Проводники в проводящей жидкости

Два проводника погружены в однородную, диэлектрическую, слабо проводящую жидкость. Если к проводникам приложить постоянную разность потенциалов, то в пространстве между ними появятся как электрическое, так и магнитное поля. Исследуем эти поля.

1. **(0.4 балла)** Рассмотрим бесконечно длинную нить в вакууме, заряженную однородно зарядом с линейной плотностью λ. Найдите вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, создаваемого заряженной нитью.
2. **(0.4 балла)** Потенциал электрического поля $V(r)$, создаваемого бесконечной заряженной нитью, может быть написан в виде
$$V(r) = f(r) + K,$$
где K - произвольная постоянная. Определите $f(r)$.

3. **(0.5 балла)** Найдите распределение потенциала электрического поля $V(x,y,z)$, создаваемого двумя однородно заряженными нитями. Первая нить заряжена с линейной плотностью заряда λ и проходит через точку $x = -b, y = 0$, а вторая нить заряжена с линейной плотностью заряда $-\lambda$ и и проходит через точку $x = b, y = 0$. Обе нити параллельны оси z, начало координат находится посередине между ними и потенциал V в начале координат равен 0. Схематически нарисуйте эквипотенциальные поверхности.

   В дальнейшем полностью пренебрегайте краевыми эффектами.

4. **(2.2 балла)** Пусть теперь два одинаковых проводящих цилиндра радиусом $R = 3a$ каждый находятся в вакууме. Длина каждого цилиндра намного больше их радиуса, $l \gg R$. Оси обоих цилиндров параллельны оси z, ось первого цилиндра проходит через точку $x = -5a, y = 0$, а ось второго - через точку $x = 5a, y = 0$. Между цилиндрами создают разность потенциалов V_0 путем подключения их к батарее так, что цилиндр в точке $x = -5a$ имеет более высокий потенциал. Найдите распределение потенциала **во всех частях пространства**. По прежнему считайте, что $V = 0$ в начале координат.

5. **(0.5 балла)** Найдите емкость C всей системы.

6. **(1.0 балла)** Теперь оба цилиндра полностью погружают в слабо проводящую жидкость с проводимостью σ. Вычислите полную силу тока, протекающего в жидкости между цилиндрами. Считайте, что диэлектрическая проницаемость жидкости равно единице, $\epsilon = 1$.

7. **(0.5 балла)** Вычислите полное сопротивление R системы. Найдите, чему равно произведение RC для всей системы.

8. **(1.5 балла)** Вычислите распределение индукции магнитного поля, создаваемого током между цилиндрами. Считайте, что магнитная проницаемость жидкости равно единице, $\mu = 1$.

   Полезная формула: $\int \frac{\alpha dx}{\alpha^2+x^2} = \arctan\frac{x}{a} + const$

Релятивистские поправки в спутниковой системе GPS

Система глобального позиционирования GPS является навигационной системой, в которой для определения координаты объекта (например, самолета) используются сигналы со спутников. Однако, вследствие того, что спутники движутся по орбитам с большими скоростями, необходимо учитывать поправки, связанные со специальной теорией относительности, а вследствие того, что спутники летают на больших высотах, необходимо учитывать поправки, связанные с общей теорией относительности. Обе поправки невелики, но они очень важны для точного измерения координат. В этой задаче изучаются обе поправки.

Сначала мы рассмотрим ускоренное движение частицы в рамках специальной теории относительности. Определим две системы отсчета. Первую систему отсчета назовем **лабораторной (или Земной) системой** и обозначим ее как S. В этой системе отсчета частица первоначально находится в состоянии покоя. Другую систему отсчета назовем **мгновенно сопутствующей системой** и обозначим ее как S'. Это инерциальная система отсчета, в которой частица в каждый момент времени покоится. Обратите внимание, что это именно инерциальная система отсчета, скорость которой в каждый момент времени совпадает со скоростью самой частицы относительно лабораторной системы. В любой момент времени скорость течения времени по часам частицы **такая же**, как и скорость течения времени в сопутствующей системе. Разумеется, эта сопутствующая система отсчета пригодна только в течение бесконечно малого промежутка времени, а затем мы должны определить новую сопутствующую систему отсчета. Считайте, что в начальный момент, когда скорость частицы равна нулю, часы установили таким образом, что $t = \tau = 0$, где t — время по часам лабораторной системы отсчета, а τ - время по часам частицы.

Применяя **принцип эквивалентности**, можно изучить эффекты общей теории относительности используя результаты специальной теории относительности, избежав сложных вычислений метрического тензора. Просуммировав релятивистские эффекты специальной и общей теорий относительности, мы можем вычислить поправки, необходимые для более точного определения координат с помощью спутников GPS.

Полезные формулы:

- $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$
- $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
- $\sinh(x - y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$
- $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C$
- $\int \frac{dx}{1-x^2} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$

Часть А. Ускоренно движущаяся частица (2.8 балла)

Рассмотрим частицу с массой покоя m на которую действует постоянная сила F, определенная в лабораторной системе отсчета и действующая в положительном направлении оси x. Изначально (t =τ= 0) частица находится в покое в начале координат (x = 0).

1. **(0.5 балла)** Определите ускорение частицы a в лабораторной системе отсчета в зависимости от скорости частицы v.
2. **(0.5 балла)** Определите зависимость скорости частицы $\beta(t) = \frac{v(t)}{c}$ от времени t в лабораторной системе отсчета, выразив ее через F, m, t и c.
3. **(0.3 балла)** Определите зависимость координаты частицы $x(t)$ от времени t, выразив ее через F, m, t и c.
4. **(0.7 балла)** Теперь, перейдите в сопутствующую систему отсчета и определите в ней ускорение частицы a' и докажите, что оно постоянно и равно $a' \equiv g = F/m$. Ускорение частицы a' в сопутствующей системе отсчета - это ускорение частицы, измеренное по часам мгновенно сопутствующей системы отсчета.
5. **(0.4 балла)** Определите зависимость скорости частицы $\beta(\tau)$ от времени по часам самой частицы τ, выразив ее через g, τ и c.

6. **(0.4 балла)** Выразите время t в лабораторной системе отсчета через g, τ и c.

Часть B. Время задержки сигнала (2.0 балла)

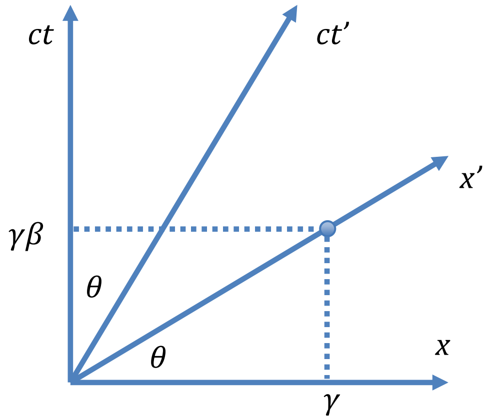
В первой части мы не учитывали то, что сигнал со спутника достигает наблюдателя спустя некоторое время, называемое временем задержки. Данная часть является единственной частью данной задачи, где учитывается время задержки. Пусть частица двигается так, как описано в части А.

1. **(1.2 балла)** В момент времени τ по часам частицы она получает сигнал от источника расположенного в начале координат (x = 0) лабораторной системы отсчета. В какой момент времени t_0 по часам лабораторной системы отсчета сигнал был выпущен? Стремится ли t_0 к определенному пределу по истечению большого интервала времени τ? Если да, то каково это предельное значение?
2. **(0.8 балла)** Теперь рассмотрим обратный случай. В момент времени t наблюдатель, находящийся в начале координат (x = 0) лабораторной системы отсчета получает сигнал от частицы. В какой момент времени τ_0 по часам частицы сигнал был выпущен? Стремится ли τ_0 к определенному пределу по истечению большого интервала времени t? Если да, то каково это предельное значение?

Часть C. Диаграмма Минковского (1.0 балла)

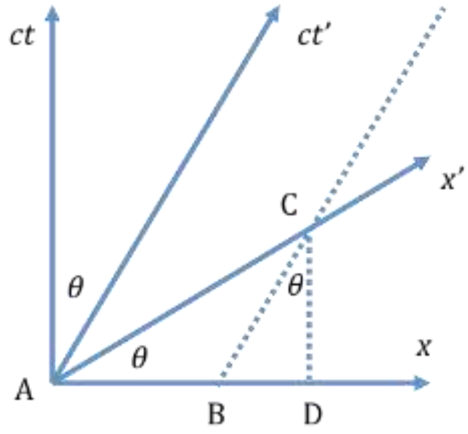
Во многих случаях для иллюстрации релятивистских явлений полезно использовать диаграммы Минковского. При построении этой диаграммы необходимо помнить о преобразованиях Лоренца, связывающих координаты событий в лабораторной системе отсчета S с координатами событий в подвижной системе отсчета S', которая движется со скоростью $v = \beta c$ относительно лабораторной системы отсчета.

$$x = \gamma(x' + \beta ct'),$$
$$ct = \gamma(ct' + \beta x'),$$
$$x' = \gamma(x - \beta ct),$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta x).$$
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



Выберем в качестве осей ортогональной системы координат x и ct. Точка с координатами (x', ct') = (1,0) в подвижной системе отсчета S' имеет координаты (x, ct) = = $(\gamma, \gamma\beta)$ в лабораторной системе отсчета S. Линия, соединяющая эту точку с началом координат, определяет ось x' на диаграмме. Другая точка с координатами (x', ct') = (0,1) в подвижной системе отсчета S' имеет координаты (x, ct) = $(\gamma\beta, \gamma)$ в лабораторной системе координат S. Линия, соединяющая эту точку с началом координат, определяет ось ct' на диаграмме. Угол между осями координат x и x' равен θ, где $\tan\theta = \beta$. Единичный отрезок, определенный в подвижной системе отсчета S', изображается на диаграмме отрезкам длиной $\gamma\sqrt{1+\beta^2} = \sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}$.

Для лучшего понимания диаграммы Минковского, рассмотрим следующий пример. Пусть стержень длинной L покоится в подвижной системе отсчета S'. Найдем его длину в лабораторной системе отсчета S с помощью диаграммы Минковского, показанной ниже.



Стержень представлен на диаграмме отрезком AC. Так как длина стержня в подвижной системе отсчета S' равна L, то в соответствии с вышесказанным на диаграмме он изображается отрезком AC длинной $\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}L$. Длина стержня в лабораторной системе отсчета S определяется на диаграмме построением отрезка AB.

$$\begin{aligned}\mathrm{AB} &= \mathrm{AD} - \mathrm{BD} \\ &= AC\cos\theta - AC\sin\theta\tan\theta \\ &= L\sqrt{1-\beta^2}\end{aligned}$$

1. **(0.5 балла)** Пусть стержень длинной L покоится в лабораторной системе отсчета S. Построите диаграмму Минковского и вычислите длину стержня в подвижной системе отсчета S'.
2. **(0.5 балла)** Теперь рассмотрим движение частицы из части A на диаграмме. Постройте график зависимости ct от x, отложив по осям величины $ct(c^2/g)$ и $x(c^2/g)$. На том же графике изобразите оси x' и ct' в момент, когда $\frac{gt}{c} = 1$.

Часть D. Две ускорено движущейся частицы (2.3 балла)

В этой части рассмотрим две частицы, двигающейся с одинаковым ускорением g в положительном направлении оси x в сопутствующих системах отсчета. Первая частица начинает движение из точки $x = 0$, тогда как вторая частица начинает движение из точки $x = L$. Не учитывайте время задержки в этой части задачи.

1. **(0.3 балла)** По истечении некоторого времени наблюдатель, находящийся в лабораторной системе отсчета, зафиксировал, что по часам первой частицы прошло время τ_A. Какое время τ_B зафиксировал наблюдатель в лабораторной системе отсчета по часам второй частицы?
2. **(1.0 балла)** Теперь перейдем в систему отсчета связанную с первой частицей. В определенный момент времени наблюдатель, который движется вместе с первой частицей, зафиксировал время τ_1 по часам первой частицы. Одновременно он зафиксировал время τ_2 по часам второй частицы. Покажите, что
$$\sinh\frac{g}{c}(\tau_2 - \tau_1) = C_1 \sinh\frac{g\tau_1}{c},$$
где C_1 является постоянной. Определите C_1.
3. **(1.0 балла)** Наблюдатель, находящейся на первой частице, видит, что вторая частица удаляется от него. Покажите, что зафиксированная наблюдателем скорость удаления второй частицы от первой равна
$$\frac{dL'}{d\tau_1} = C_2 \frac{\sinh\frac{g\tau_2}{c}}{\cosh\frac{g}{c}(\tau_2 - \tau_1)},$$
где C_2 является постоянной. Определите C_2.

Часть E. Равноускоренная система отсчета (2.7 балла)

В этой части мы подберем ускорения частиц тикам образом, чтобы расстояние между частицами оставалось постоянным с точки зрения наблюдателя находящегося на первой частице. Первая частица начинает движение из точки $x = 0$, тогда как вторая частица начинает движение из $x = L$.

1. **(0.8 балла)** Пусть первая частица движется с ускорением g_1 в положительном направлении оси x в сопутствующей системе отсчета. В лабораторной системе отсчета существует такая точка $x=x_p$, расстояние

от которой до первой частицы остается постоянным с точки зрения наблюдателя, который находиться на первой частице. Определите x_p.

2. **(1.3 балла)** Пусть первая частица движется с ускорением g_1 в положительном направлении оси x в сопутствующей системе отсчета. Определите ускорение второй частицы g_2 в сопутствующей системе отсчета, так, чтобы расстояние между частицами не менялось с точки зрения наблюдателя, находящегося на первой частице.

3. **(0.6 балла)** Определите отношение $\dfrac{dt_2}{dt_1}$ скорости течения времени по часам второй частицы к скорости течения времени по часам первой частицы с точки зрения наблюдателя, находящегося на первой частице.

Часть F. Поправка к системе GPS (2.2 балла)

Результаты части E показывают, что скорости течения времени по часам, находящимся на разных расстояниях от Земли, будут разными, хотя эти часы и не движутся относительно друг друга. Согласно **принципу эквивалентности** общей теории относительности, наблюдатель в небольшом закрытом помещении не в силах обнаружить разницу между ускорением свободного падения g и ускорением, вызванным силой инерции, появляющейся вследствие движения системы отсчета с ускорением g. Отсюда можно сделать вывод, что часы, находящиеся в точках с различными гравитационными потенциалами, будут иметь различную скорость течения времени.

Теперь рассмотрим спутник системы GPS, который вращается вокруг Земли с периодом обращения, равным 12 часам.

1. **(0.6 балла)** Пусть ускорение свободного падения на поверхности Земли составляет 9.78 м/с^2, и радиус Земли равен 6380 км. Определите радиус орбиты спутника GPS? Чему равна скорость спутника? Вычислите численные значения радиуса орбиты и скорости.

2. **(1.2 балла)** Через сутки, показания часов на поверхности Земли и на спутнике будут отличатся из за эффектов как специальной, так и

общей теории относительности. Вычислите разницу показаний часов, вызванную каждым из эффектов за сутки. Вычислите полную разницу за одни сутки. Какие часы идут быстрее, часы на поверхности Земли или часы на спутнике?

3. **(0.4 балла)** Через сутки, оцените погрешность определения координат, связанную с данными эффектами.

Все вещества во Вселенной обладают, помимо массы и заряда, такой фундаментальной характеристикой, как спин. Спин — это внутренний момент количества движения, которым обладают частицы. Хотя для полного описания спина необходимо привлечение аппарата квантовой механики, физику спина можно понять, используя обычный классический формализм. В данной задаче изучается влияние магнитного поля на спин с использованием его классической аналогии.

Классическое уравнение моментов для спина выглядит так:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \times \vec{B}.$$

В этом уравнении момент импульса $\vec{L}$ представляет собой спин частицы, $\vec{\mu}$ — магнитный момент частицы, $\vec{B}$ — индукция магнитного поля. Спин частицы связан с ее магнитным моментом уравнением

$$\vec{\mu} = -\gamma \vec{L},$$

где γ — константа, называемая гиромагнитным отношением.

Часть A. Ларморовская прецессия (1,6 балла)

•**(0,8 балла)** Докажите, что величина магнитного момента μ в магнитном поле $\vec{B}$ всегда остается постоянной. Также покажите, что в частном случае постоянного магнитного поля угол между $\vec{\mu}$ и $\vec{B}$ постоянен.

(*Подсказка*: Вы можете использовать свойства векторных произведений.)

•**(0,8 балла)** Индукция магнитного поля $\vec{B}$ образует угол ϕ с магнитным моментом частицы $\vec{\mu}$. Из-за момента сил, создаваемого магнитным полем, магнитный момент $\vec{\mu}$ вращается вокруг поля $\vec{B}$, что известно как ларморовская прецессия. Определите частоту ω_0 ларморовской прецессии магнитного момента вокруг вектора $\vec{B} = B_0\vec{k}$, где $\vec{k}$ — единичный вектор вдоль оси z.

Часть B. Вращающаяся система координат (3,4 балла)

В данной части задачи выберем систему координат $S' = (x', y', z')$, которая вращается с угловой скоростью $\omega\vec{k}$ относительно лабораторной системы отсчета $S = (x, y, z)$. Оси x', y', z' совпадают с осями x, y, z в момент времени $t = 0$. Любой вектор $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ в лабораторной системе отсчета может быть представлен во вращающейся системе координат S' как $\vec{A} = A'_x\vec{i}\,' + A'_y\vec{j}\,' + A'_z\vec{k}\,'$. Производная этого вектора по времени

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\left(\frac{dA'_x}{dt}\vec{i}\,'+\frac{dA'_y}{dt}\vec{j}\,'+\frac{dA'_z}{dt}\vec{k}\,'\right)+\left(A'_x\frac{d\vec{i}\,'}{dt}+A'_y\frac{d\vec{j}\,'}{dt}+A'_z\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right),$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{lab}=\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{rot}+\left(\omega\vec{k}\times\vec{A}\right),$$

где $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{lab}$ — производная по времени вектора $\vec{A}$ в лабораторной системе отсчета и $\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{rot}$ — производная этого вектора по времени во вращающейся системе отсчета.

Все вопросы в данной части относятся к вращающейся системе отсчета S'.

•**(0,8 балла)** Покажите, что изменение магнитного момента со временем описывается уравнением

$$\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_{rot}=-\left(\gamma\vec{\mu}\times\vec{B}_{eff}\right),$$

где $\vec{B}_{eff}=\vec{B}-\frac{\omega}{\gamma}\vec{k}\,'$ — эффективная индукция магнитного поля.

•**(0,4 балла)** Чему равна новая частота прецессии Δ, выраженная через ω_0 и ω, для $\vec{B}=B_0\vec{k}$?

•**(1,2 балла)** Теперь рассмотрим случай магнитного поля, изменяющегося со временем. Для этого помимо постоянного магнитного поля мы также приложим вращающееся магнитное поле $\vec{b}(t)=b\left(\vec{i}\cos\omega t+\vec{j}\sin\omega t\right)$, так что $\vec{B}=B_0\vec{k}+\vec{b}(t)$. Покажите, что новая ларморовская частота прецессии магнитного момента равна

$$\Omega=\gamma\sqrt{\left(B_0-\frac{\omega}{\gamma}\right)^2+b^2}.$$

•**(1,0 балла)** Вместо того, чтобы прикладывать поле $\vec{b}(t)=b\left(\vec{i}\cos\omega t+\vec{j}\sin\omega t\right)$ теперь приложим поле $\vec{b}(t)=b\left(\vec{i}\cos\omega t-\vec{j}\sin\omega t\right)$, которое вращается в противоположном направлении. В этом случае

$$\vec{B}=B_0\vec{k}+b\left(\vec{i}\cos\omega t-\vec{j}\sin\omega t\right).$$

Чему теперь равно эффективное магнитное поле $\vec{B}_{eff}$, выраженное через единичные вектора $\vec{i}\,',\vec{j}\,',\vec{k}\,'$? Чему равно среднее по времени поле $\overline{\vec{B}_{eff}}$, (вспомните, что $\overline{\cos 2\pi t/T}=\overline{\sin 2\pi t/T}=0$)?

Часть С. Осцилляции Раби (3,0 балла)

Для ансамбля из N частиц, находящегося под действием сильного магнитного поля, спин может иметь два квантовых состояния: «вверх» и «вниз». Следовательно, полная заселенность состояний «спин вверх» $N_\uparrow$ и «спин вниз» $N_\downarrow$ описывается уравнением

$$N_\uparrow + N_\downarrow = N.$$

Разность заселенностей состояний «спин вверх» и «спин вниз» приводит к макроскопическому намагничиванию вдоль оси:

$$M = (N_\uparrow - N_\downarrow)\mu = N\mu_z.$$

В реальном эксперименте обычно используются два магнитных поля: сильное смещающее магнитное поле $B_0\vec{k}$ и поле, колеблющееся с амплитудой $2b$ и перпендикулярное смещающему полю ($b << B_0$). Изначально прилагается только сильное смещающее поле, вынуждающее все частицы перейти в состояние «спин вверх» (при $t = 0$ вектор $\vec{\mu}$ ориентирован в направлении z). Затем включается поле, колеблющееся с частотой ларморовской прецессии ω_0, т.е. $\omega = \omega_0$. Другими словами, после момента времени $t = 0$ суммарное поле описывается уравнением

$$\vec{B}(t) = B_0\vec{k} + 2b\vec{i}\cos\omega t\,.$$

•**(1,2 балла)** Покажите, что во вращающейся системе координат S' эффективное поле может быть аппроксимировано как

$$\vec{B}_{eff} \approx b\vec{i}\,',$$

что известно как аппроксимация вращающейся волной. Чему равна частота прецессии Ω в системе координат S'?

•**(0,6 балла)** Определите угол α, который вектор $\vec{\mu}$ образует с полем $\vec{B}_{eff}$. Также докажите, что намагниченность изменяется со временем как

$$M(t) = N\mu(\cos\Omega t).$$

•**(1,2 балла)** При воздействии магнитного поля, описанного выше, определите относительную заселенность состояний «спин вверх» $P_\uparrow = N_\uparrow / N$ и «спин вниз» $P_\downarrow = N_\downarrow / N$ как функции времени. Нанесите на один график $P_\uparrow$ и $P_\downarrow$ в зависимости от времени t. Изменяющаяся со временем заселенность состояний «спин вверх» и «спин вниз» называется осцилляциями Раби.

Часть D. Несовместимость измерений (2,0 балла)

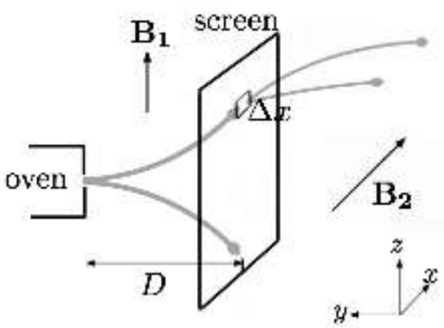
Спин является векторной величиной. Из-за его квантовых свойств мы не можем измерить все его компоненты одновременно (т.е. мы можем знать $|\vec{\mu}|$ и μ_z как в случаях, приведенных выше; но не можем знать одновременно $|\vec{\mu}|$, μ_x,

μ_y и μ_z). В данной задаче мы произведем вычисления на основе принципа неопределенности Гейзенберга (используя соотношение $\Delta p_q \Delta q \geq \hbar$) для того, чтобы показать, что эти измерения несовместимы друг с другом.

•**(1,0 балл)** Рассмотрим горячий тигель — источник атомов серебра, имеющий небольшое отверстие. Атомы вылетают из отверстия вдоль направления «– *y*» (см. рисунок внизу) и попадают в неоднородное в пространстве поле $\vec{B}_1$. Поле $\vec{B}_1$ имеет сильную компоненту в направлении оси *z*. В нем атомы с различными магнитными моментами $\mu_z = \pm\gamma\hbar$ расщепляются вдоль направления *z*. На расстоянии *D* от тигля расположен экран SC_1, который пропускает только атомы со спином вверх (не пропускаются атомы со спином вниз). Поэтому сразу за экраном атомы имеют спин, направленный вверх. За экраном атомы входят в область неоднородного поля $\vec{B}_2$, где на них действует сила

$$F_x = \mu_x C.$$

Поле $\vec{B}_2$ имеет сильную компоненту в направлении оси *x*, вдоль которой атомы имеют магнитные моменты $\mu_x = \pm\gamma\hbar$.



Покажите, что для того, чтобы определить μ_x , наблюдая расщепление в направлении оси *x*, должно выполняться следующее условие:

$$\frac{1}{\hbar}|\mu_x|\Delta x C t >> 1,$$

где *t* — время после прохождения экрана SC_1 и Δx — расхождение пучков на экране SC_1.

•**(1,0 балл)** Сразу после экрана атомы имеют спины, направленные вверх, где $\mu_z = \gamma\hbar = |\mu_x|$. Это означает, что атомы будут прецессировать с угловыми частотами, покрывающими диапазон значений $\Delta\omega$ по отношению к компоненте *x* поля $\vec{B}_2$, конкретно $B_{2x} = B_0 + Cx$. Докажите, что разброс угла прецессии $\Delta\omega t$ велик и мы не можем измерять одновременно μ_x и μ_z . Другими словами, измерение μ_x разрушает информацию о μ_z .