

Введение

Метеороид – это небольшая часть (обычно меньше 1 метра в поперечнике) кометы или астероида. Метеороид, который столкнулся с поверхностью Земли называется метеоритом.

Ночью 17 января 2009 года многие люди, находившиеся вблизи Балтийского моря, наблюдали яркий след и огненный шар метеороида, падающего в атмосфере Земли. Камера наблюдения в Швеции зафиксировала это событие на видео, см. Рис.1.1(a). С помощью этих снимков и свидетельств очевидцев стало возможным сузить возможную область падения, и шесть недель спустя метеорит массой 0,025 кг был найден в окрестности города Марибо в южной Дании. Измерения метеорита, получившего название Марибо, и траектории его полета в небе дали интересные результаты. Его скорость при входе в атмосферу была необычайно высокой. Его возраст, 4.567×10^9 лет, показал, что он сформировался вскоре после рождения Солнечной системы. Метеорит Марибо, возможно, является частью кометы Энке.

Скорость Марибо

Огненный шар двигался в западном направлении под постоянным углом 285° от направления на север, и упал в точке М, где он и был впоследствии обнаружен, как показано на рис. 1.1. Метеорит был найден на расстоянии 195 км от камеры наблюдения в направлении 230° относительно севера.

1.1	Используя эти данные и данные в таблице на рис.1.1b вычислите среднюю скорость Марибо в интервале времени между 155 и 161 кадрами. Кривизной поверхности Земли и гравитационным притяжением следует пренебречь.	1.3
-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Расплавится ли метеороид, проходя сквозь атмосферу?

Сила сопротивления, действующая на метеороид в верхних слоях атмосферы, зависит сложным образом от формы и скорости метеороида, а также от температуры и плотности атмосферы. В качестве разумного приближения для силы сопротивления F в верхних слоях атмосферы можно использовать формулу $F = k\rho_{\text{atm}}Av^2$, где k - некоторая константа, ρ_{atm} - плотность атмосферы, A -площадь поперечного сечения метеорита и v - его скорость.

Чтобы упростить анализ процессов, происходящих с метеороидом, используйте следующие допущения: объект, вошедший в атмосферу, считайте шаром массы $m_M = 30$ кг, радиуса $R_M = 0.13$ м, температуры $T_0 = 200$ К, и движущийся со скоростью $v_M = 2.91 \times 10^4$ м/с. Плотность атмосферы считайте постоянной (равной значению на высоте 40 км над поверхностью Земли) $\rho_{\text{atm}} = 4.1 \times 10^{-3}$ кг/м³, коэффициент сопротивления $k = 0.60$.

1.2a	Оцените, какое время требуется, чтобы скорость метеороида уменьшилась на 10% с v_M до $0.90 v_M$. Гравитационными силами можно пренебречь. Считайте, что масса и форма метеороида не изменяются.	0.7
1.2b	Вычислите во сколько раз кинетическая энергия метеороида, вошедшего в земную атмосферу, E_{kin} больше энергии E_{melt} , требуемой для полного расплавления метеороида (используйте Таблицу данных).	0.3



(b)

Кадр	Время	Азимут	Высота
155	1.46 с	215°	19.2°
161	2.28 с	221°	14.7°
В месте падения М		230°	0.0°



Рисунок 1.1 Азимут – это угол, между направлением на север и направлением на тело от камеры наблюдения, отсчитываемый по часовой стрелке. Высота – угол между направлением на тело от камеры наблюдения и горизонтом. (a) Серия снимков, сделанных камерой наблюдения в Швеции, показывает полет метеорита Марибо (огненный шар) в атмосфере. (b) Данные с двух кадров, снятых камерой С, указывающие время, азимут и высоту над горизонтом. (c) Эскиз, показывающий траекторию Марибо (малиновая стрела) и место падения (М) в Дании, как было видно камерой (С) из Швеции.

Нагревание Марибо во время полета в атмосфере

Когда каменный метеороид Марибо вошел в атмосферу на сверхзвуковой скорости он выглядел, как огненный шар, благодаря светящемуся вокруг него воздуху. Тем не менее, только внешний слой Марибо был разогрет. Предположим, что Марибо представляет собой однородный шар плотности ρ_{sm} , удельной теплоемкости c_{sm} , и теплопроводности k_{sm} (значения приведены в Таблице данных). При входе в атмосферу его температура была $T_0 =$

200 K, а при движении в атмосфере, вследствие трения о воздух, температура его поверхности была постоянной и равной $T_s = 1000\text{K}$, что приводило к постепенному нагреванию вещества внутри метеорита.

После движения в атмосфере в течение времени t , поверхностный слой Марибо толщиной x разогрелся до температуры, существенно превышающей T_0 . Эта толщина может быть оценена с помощью метода размерностей как произведение степеней указанных параметров: $x \approx t^\alpha \rho_{sm}^\beta c_{sm}^\gamma k_{sm}^\delta$.

1.3a	Определите с помощью метода размерностей значения степеней α , β , γ , и δ .	0.6
1.3b	Вычислите толщину x после $t = 5$ с падения и определите отношение x/R_M .	0.4

Возраст метеорита

Метеорит состоит из различных минералов. Во время образования (затвердевания) этих минералов некоторые из них будут иметь высокое содержание определенного радиоактивного изотопа, а некоторые – низкое. С течением времени эти концентрации изменяются, что может быть использовано для определения возраста метеорита путем радиометрических исследований.

В качестве конкретного примера рассмотрим изотоп рубидия ^{87}Rb (элемент № 37) с периодом полураспада $T_{1/2} = 4.9 \times 10^{10}$ лет, который после распада превращается в стабильный изотоп стронция ^{87}Sr (элемент №38), который присутствует в минералах одновременно с другим стабильным изотопом стронция ^{86}Sr . В момент образования метеорита отношение числа изотопов $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ было одинаковым для всех его минералов, в то время как отношение $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ было различным. Со временем, количество изотопов ^{87}Rb сокращается из-за распада, а количество изотопов ^{87}Sr соответственно растет. Поэтому в настоящее время отношение количества изотопов $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ имеет другое значение. На рис.1.2 (а), вдоль горизонтальной пунктирной линии отложено отношение числа изотопов $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в момент их образования.

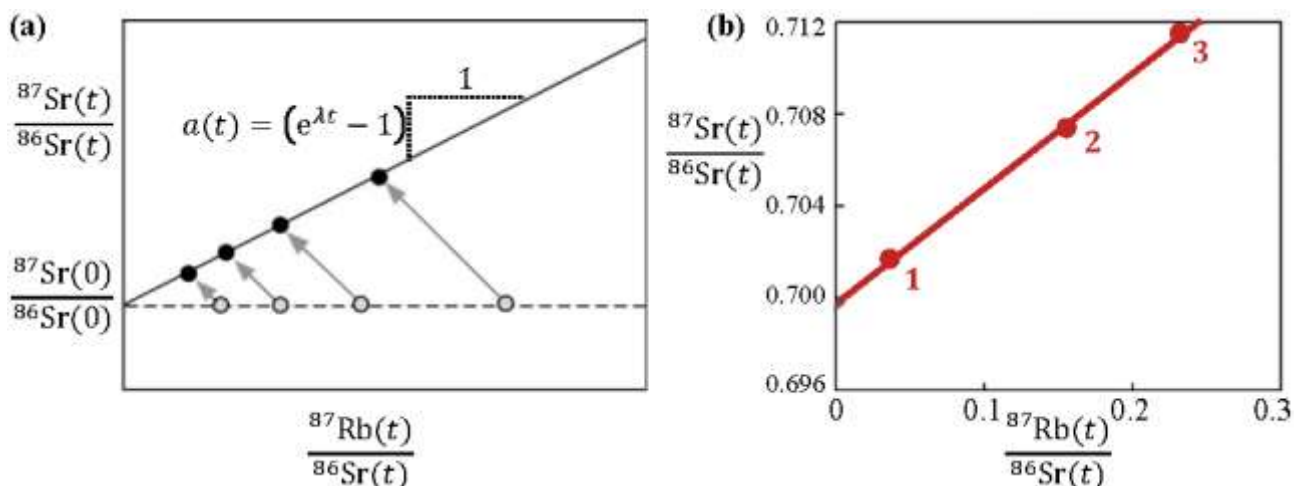


Рисунок 1.2(a) Отношение $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ в различных минералах в момент образования (светлые кружки) и в настоящее время (темные кружки). **(b)** Изохрона для трех образцов минералов, взятых из метеорита в настоящее время.

1.4a	Запишите уравнение реакции превращения $^{87}_{37}\text{Rb}$ в $^{87}_{38}\text{Sr}$ при распаде.	0.3
------	---------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

1.4b	Покажите, что отношения $^{87}\text{Sr}/^{86}\text{Sr}$ в настоящее время, построенное в зависимости от отношения $^{87}\text{Rb}/^{86}\text{Sr}$ в настоящее время для различных минералов одного и того же метеорита, лежат на прямой линии (так называемой изохроне) с коэффициентом наклона $a(t) = (e^{\lambda t} - 1)$. Здесь t – это время, прошедшее с момента образования минералов, а λ – постоянная распада, обратно пропорциональная периоду полураспада $T_{1/2}$.	0.7
1.4c	Определите возраст метеорита τ_M , используя изохрону на Рис.1.2(b).	0.4

Комета Энке, от которой мог произойти Марибо

При движении по орбите вокруг Солнца минимальное и максимальное расстояния между кометой Энке и Солнцем равны $a_{\min} = 4.95 \times 10^{10}$ м и $a_{\max} = 6.16 \times 10^{11}$ м, соответственно.

1.5	Рассчитайте период обращения кометы Энке t_{Encke} по орбите вокруг Солнца.	0.6
-----	--------------------------------------------------------------------------------------	-----

Последствия столкновения астероида с Землей

65 миллионов лет назад Земля столкнулась с огромным астероидом плотности $\rho_{\text{ast}} = 3.0 \times 10^3 \text{ кг м}^{-3}$, радиуса $R_{\text{ast}} = 5$ км, и скоростью при столкновении $v_{\text{ast}} = 2.5 \times 10^4$ м/с. Это столкновение привело к уничтожению почти всего живого на Земле и формированию чудовищного кратера Чикшулуб. Предположим, что такой же астероид сейчас столкнулся бы абсолютно неупруго с Землей.

Момент инерции однородного шара массой M и радиусом R равен $\frac{2}{5}MR^2$. Считайте, что момент инерции Земли равен 0.83 момента инерции однородного шара такой же массы и радиуса. Пренебрегайте любыми изменениями орбиты Земли.

1.6a	Предположим, что астероид врезался в Северный полюс. Найдите максимально возможный угол поворота земной оси после столкновения.	0.7
1.6b	Предположим, что астероид упал в области экватора вертикально (перпендикулярно поверхности Земли). Найдите изменение периода суточного вращения Земли $\Delta\tau_{\text{vrt}}$ после столкновения.	0.7
1.6c	Предположим, что астероид ударился в Землю в области экватора по касательной к поверхности. Найдите максимальное изменение периода суточного вращения Земли $\Delta\tau_{\text{tan}}$ после столкновения.	0.7

Максимальная скорость соударения

В данном пункте вам необходимо найти максимально возможную скорость столкновения некоторого космического тела с поверхностью Земли. Считайте, что это тело удерживается силой гравитационного притяжения Солнца. Первоначально силами взаимодействия с Землей и другими телами солнечной системы можно пренебречь. Затем, учитывая взаимодействия с Землей, найдите максимально возможную скорость столкновения этого тела с поверхностью Земли. Силой сопротивления воздуха в атмосфере и вращением Земли пренебречь.

1.7	Вычислите v_{imp}^{\max} – наибольшее возможное значение скорости v_{imp} .	1.6
-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Введение

В этой задаче мы исследуем эффективный процесс получения водяного пара, который был реализован в эксперименте. В водном растворе содержатся шарообразные наноразмерные частицы серебра (в концентрации порядка 10^{13} частиц на литр). Раствор освещается сфокусированным пучком света. Часть света поглощается наночастицами, которые при этом нагреваются и превращают воду в пар вблизи своей поверхности, не нагревая при этом основной объем жидкости. Пар выходит из раствора пузырьками. В настоящее время не все детали этого процесса полностью понятны, но точно известно, что в основе процесса лежит поглощение света с последующим возбуждением, так называемых коллективных колебаний электронов в металлических наночастицах. Это устройство получило название плазменного парогенератора.

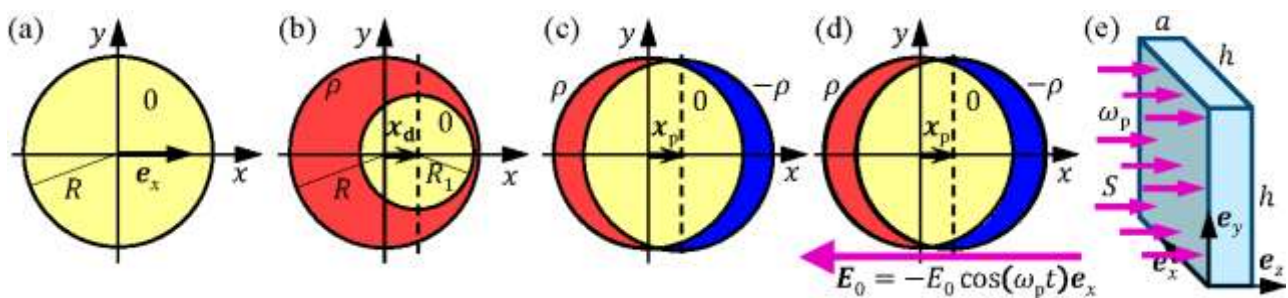


Рис. 2.1 (а) Шарообразная незаряженная наночастица радиуса R помещена в начало системы координат. (б) Шарообразная наночастица, однородно заряженная с положительной плотностью заряда ρ (красный цвет), содержит внутри себя незаряженную шарообразную полость (0, желтый цвет) радиуса R_1 , центр которой находится в точке с радиус-вектором $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$. (в) Шарообразная область с положительной плотностью зарядов ρ , образована ионами серебра и расположена в центре системы координат, а также шарообразная область с отрицательной плотностью зарядов $-\rho$ (синий цвет), образована электронным облаком, центр которой смещен на вектор \mathbf{x}_p , где $x_p \ll R$. (г) Система находится в области внешнего однородного электрического поля $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$; $|\mathbf{e}_x| = 1$. В случае нестационарного поля \mathbf{E}_0 электронное облако движется со скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. (д) Прямоугольный сосуд ($h \times h \times a$), содержащий водный раствор наночастиц, освещен монохроматическим пучком света, распространяющимся вдоль оси z ; его циклическая частота равна ω_p , а интенсивность S .

Одиночная сферическая частица серебра

Во всех пунктах задачи мы рассматриваем шарообразную наночастицу серебра радиуса $R = 10.0$ нм с центром, находящуюся в начале координат, см. рис. 2.1(а). Все движения, силы и поля параллельны горизонтальной оси x (единичный вектор \mathbf{e}_x). Наночастица содержит свободные электроны (электроны проводимости), которые могут перемещаться во всем объеме наночастицы, не будучи привязаны ни к одному из атомов серебра. От каждого изначально нейтрального атома серебра высвободилось по одному электрону проводимости, в результате чего все атомы стали положительными ионами.

2.1	Определите объём V и массу M наночастицы, число N и плотность зарядов ρ ионов серебра в частице, а для свободных электронов – их концентрацию n , суммарный заряд Q и суммарную массу m_0 .	0.7
-----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Электрическое поле в нейтральной полости внутри заряженного шара

В дальнейшем будем считать, что относительная диэлектрическая проницаемость ϵ всех материалов равна 1. Внутри заряженного шара радиуса R с однородной плотностью зарядов ρ создана небольшая сферическая нейтральная область радиуса R_1 , путем добавления зарядов противоположной плотности $-\rho$. Центр полости смещен на $\mathbf{x}_d = x_d \mathbf{e}_x$ от центра шара, рис. 2.1(b).

2.2	Покажите, что электрическое поле внутри нейтральной области однородно и имеет вид $\mathbf{E}_{\text{ind}} = A (\rho/\epsilon_0) \mathbf{x}_p$. Определите константу A .	1.2
-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Возвращающая сила, действующая на смещенное электронное облако

Изучим коллективное движение облака свободных электронов. Промоделируем его однородно заряженным шаром с отрицательной плотностью заряда $-\rho$ с центром в точке \mathbf{x}_p . Шар может двигаться вдоль оси x относительно центра неподвижного положительно заряженного шара из ионов серебра, находящегося в начале системы координат, рис. 2.1(c). Предположим, что внешняя сила \mathbf{F}_{ext} смещает электронное облако в новое положение равновесия $\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x$, где $|x_p| \ll R$. Практически весь его объем является электрически нейтральным, за исключением малых областей зарядов, образующихся на противоположных сторонах наночастицы. Это соответствует предельному случаю $R_1 \rightarrow R$ в предыдущем задании.

2.3	Выразите через x_p и n следующие две величины: возвращающую силу F , действующую на электронное облако, и работу W_{el} , совершенную над электронным облаком в процессе смещения.	1.0
-----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Шарообразная наночастица серебра в постоянном внешнем электрическом поле

Наночастица находится в вакууме. Под действием внешней силы \mathbf{F}_{ext} (вызванной однородным электростатическим полем $\mathbf{E}_0 = -E_0 \mathbf{e}_x$), электронное облако смещается на небольшое расстояние $|x_p|$, где $|x_p| \ll R$.

2.4	Выразите смещение электронного облака x_p через E_0 и n . Определите величину заряда электронов $-\Delta Q$ прошедшего через плоскость yz , проходящую через центр наночастицы. Выразите ее через n , R и x_p .	0.6
-----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Эквивалентные емкость и индуктивность серебряной наночастицы

В случае как постоянного, так и переменного поля \mathbf{E}_0 наночастица может быть представлена эквивалентным электрическим контуром. Определим эквивалентную емкость. Для этого

связем работу W_{el} по разделению зарядов ΔQ с энергией конденсатора, несущего заряды $\pm \Delta Q$. Разделение зарядов приведет к появлению напряжения V_0 на конденсаторе.

2.5a	Выразите эквивалентную емкость наночастицы C через ϵ_0 и R , и найдите ее численное значение.	0.7
2.5b	Для данной емкости выразите через E_0 и R эквивалентное напряжение V_0 , которое следует подать на конденсатор, чтобы накопить заряд ΔQ .	0.4

В переменном поле E_0 электронное облако движется как единое целое со скоростью $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$, рис. 2.1(d). Облако обладает кинетической энергией W_{kin} и при своем движении создает электрический ток I , протекающий через плоскость уз. Кинетическая энергия электронного облака может быть представлена в виде энергии эквивалентной катушки индуктивности L с током I .

2.6a	Выразите W_{kin} и I через скорость v .	0.7
2.6b	Выразите эквивалентную индуктивность L через радиус частицы R , заряд электрона e и его массу m_e , концентрацию свободных электронов n и найдите ее численное значение.	0.5

Плазмонный резонанс наночастицы серебра

Из вышеприведенного анализа следует, что движение электронного облака, предоставленного самому себе, после смещения из положения равновесия может быть описано свободными колебаниями в идеальном колебательном LC -контуре. Такое колебательное движение свободного электронного облака известно как плазмонный резонанс с соответствующей плазмонной частотой ω_p .

2.7a	Выразите плазмонную частоту ω_p колебаний электронного облака через заряд электрона e и его массу m_e , плотность электронов n и электрическую постоянную ϵ_0 .	0.5
2.7b	Вычислите ω_p в рад/с и длину волны света в вакууме λ_p в нм, частота которой $\omega = \omega_p$.	0.4

Наночастица серебра, освещенная светом плазмонной частоты

В оставшейся части задачи наночастица освещается монохроматическим светом с циклической частотой ω_p и с интенсивностью $S = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = 1.00 \text{ МВт} \cdot \text{м}^{-2}$. Поскольку длина волны света велика по сравнению с размерами частицы $\lambda_p \gg R$, можно считать, что частица находится в однородном внешнем поле $\mathbf{E}_0 = -E_0 \cos(\omega_p t) \mathbf{e}_x$. Под действием поля \mathbf{E}_0 электронное облако осциллирует с той же самой частотой и постоянной амплитудой x_0 . Центр электронного облака $\mathbf{x}_p(t)$ движется с переменной скоростью $\mathbf{v} = d\mathbf{x}_p/dt$. Такие колебания электронного облака приводят к поглощению света частицей. Энергия, поглощаемая

частицей, либо превращается в теплоту за счет джоулевых потерь в самой частице, либо переизлучается частицей в виде рассеянного света.

Джоулево тепло выделяется за счет случайных, полностью неупругих столкновений свободных электронов с ионами серебра. Вся кинетическая энергия электронов превращается в энергию колебаний ионов, то есть в тепло. Среднее время между двумя последовательными столкновениями для одного электрона $\tau \gg 1/\omega_p$. Для наночастицы серебра оно равно $\tau = 5.24 \times 10^{-15}$ с.

2.8a	Получите выражение для усредненной по времени мощности джоулевых потерь P_{heat} в наночастице, а также усредненный по времени квадрат силы тока $\langle I^2 \rangle$. Приведите их явную зависимость от среднего квадрата скорости $\langle v^2 \rangle$ электронного облака.	1.0
2.8b	Моделируя наночастицу омическим сопротивлением, на котором выделяется джоулево тепло мощностью P_{heat} при протекании тока I электронного облака, найдите выражение для эквивалентного омического сопротивления R_{heat} . Вычислите его численное значение.	1.0

Падающий пучок света теряет некоторую среднюю по времени мощность P_{scat} за счет рассеяния на осциллирующем электронном облаке (переизлучение). P_{scat} зависит от характеристик источника рассеянных волн (амплитуды x_0 , заряда Q , циклической частоты ω_p) и свойств световых волн (скорости света c и электрической постоянной ϵ_0). Выражение для P_{scat} выглядит: $P_{\text{scat}} = \frac{1}{12\pi} (Qx_0)^2 \omega_p^4 c^{-3} \epsilon_0^{-1}$.

2.9	Используя P_{scat} , получите выражение для эквивалентного сопротивления рассеяния R_{scat} в эквивалентной модели с сопротивлением (по аналогии с R_{heat}) и вычислите его значение.	1.0
-----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Для моделирования наночастицы серебра все вышеперечисленные элементы электрических цепей можно собрать в единый эквивалентный последовательный LCR -контур. Гармонический источник напряжения в цепи $V = V_0 \cos(\omega_p t)$ определяется электрическим полем E_0 падающего света.

2.10a	Получите выражения для средних по времени мощностей потерь P_{heat} и P_{scat} через амплитуду электрического поля E_0 падающего света на частоте плазмонного резонанса $\omega = \omega_p$.	1.2
2.10b	Вычислите численные значения E_0 , P_{heat} , и P_{scat} .	0.3

Парообразование с помощью света

Водный раствор содержит наночастицы серебра с концентрацией $n_{\text{np}} = 7.3 \times 10^{15} \text{ м}^{-3}$. Раствор находится внутри прозрачного прямоугольного сосуда размером $h \times h \times a = 10 \times 10 \times 1.0 \text{ см}^3$. Сосуд освещается нормально падающим пучком монохроматического света на частоте плазмонного резонанса с интенсивностью $S = 1.00 \text{ МВт} \cdot \text{м}^{-2}$, рис. 2.1(е). Температура воды $T_{\text{wa}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Предположим, что в установившемся состоянии все джоулево тепло в

наночастице идет на парообразование (с конечной температурой пара $T_{st} = 110^\circ\text{C}$) у поверхности частицы. Температура остальной воды при этом остается постоянной.

Термодинамический к.п.д. плазмонного парогенератора определяется как $\eta = P_{st}/P_{tot}$, где P_{st} – мощность, идущая на производство пара во всем сосуде, а P_{tot} – полная мощность светового потока, падающего на сосуд.

Большую часть времени каждая наночастица окружена паром, а не водой, поэтому частицу можно описывать как находящуюся в вакууме.

2.11a	Вычислите полную массу пара μ_{st} , произведенного в плазмонном парогенераторе за одну секунду при облучении световым пучком с плазмонной частотой и интенсивностью S , как дано выше.	0.6
2.11b	Вычислите значение к.п.д. η плазмонного парогенератора.	0.2

Введение

Эта задача связана с физикой ледяного щита Гренландии, второго по размерам ледяного массива в мире, Рис. 3.1(a). Для упрощения будем считать, что Гренландия представляет собой прямоугольный остров шириной (с запада на восток) $2L$ и длиной (с севера на юг) $5L$, в котором земля, находящаяся на уровне моря, полностью покрыта несжимаемым льдом (с постоянной плотностью ρ_{ice}), Рис. 3.1(b). Профиль высоты $H(x)$ ледяного щита не зависит от координаты y . Высота растет от нуля на побережье $x = \pm L$ до максимального значения H_m вдоль срединной оси север - юг (собственно оси y), известной как линия разделения льда, Рис. 3.1(c).

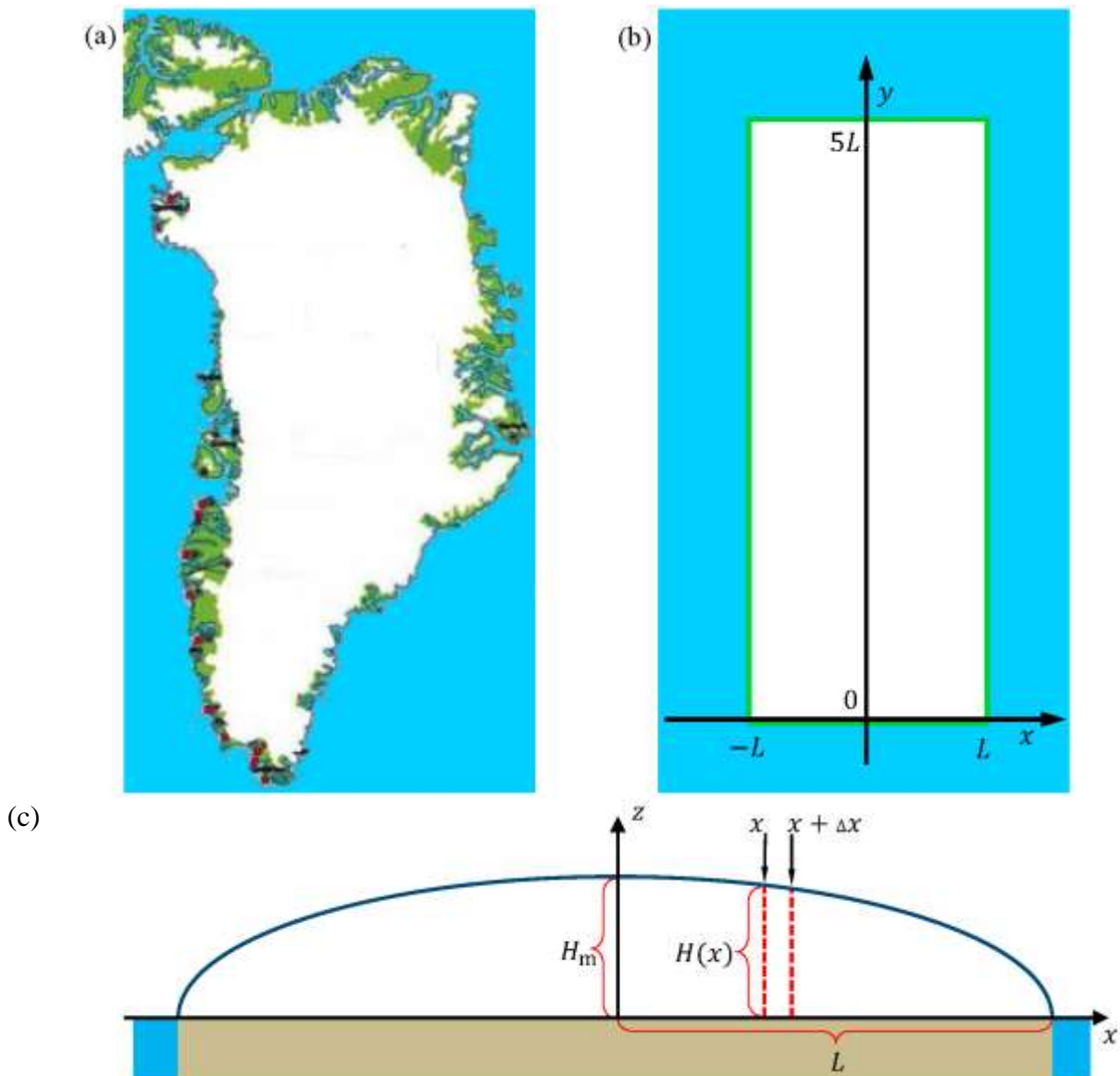


Рисунок 3.1 (a) Карта Гренландии, показывающая ледяной покров (белый цвет), свободную от ледяного покрова прибрежную территорию (зеленый) и окружающий океан (голубой). (b) Грубая модель ледяного щита Гренландии, как прямоугольной области в плоскости xy размерами $2L$ на $5L$. Линия разделения льда, или линия максимальной высоты ледового покрова H_m совпадает с осью y . (c) Вертикальное сечение (в плоскости xz) ледяного щита, показывающее профиль высоты

$H(x)$ (синяя линия). $H(x)$ не зависит от координаты y при $0 < y < 5L$, а в точках $y = 0$ и $y = 5L$ резко падает до нуля. Ось z обозначает положение линии разделения льда. Для удобства все вертикальные размеры на схеме многократно увеличены по сравнению с горизонтальными. Плотность льда ρ_{ice} есть величина постоянная.

Две полезные формулы

В этой задаче вам пригодится интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \frac{2}{3}$$

и приближенная формула $(1+x)^a \approx 1+ax$, справедливая при условии $|ax| \ll 1$.

Профиль высоты ледяного щита

На коротких промежутках времени ледяной щит можно рассматривать как несжимаемую гидростатическую систему с фиксированным профилем высоты $H(x)$.

3.1	Запишите выражение для давления внутри ледяного щита $p(x, z)$ как функцию высоты над уровнем моря z и расстояния x от линии разделения льда. Давлением атмосферы пренебечь.	0.3
-----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Рассмотрим некоторую вертикальную пластину ледяного щита, находящуюся в положении равновесия. Пластина опирается на малую горизонтальную площадку $\Delta x \Delta y$ между координатами x и $x + \Delta x$ и обозначена красными штриховыми линиями на рис. 3.1(с). Размер Δy несущественен. Из-за разности высот двух сторон пластины, возникает горизонтальная компонента силы ΔF , действующая на вертикальные стороны пластины. Она уравновешена силой трения $S_b \Delta x \Delta y$ льда о землю на площадке $\Delta x \Delta y$, где $S_b = 100 \text{ кПа}$.

3.2a	Для произвольного x покажите, что в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ $S_b = kH dH/dx$, и найдите k .	0.9
3.2b	Выразите высоту $H(x)$ через ρ_{ice} , g , S_b , L и расстояние x от линии разделения льда. Результат должен подтвердить, что наибольшая высота ледяного щита H_m зависит от его полуширины L как $H_m \sim L^{1/2}$.	0.8
3.2c	Определите показатель степени γ , который показывает, как полный объем ледяного щита V_{ice} зависит от площади A прямоугольного острова, $V_{ice} \sim A^\gamma$.	0.5

Динамический ледяной щит

На более длинных промежутках времени лед является вязкой несжимаемой жидкостью, которая под действием гравитации течет из центральной части к береговым. В рамках этой модели профиль высоты $H(x)$ сохраняется за счет того, что прирост льда из-за снегопадов в центральной части уравновешивается таянием льда в береговой части. Дополнительно к геометрии ледяного щита, изображенного на рис. 3.1(b) и (с), сделаем следующие допущения:

- 1) Лед течет в плоскости xz от линии разделения льда (ось y).
- 2) Скорость нарастания льда c (м/год) в центральной части постоянна.
- 3) Лед покидает ледник только за счет таяния вблизи берегов $x = \pm L$.
- 4) Горизонтальная x -компонента $v_x(x) = dx/dt$ вектора скорости течения льда не зависит от координаты z .
- 5) Вертикальная z -компонента $v_z(z) = dz/dt$ вектора скорости течения льда не зависит от координаты x .

Рассмотрим только центральную область $|x| \ll L$ вблизи середины ледяного щита, где изменения высоты ледяного массива очень малы и ими можно пренебречь, т.е. $H(x) \approx H_m$.

3.3	Используйте закон сохранения массы, получите выражение для горизонтальной компоненты скорости течения льда $v_x(x)$ через c , x и H_m .	0.6
-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Из условия несжимаемости, т.е. постоянной плотности ρ_{ice} , следует, что закон сохранения массы приводит к уравнению для компонент вектора скорости течения:

$$\frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_z}{dz} = 0.$$

3.4	Запишите выражение для зависимости вертикальной компоненты $v_z(z)$ вектора скорости течения льда от координаты z .	0.6
-----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Небольшая частичка льда, вначале находившаяся на поверхности льда в точке (x_i, H_m) , с течением времени будет двигаться вместе с потоком льда по некоторой траектории $z(x)$ в вертикальной xz плоскости.

3.5	Получите уравнение этой траектории $z(x)$.	0.9
-----	---------------------------------------------	-----

Возрастные и климатические параметры в динамическом ледяном щите

Используя компоненты вектора скорости течения льда $v_x(x)$ и $v_z(z)$, можно оценить возраст льда $\tau(z)$ на некоторой глубине $H_m - z$ от поверхности ледяного щита.

3.6	Найдите выражение для возраста льда $\tau(z)$ как функции высоты над уровнем поверхности земли z непосредственно на линии разделения льда $x = 0$.	1.0
-----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Ледовый вертикальный цилиндр, высверленный из внутренней части гренландского ледяного щита, содержит слои льда, образовавшегося в различные времена в прошлом. Такой цилиндр может быть использован для анализа климатических изменений в прошлом. Одним из лучших показателей служит так называемый параметр $\delta^{18}O$, определяемый как

$$\delta^{18}O = \frac{R_{ice} - R_{ref}}{R_{ref}} 1000 \text{‰},$$

где $R = [^{18}O]/[^{16}O]$ обозначает отношение концентрации двух стабильных изотопов кислорода ^{18}O и ^{16}O . опорное значение R_{ref} определяется из отношения концентрации изотопов в мировом океане вблизи экватора. Наблюдения за гренландским ледяным щитом показали, что $\delta^{18}O$ льда приблизительно линейно зависит от температуры, рис. 3.2(a). Предполагая, что такая зависимость существовала всегда, параметр $\delta^{18}O$, определенный по ледяному цилиндру для глубины $H_m - z$, позволяет оценить температуру T вблизи Гренландии во времена $\tau(z)$.

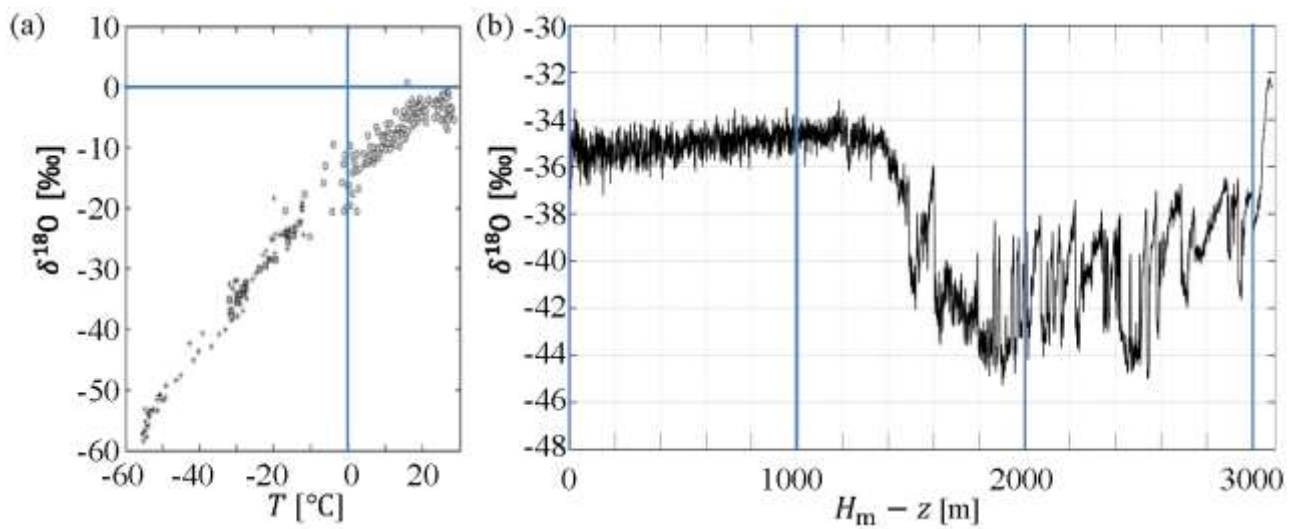


Рисунок 3.2 (a) Наблюдаемая зависимость $\delta^{18}O$ во льду от среднегодовой температурой T на поверхности. (b) Значение $\delta^{18}O$, в зависимости от глубины $H_m - z$ от поверхности, где $H_m = 3060$ м

Измерения $\delta^{18}O$ в гренландском ледяном цилиндре длиной 3060 м зафиксировали резкое изменение $\delta^{18}O$ на глубине 1492 м, рис. 3.2(b), отметившее конец последнего ледникового периода. Ледниковый период начался 120 000 лет назад, что соответствует глубине 3040 м, а современный межледниковый период начался 11 700 лет назад, что соответствует глубине 1492 м. Предположим, что эти два периода могут быть описаны двумя различными скоростями нарастания льда, c_{ia} (ледниковый период) и c_{ig} (межледниковый период), соответственно. Вы можете считать величину H_m постоянной в течение этих 120 000 лет.

3.7a	Определите скорости нарастания льда, c_{ig} и c_{ia} .	0.8
3.7b	Используйте данные на рис. 3.2, чтобы найти изменение температуры при переходе от ледникового периода к межледниковому.	0.2

Подъем уровня моря вследствие таяния ледяного щита Гренландии

Если льды Гренландии полностью растают, это вызовет подъем уровня мирового океана. Для грубой оценки подъема уровня моря можно рассматривать однородный подъем всего мирового океана с постоянной площадью $A_0 = 3.61 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$.

3.8	Вычислите средний подъем уровня мирового океана в результате полного таяния ледяного щита Гренландии площадью $A_G = 1.71 \cdot 10^{12} \text{ м}^2$ и при $S_b = 100 \text{ кПа}$.	0.6
-----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Массивный ледяной щит Гренландии оказывает гравитационное притяжение на окружающий океан. Если ледяной щит растает, то высота уровня воды вблизи Гренландии упадет, что частично скомпенсирует подъем уровня воды, вычисленный выше.

Для того, чтобы оценить величину гравитационного притяжения воды, представим ледяной щит Гренландии в виде точечной массы, расположенной на поверхности Земли и соответствующей полной массе ледяного щита Гренландии. Представим также Землю (без точечной массы) как сферически симметричное тело, полностью покрытое мировым океаном. Полная площадь поверхности Земли $A_E = 5.10 \cdot 10^{14} \text{ м}^2$. Всеми эффектами вращения Земли можно пренебречь. Копенгаген находится на расстоянии 3500 км вдоль поверхности Земли от этой точечной массы.

3.9	В рамках этой модели определите разность $h_{CPH} - h_{OPP}$ уровней воды в Копенгагене (h_{CPH}) и в точке, диаметрально противоположной Гренландии (h_{OPP}).	1.8
-----	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----