h$  и ее кривизны по формуле Лапласа

$$p = p_h + \frac{2\sigma}{r}. \quad (\text{C3.3})$$

Кроме того, давление пара на разных высотах связаны соотношением

$$p_h = p_0 + \rho_S gh. \quad (\text{C3.4})$$

Решая совместно (C3.1) — (C3.4), получим

$$h = \frac{2\sigma}{(\rho_L - \rho_S)gr}. \quad (\text{C3.5})$$

Отсюда находим искомую разность давлений

$$\Delta p_T = p_h - p_0 = \rho_S g h = \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_S}{\rho_L - \rho_S} \approx \frac{2\sigma}{r} \frac{\rho_S}{\rho_L}. \quad (\text{C3.6})$$

Отметим, что давление насыщенного пара над выпуклой поверхностью жидкости превышает его давление над плоской поверхностью.

**C4.** Пусть  $P_e$  — давление насыщенного пара при температуре  $T_e$ , а  $P_e - \Delta P_e$  — давление насыщенного пара при температуре  $T_e - \Delta T_e$ . В соответствии с пунктом В4, при уменьшении температуры давление насыщенного пара изменится на величину

$$\Delta P_e = P_e \frac{a}{bRT_e^2} \Delta T_e. \quad (\text{C4.1})$$

В соответствии с формулой Томсона, полученной в части С3, давление насыщенного пара над каплей возрастает на величину  $\Delta p_T$ . Пока капля имеет малый размер, пар над ней будет ненасыщенным. Только начиная с некоторого минимального размера каплей, пар над ней станет насыщенным.

Так как давление должно быть неизменным, то должно выполняться условие

$$P_e - \Delta P_e + \Delta p_T = P_e. \quad (\text{C4.2})$$

Считая газ практически идеальным газом, можно найти его плотность

$$\rho_S = \frac{\mu P_e}{RT_e} \ll \rho_L. \quad (\text{C4.3})$$

Из уравнений (C4.1) — (C4.3), (B5.1) и (C3.6) находим

$$\frac{2\sigma}{r} \frac{\mu P_e}{RT_e} = P_e \frac{a \Delta T_e}{bRT_e^2}. \quad (\text{C4.4})$$

Откуда с учетом окончательно имеем

$$r = \frac{2\sigma b^2 T_e}{a \Delta T_e} = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{ м}. \quad (\text{C4.5})$$

**Задача 3. Простейшая модель газового разряда**

**Решение**

**Часть А. Несамостоятельный газовый разряд**

**A1.** Получим уравнение, описывающее изменение концентрации электронов со временем. Оно определяется двумя процессами: генерацией пар ионов внешним ионизатором и рекомбинацией электронов с ионами. В процессе ионизации электроны и ионы образуются парами, а при рекомбинации – исчезают парами, поэтому их концентрации равны в любой момент времени

$$n(t) = n_e(t) = n_i(t). \quad (A1.1)$$

Тогда уравнение, описывающее изменение концентрации электронов и ионов со временем запишется в виде

$$\frac{dn(t)}{dt} = Z_{ext} - rn(t)^2. \quad (A1.2)$$

Нетрудно показать, что при  $t \rightarrow 0$  функция  $\tanh bt \rightarrow 0$ , поэтому в силу начального условия  $n(0) = 0$ , находим

$$n_0 = 0. \quad (A1.3)$$

Подставляя в (A1.2) выражение  $n_e(t) = a \tanh bt$  и разделяя переменные по независимым функциям (гиперболическим, или 1 и  $e^x$ ), получаем

$$a = \sqrt{\frac{Z_{ext}}{r}}, \quad (A1.4)$$

$$b = \sqrt{rZ_{ext}}. \quad (A1.5)$$

**A2.** Согласно уравнению (A1.4) установившаяся концентрация электронов при включенных внешних ионизаторах равна

$$n_{e1} = \sqrt{\frac{Z_{ext1}}{r}}, \quad (A2.1)$$

$$n_{e2} = \sqrt{\frac{Z_{ext2}}{r}}, \quad (A2.2)$$

$$n_e = \sqrt{\frac{Z_{ext1} + Z_{ext2}}{r}}. \quad (A2.3)$$

Откуда получаем аналог теоремы Пифагора

$$n_e = \sqrt{n_{e1}^2 + n_{e2}^2} = 20.0 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}. \quad (A2.4)$$

**A3.** В стационарном режиме запишем уравнения баланса электронов и ионов в виде

$$Z_{ext}SL = rn_e n_i SL + \frac{I_e}{e}, \quad (A3.1)$$

$$Z_{ext}SL = rn_e n_i SL + \frac{I_i}{e}. \quad (A3.2)$$

Из уравнений (A3.1) и (A3.2) следует, что ионный и электронный токи равны, то есть

$$I_e = I_i. \quad (A3.3)$$

В тоже время полный ток в сечении трубки равен сумме электронного и ионного токов

$$I = I_e + I_i. \quad (A3.4)$$

Таким образом, по определению плотности тока имеем

$$I_e = \frac{I}{2} = en_e vS = ebn_e ES, \quad (A3.5)$$

$$I_i = \frac{I}{2} = en_i vS = ebn_i ES. \quad (A3.6)$$

Подставляя (A3.5) и (A3.6) в (A3.1) или (A3.2), получаем квадратное уравнение для тока

$$Z_{ext}SL = rSL \left( \frac{I}{2ebES} \right)^2 + \frac{I}{2e}. \quad (A3.7)$$

Напряженность электрического поля в газе равна

$$E = \frac{U}{L}, \quad (A3.8)$$

и решение квадратного уравнения (A3.7) имеет вид

$$I = \frac{eb^2 U^2 S}{rL^3} \left( -1 \pm \sqrt{1 + \frac{4rZ_{ext}L^4}{b^2 U^2}} \right). \quad (A3.9)$$

Очевидно, что смысл имеет лишь положительный корень. Таким образом,

$$I = \frac{eb^2U^2S}{rL^3} \left( \sqrt{1 + \frac{4rZ_{ext}L^4}{b^2U^2}} - 1 \right). \quad (A3.10)$$

**A4.** При малых значениях напряжения (A3.10) упрощается и дает следующее выражение

$$I = U2eb \sqrt{\frac{Z_{ext}S}{rL}}. \quad (A4.3)$$

которое представляет собой закон Ома.

Используя известные соотношения

$$R = \frac{U}{I} \quad (A4.1)$$

и

$$R = \rho \frac{L}{S}, \quad (A4.2)$$

получаем

$$\rho = \frac{1}{2eb} \sqrt{\frac{r}{Z_{ext}}}. \quad (A4.4)$$

### Часть В. Самостоятельный газовый разряд

**B1.** Рассмотрим некоторый слой газа, расположенный от  $x$  до  $x + dx$ . Изменение количества электронов внутри слоя за малый интервал времени  $dt$  дается выражением

$$dN_e^I = \frac{I_e(x+dx) - I_e(x)}{e} = \frac{1}{e} \frac{dI_e(x)}{dx} dxdt. \quad (B1.1)$$

Это изменение происходит вследствие двух процессов: действия внешнего ионизатора и образования электронной лавины.

В результате действия внешнего ионизатора в объеме  $Sdx$  образуется количество электронов

$$dN_e^{ext} = Z_{ext}Sdxdt. \quad (B1.2)$$

а благодаря электронной лавине

$$dN_e^a = \alpha N_e dl = n_e S dx v dt = \alpha \frac{I_e(x)}{e} dxdt. \quad (B1.3)$$

Условие баланса числа электронов в объеме записывается в виде

$$dN_e^I = dN_e^{ext} + dN_e^a, \quad (B1.4)$$

откуда получается дифференциальное уравнение для силы электронного тока

$$\frac{dI_e(x)}{dx} = eZ_{ext}S + \alpha I_e(x). \quad (B1.5)$$

Подставляя  $I_e(x) = C_1 e^{A_1 x} + A_2$ , получаем

$$A_1 = \alpha, \quad (B1.6)$$

$$A_2 = -\frac{eZ_{ext}S}{\alpha}. \quad (B1.7)$$

**B2.** С учетом того, что ионы текут в направлении, противоположном движению электронов, для ионного тока тоже можно записать уравнение баланса числа частиц

$$dN_i^I = dN_i^{ext} + dN_i^a, \quad (B2.1)$$

где

$$dN_i^I = \frac{I_i(x) - I_i(x)}{e} = -\frac{1}{e} \frac{dI_i(x)}{dx} dxdt. \quad (B2.2)$$

$$dN_i^{ext} = Z_{ext}Sdxdt. \quad (B2.3)$$

$$dN_i^a = \alpha \frac{I_e(x)}{e} dxdt. \quad (B2.4)$$

Отсюда получается дифференциальное уравнение для силы ионного тока

$$-\frac{dI_i(x)}{dx} = eZ_{ext}S + \alpha I_e(x). \quad (B2.5)$$

Подставляя найденную ранее величину электронного тока и  $I_i(x) = C_2 + B_1 e^{B_2 x}$ , находим

$$B_1 = -C_1, \quad (B2.6)$$

$$B_2 = \alpha. \quad (B2.7)$$

**B3.** Так как ионы начинают движение из точки  $x = L$ , то должно выполняться условие

$$I_i(L) = 0. \quad (B3.1)$$

**B4.** Из определения коэффициента вторичной электронной эмиссии следует, что

$$I_e(0) = \gamma I_i(0). \quad (\text{B4.1})$$

**B5.** Используя полученные зависимости электронного и ионного токов от координаты  $x$ , а также условия (B3.1) и (B4.1), окончательно находим

$$I = I_e(x) + I_i(x) = \frac{eZ_{ext}S}{\alpha \left[ e^{-\alpha L} - \frac{\gamma}{\gamma+1} \right]}. \quad (\text{B5.1})$$

**B6.** При увеличении длины разрядного промежутка знаменатель в формуле (B5.1) уменьшается. В тот момент, когда он обратится в ноль, электрический ток в газе станет самоподдерживающимся и внешний ионизатор может быть отключен. Таким образом

$$L_{cr} = \frac{1}{\alpha} \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right). \quad (\text{B6.1})$$

**B7.** Подставляя  $\alpha = \alpha_1 p \exp \left( -\frac{\alpha_2 p}{E} \right)$  в условие появления самостоятельного газового разряда

$$e^{-\alpha L} - \frac{\gamma}{\gamma+1} = 0, \quad (\text{B7.1})$$

получаем требуемое напряжение

$$U = \frac{\alpha_2 p L}{\ln \left( \frac{\alpha_1 p L}{\ln(1+1/\gamma)} \right)}. \quad (\text{B7.2})$$

Напряжение (B7.2) зависит от одного параметра  $z = pL$ , поэтому минимальное значение находится из условия обращения в ноль производной

$$\frac{dU}{dz} = 0 \quad (\text{B7.3})$$

откуда минимальное значение напряжения достигается в точке

$$z_{min} = \frac{e}{\alpha_1} \ln(1 + 1/\gamma), \quad (\text{B7.4})$$

и равно

$$U_{min} = \frac{e\alpha_1}{\alpha_2} \ln \left( 1 + \frac{1}{\gamma} \right) = 122 \text{ В}. \quad (\text{B7.5})$$