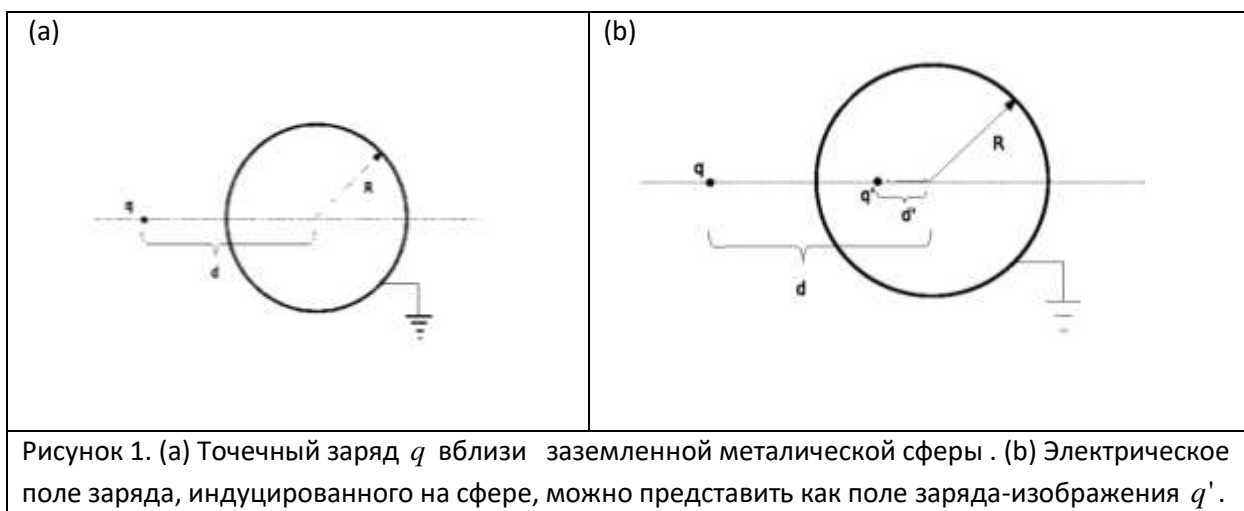


Заряд-изображение в проводнике

Введение. Метод изображений

На расстоянии d от центра металлической заземленной сферы радиуса R находится точечный заряд q . При этом на сфере появляется индуцированный заряд, распределенный по ее поверхности с некоторой поверхностной плотностью. Вычисление напряженности и потенциала поля, создаваемого такой системой – сложная задача. Однако, можно упростить решение задачи, используя метод изображений. В основе этого метода лежит утверждение о том, что электрическое поле и потенциал, создаваемые индуцированными зарядами на поверхности сферы, совпадают с электрическим полем и потенциалом, создаваемыми одним точечным зарядом q' , который находится внутри сферы. (Вам не следует доказывать это утверждение.)

Заряд-изображение q' создает электрическое поле только вне сферы и на ее поверхности.



Задание 1. Заряд - изображение

Из симметрии задачи следует, что заряд-изображение находится на прямой, соединяющей центр сферы и исходный заряд. (Рис.1(b))

а) Чему равен потенциал сферы? (0.3 балла)

б) Выразите q' и d' (расстояние от центра сферы до заряда-изображения q') через величины q , d и R . (1.9 балла)

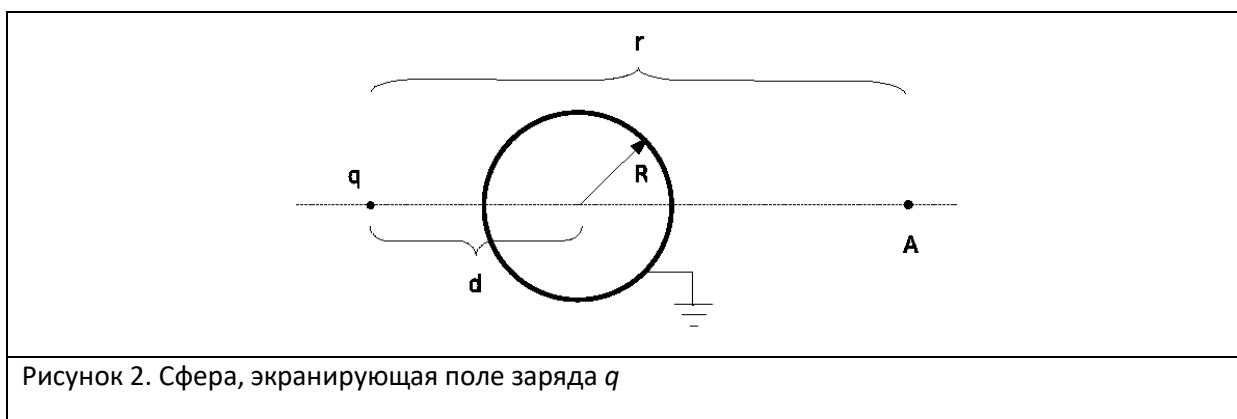
в) Получите выражение для силы, которая действует на заряд q . Будет ли эта сила являться силой отталкивания? (0.5 балла)

Задание 2. Экранировка электрического поля металлической сферой

Точечный заряд находится на расстоянии d от центра заземленной металлической сферы радиуса R . Необходимо определить, как влияет заземленная металлическая сфера на

электрическое поле в точке A с противоположной стороны сферы. (Рис.2) Точка A находится на прямой, соединяющей заряд q и центр сферы. Расстояние от точки A до точечного заряда q равно r .

- Определите вектор напряженности электрического поля в точке A. (0.6 балла)
- Запишите выражение для напряженности электрического поля на большом расстоянии от заряда r ($r \gg d$). Используйте приближенную формулу: $(1+a)^{-2} \approx 1-2a$, при $a \ll 1$. (0.6 балла)
- Определите расстояние d , при котором заземленная металлическая сфера полностью экранирует поле заряда q (напряженность поля в точке A равна 0)? (0.3 балла)



Задание 3. Малые колебания в электрическом поле заземленной металлической сферы

Точечный заряд q массы m подвешен на нити длиной L , закрепленной на стене вблизи заземленной металлической сферы. Точка, в которой нить крепится к стене, находится на расстоянии l от центра сферы. При решении задания не учитывайте электростатическое влияние стены, а также действие гравитационных сил. Точечный заряд рассматривайте как математический маятник (Рис.3).

- Определите силу, которая действует на заряд q , при заданном угле α . Укажите направление силы на рисунке. (0.8 балла)
- Выразите проекцию этой силы на ось, перпендикулярную нити, через l, L, R, q и α . (0.8 балла)
- Определите циклическую частоту малых колебаний маятника. (1.0 балл)

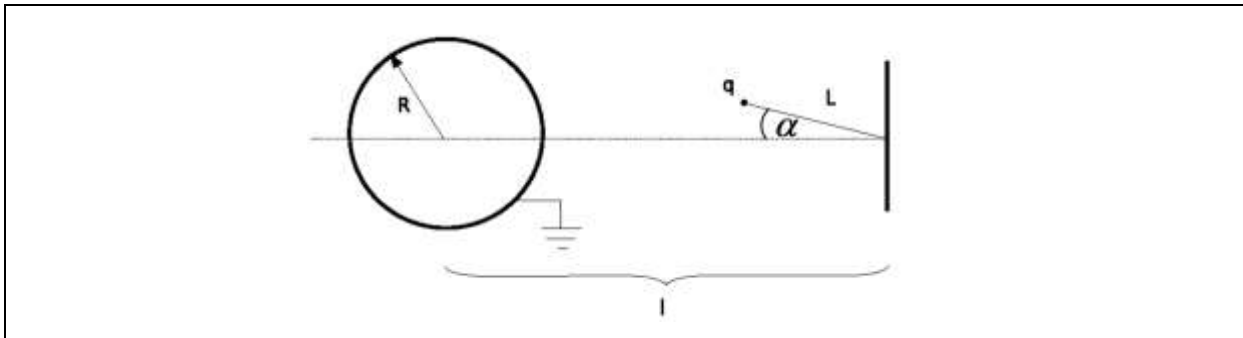


Рисунок 3. Колебания точечного заряда вблизи заземленной металлической сферы.

Задание 4. Электростатическая энергия системы

Вычислим энергию электростатического взаимодействия в рассматриваемой системе. В данном случае существует не только электростатическое взаимодействие между внешним зарядом и зарядами, индуцированными на поверхности сферы, но и взаимодействие между самими индуцированными зарядами. Считая известными заряд q , радиус сферы R и расстояние d , определите:

- электростатическую энергию взаимодействия заряда q и индуцированных зарядов на поверхности сферы; (1.0 балл)
- электростатическую энергию взаимодействия зарядов, индуцированных на поверхности сферы; (1.2 балла)
- полную электростатическую энергию взаимодействия системы. (1.0 балл)

Указание: Существует несколько способов решения этого задания.

- (1) В одном из них Вы можете воспользоваться интегралом:

$$\int_d^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 - R^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{d^2 - R^2}$$

- (2) В другом способе можно использовать тот факт, что для множества N зарядов q_i размещенных в точках $\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$, электростатическая энергия взаимодействия находится суммированием по всем парам зарядов:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

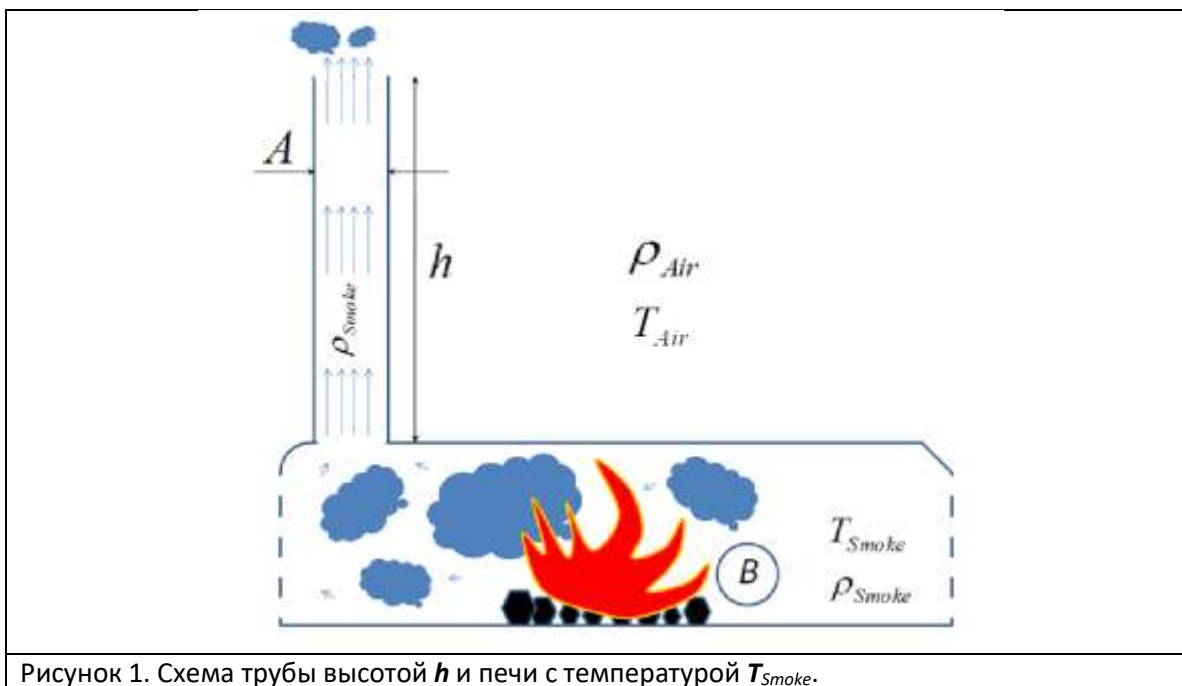
Физика дымовой трубы

Введение

Газообразные продукты горения из топки выводятся в атмосферу, имеющую температуру T_{Air} , с помощью высокой дымовой трубы с поперечным сечением A и высотой h (рис.1). В топке происходит сгорание твердого топлива при температуре T_{Smoke} . Объем газов, выходящих из трубы за единицу времени, равен B .

Предполагается, что:

- скоростью газов на входе в топку можно пренебречь;
- образовавшиеся газы имеют такую же плотность, как воздух при тех же температуре и давлении; пока газ находится в топке, его можно рассматривать как идеальный;
- давление воздуха изменяется с высотой в соответствии с законами гидростатики; изменением плотности воздуха с высотой можно пренебречь;
- течение газов удовлетворяет уравнению Бернулли, которое утверждает, что величина $\frac{1}{2}\rho v^2(z) + \rho gz + p(z) = const$,
где ρ – плотность газа, $v(z)$ – его скорость, $p(z)$ – его давление, z – высота, сохраняется в любой точке потока;
- изменением плотности газов вдоль трубы можно пренебречь.



Задание 1

- а) Какова должна быть минимальная высота трубы для обеспечения ее нормальной работы, чтобы она могла отводить в атмосферу все образующиеся в топке газы? Выразите результат через V , A , T_{Air} , $g=9.81 \text{ м/с}^2$, $\Delta T=T_{Smoke}-T_{Air}$. **Внимание!** В каждом последующем задании предполагается, что высота трубы как раз равна найденной здесь минимальной высоте. (3.5 балла)
- б) Предположим, что построены две дымовые трубы, предназначенные для одних и тех же целей. Они имеют одинаковое поперечное сечение, но предназначены для работы в различных местностях: одна – в холодной местности, где средняя температура воздуха равна -30°C , а другая – в теплой местности, где средняя температура воздуха равна 30°C . Температура выделяющихся газов составляет 400°C . Если расчетная высота трубы в холодной местности равна 100 м , то какова должна быть высота трубы в теплой местности? (0.5 балла)
- в) Как изменяется скорость течения газов вдоль трубы? Нарисуйте график этой зависимости, предполагая, что поперечное сечение трубы постоянно. Обозначьте на графике точку вхождения газов в трубу. (0.6 балла)
- г) Как меняется давление газов с высотой внутри трубы? (0.5 балла)

Солнечная электростанция

Движение газов через трубу можно использовать для создания солнечной электростанции. Идею такой электростанции иллюстрирует рисунок 2. Солнце нагревает воздух под коллектором, который открыт по периметру, чтобы воздух мог свободно поступать внутрь. Теплый воздух поднимается вверх по дымоходу (тонкие сплошные стрелки), а холодный поступает в коллектор извне (толстые пунктирные стрелки), тем самым обеспечивается непрерывная циркуляция воздуха. Поток воздуха приводит в движение турбину, таким образом вырабатывается электрическая энергия. Энергию солнечного излучения, падающего на единицу площади поверхности коллектора за единицу времени, обозначим через G . Предположим, что вся эта энергия идет на нагревание воздуха в коллекторе (удельная теплоемкость воздуха равна c , ее зависимостью от температуры можно пренебречь). КПД солнечной электростанции на основе трубы определим как отношение кинетической энергии потока воздуха в трубе к энергии солнечного излучения, затрачиваемой на нагревание этой же массы воздуха перед поступлением в трубу.

Задание 2

- а) Каков КПД солнечной электростанции на основе трубы? (2.0 балла)
- б) Нарисуйте график, показывающий, как изменяется КПД электростанции в зависимости от высоты трубы. (0.4 балла)

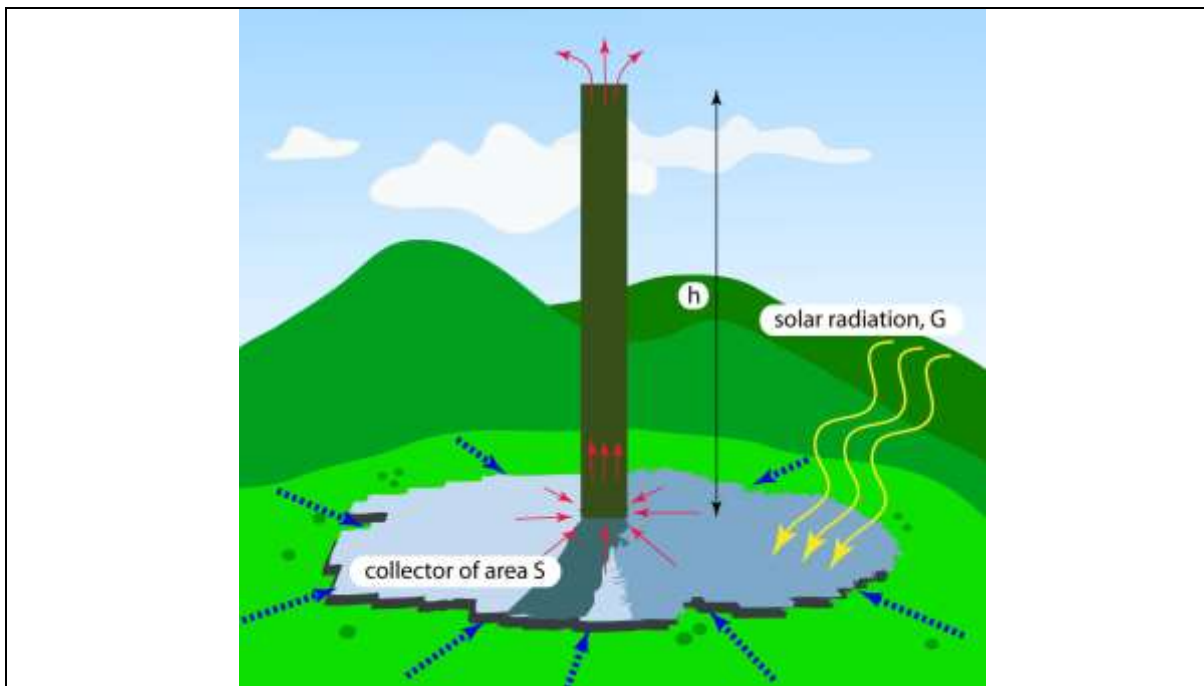


Рисунок 2. Схема солнечной электростанции на основе трубы. Solar radiation – солнечное излучение, collector of area S – коллектор площадью S.

Опытная электростанция в Манзанаресе

Опытная солнечная электростанция на основе трубы, построенная в Манзанаресе (Испания), имеет трубу высотой 195 м и радиусом 5 м, диаметр коллектора равен 244 м. Удельная теплоемкость воздуха $c = 1012$ Дж/(кг·К), плотность нагретого воздуха 0.9 кг/м³, средняя температура окружающего воздуха $T_{atm} = 295$ К. В Манзанаресе в течение солнечного дня мощность солнечного излучения на единицу площади в среднем равна 150 Вт/м².

Задание 3

- Чему равен КПД опытной электростанции? Оцените его численно. (0.3 балла)
- Какова максимальная мощность опытной электростанции? (0.4 балла)
- Сколько энергии дает электростанция в течение одного типичного солнечного дня? (0.3 балла)

Задание 4

- На сколько возрастает температура воздуха при входе в трубу (теплый воздух) относительно температуры окружающего воздуха (холодный воздух)? Запишите общую формулу и сделайте оценку для опытной электростанции. (1.0 балла)
- Какая масса воздуха проходит через систему в единицу времени? (0.5 балла)

3. Упрощенная модель атомного ядра

Введение

Несмотря на то, что атомное ядро – квантовый объект, некоторые закономерности, касающиеся его свойств (таких как радиус и энергия связи), можно вывести из нескольких простых положений:

- i) ядро состоит из нуклонов (протонов и нейтронов);
- ii) ядерные силы, связывающие нуклоны в ядре, являются короткодействующими (они действуют только между соседними нуклонами);
- iii) считайте, что количество протонов (Z) в ядре приблизительно равно количеству нейтронов (N), то есть $Z \approx N \approx A/2$, где A – общее количество нуклонов ($A \gg 1$).

Внимание! Используйте эти положения при решении заданий 1 – 4.

Задание 1 – Атомное ядро как плотно упакованная система нуклонов

Согласно простейшей модели, ядро можно представить как шар, плотно заполненный нуклонами (Рис. 1(a)), которые представляют собой шарики радиуса $r_N = 0,85$ фм ($1 \text{ фм} = 10^{-15} \text{ м}$). Ядерные силы действуют только при непосредственном контакте двух нуклонов. Объем ядра V больше суммы объемов нуклонов AV_N , где $V_N = \frac{4}{3}\pi r_N^3$.

Отношение $f = AV_N/V$ называется фактором упаковки и представляет собой относительную часть объема, заполненную ядерным веществом.

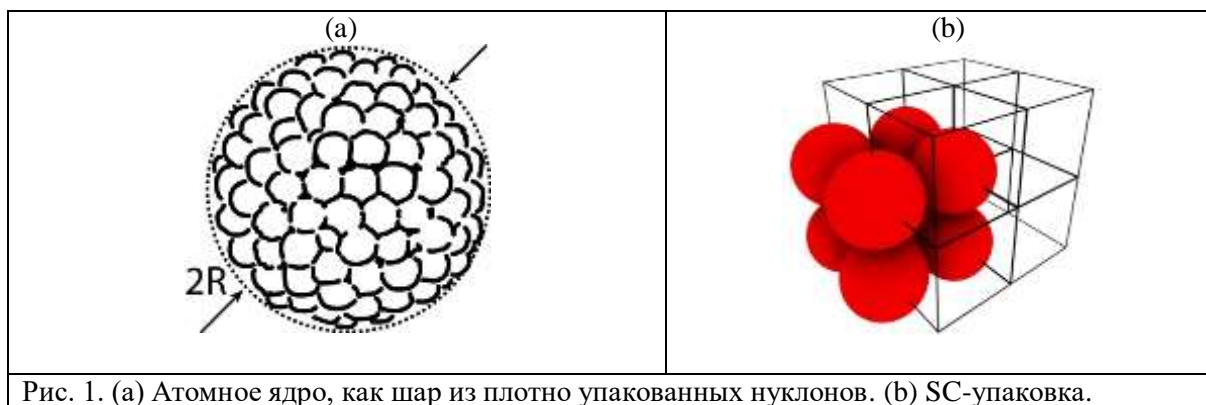


Рис. 1. (a) Атомное ядро, как шар из плотно упакованных нуклонов. (b) SC-упаковка.

- а) Определите фактор упаковки f , если нуклоны упакованы как в простой кубической кристаллической решетке (англ. simple cubic, SC), где каждый нуклон занимает место в вершинах куба (Рис. 1(b)). (0,3 балла)

Внимание! В каждом последующем задании считайте фактор упаковки атомных ядер равным фактору упаковки, полученному в задании 1а. Если вы не смогли его вычислить, в дальнейшем используйте $f = 1/2$.

б) Оцените среднюю плотность массы ρ_m , плотность заряда ρ_c и радиус R ядра, имеющего A нуклонов. Средняя масса нуклона равна $1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. (1,0 балл)

Задание 2 – Энергия связи атомных ядер – объемные и поверхностные факторы

Энергия связи – это энергия, необходимая для разделения ядра на отдельные нуклоны. Её происхождение связано с тем, что между ближайшими нуклонами действуют силы притяжения. Если данный нуклон находится внутри ядра, то он вносит в полную энергию связи энергию $a_v = 15,8$ МэВ ($1 \text{ МэВ} = 1,602 \cdot 10^{-13}$ Дж). Вклад одного нуклона, находящегося на поверхности ядра, в общую энергию связи приблизительно равен $a_v / 2$.

Выразите энергию связи ядра E_b , содержащего A нуклонов, через величины A , a_v и f . Сделайте поправку на то, что часть нуклонов находится на поверхности ядра.

(1,9 балла)

Задание 3 – Влияние электростатических (кулоновских) сил на энергию связи

Электростатическая энергия однородно по объему заряженного шара радиусом R (общий заряд Q_0) равна $U_c = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R}$, где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Кл² Н⁻¹ м⁻².

а) Используя эту формулу, выразите электростатическую энергию ядра. В ядре между протонами действуют кулоновские силы, причём, сам на себя протон кулоновскими силами не действует. Это обстоятельство можно учесть путём замены $Z^2 \rightarrow Z(Z-1)$. Используйте данную поправку в дальнейших расчётах. (0,4 балла)

б) Запишите полную формулу для энергии связи, включающую основной (объемный) фактор, а также поправки на поверхностную энергию и энергию электростатического взаимодействия протонов. (0,3 балла)

Задание 4 – Деление тяжелых ядер

Деление ядер – это процесс расщепления ядра на части (на более лёгкие ядра). Предположите, что ядро с A нуклонами распадается на два одинаковых осколка (Рис. 2).

а) Подсчитайте общую кинетическую энергию E_{kin} в момент, когда центры этих осколков находятся на расстоянии $d \geq 2R(A/2)$, где $R(A/2)$ - радиус каждого осколка. Большое ядро в начальный момент времени находилось в состоянии покоя. (1,3 балла)

б) Предположим, что $d = 2R(A/2)$. Подсчитайте E_{kin} по формуле, полученной в части а), для ядер с $A = 100, 150, 200, 250$ (результат запишите в МэВ). Оцените, для каких значений A возможно деление ядра в рамках данной модели? (0,7 балла)

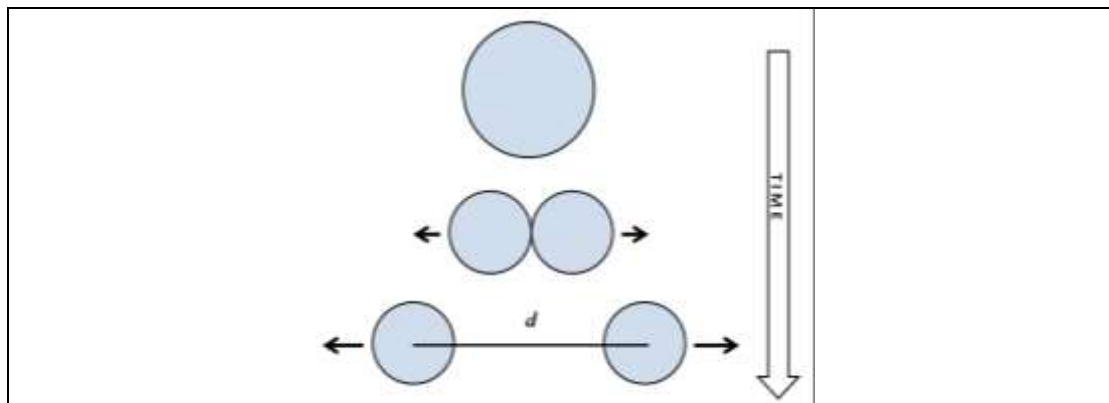


Рис. 2. Схематическое описание процесса деления ядер в нашей модели

Задание 5 – Реакции передачи

а) В современной физике энергетические свойства ядер и ядерные реакции описываются в единицах массы. Например, если ядро (имеющее нулевую скорость), находится в возбуждённом состоянии с энергией выше энергии основного состояния на величину E_{exc} , его масса $m = m_0 + E_{exc} / c^2$, где m_0 – масса покоящегося ядра в основном состоянии. Ядерная реакция $^{16}O + ^{54}Fe \rightarrow ^{12}C + ^{58}Ni$ – это пример так называемой реакции передачи, в которой некоторая часть одного ядра («кластер») переходит в другое ядро (Рис. 3). В нашем примере передаваемая другому ядру часть – это 4He – кластер (α – частица). Реакции передачи проходят с максимальной вероятностью, если скорость продукта реакции (в нашем случае ^{12}C) равна по модулю и направлению скорости налетающей частицы (в нашем случае – ^{16}O). Мишень ^{54}Fe первоначально находится в состоянии покоя. Ядро ^{58}Ni оказывается в одном из возбуждённых состояний. Найдите энергию возбуждённого состояния (и выразите её в МэВ), если кинетическая энергия налетающего ядра ^{16}O равна 50 МэВ.

Скорость света $3 \cdot 10^8$ м/с.

(2,2 балла)

1	$M(^{16}O)$	15,99491 а.е.м.
2	$M(^{54}Fe)$	53,93962 а.е.м.
3	$M(^{12}C)$	12,00000 а.е.м.
4	$M(^{58}Ni)$	57,93535 а.е.м.

Таблица 1. Массы покоя частиц в основном состоянии. 1 а.е.м. = $1,6605 \cdot 10^{-27}$ кг.

б) Образовавшееся ядро ^{58}Ni (из задания а), находящееся в возбуждённом состоянии, переходит в основное состояние, испуская при этом гамма-квант в направлении движения. Рассмотрите реакцию в системе отсчёта, в которой ядро ^{58}Ni покоится, и найдите энергию отдачи E_{recoil} (то есть, кинетическую энергию ^{58}Ni после испускания гамма-кванта). Какова энергия гамма-кванта E_γ в этой системе отсчёта? Какова энергия гамма-кванта $E_{detector}$ в лабораторной системе отсчёта (то есть какой будет энергия гамма-

кванта, измеренная детектором, который покоится в лабораторной системе отсчёта и расположен в направлении движения ядра ^{58}Ni . (1,6 балла)

