# Тормозящая сила, действующая на падающий магнит.

Джеймс Джинс
(1877-1946)

Четкое и подробное описание вихревых токов было впервые дано английским физиком Джеймсом Джинсом (1877-1946) в его известной книге «Математическая теория электричества и магнетизма» (1925). Эта задача про электричество и магнетизм.


Рисунок 1

Небольшой магнит с магнитным дипольным моментом $p$ и массой $m$ падает в длинной вертикальной немагнитной металлической трубке, как показано на рис. 1 (масштаб не соблюден). Процесс падения магнита описывается уравнением:

$$m\ddot{z} = mg - k\dot{z} \tag{1}$$

Здесь $g$ - ускорение свободного падения, а коэффициент $k$ обусловлен возникающими в трубке вихревыми токами.

I.1 Найдите установившуюся скорость $(v_T)$ падения магнита спустя большой промежуток времени. **[0.5 балла]**

I.2 Найдите зависимость координаты магнита $z(t)$ от времени $t$, при начальных условиях $v(t = 0) = 0$ и $z(t = 0) = 0$. **[1.0 балла]**

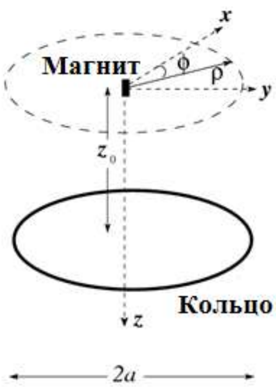



Рисунок 2

Изучим подробнее динамику падения магнита. В пунктах **(I.3)** – **(I.8)** рассматривается упрощенная задача о падении магнита вдоль оси неподвижного немагнитного металлического кольца радиуса $a$, электрическим сопротивлением $R$ и индуктивностью $L$ как показано на Рис. 2. В дальнейшем полностью пренебрегайте излучением электромагнитных волн.

В нашем случае удобно использовать цилиндрическую систему координат $(\rho, \varphi, z)$, изображенную на рис. 2 и выбранную таким образом, что ось $z$ совпадает с осью кольца. Пусть в начальный момент времени магнит покоится в начале координат, а центр кольца имеет координату $z_0$. На том же рисунке показаны оси обычной декартовой системы координат $(x, y, z)$. Считайте, что дипольный момент магнита $\vec{p}$ всегда направлен вдоль оси $z$ в ее положительном направлении $(\vec{p} = p\hat{k})$, где $\hat{k}$ - единичный вектор вдоль оси $z$.

Если бы магнит все время находился только в начале координат, то осевая ($B_z$) и радиальная ($B_\rho$) компоненты вектора индукции магнитного поля, вычисленные в некоторой точке $(\rho, \varphi, z)$, имели бы вид:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p}{(\rho^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{3z^2}{\rho^2+z^2}-1\right]$$
$$B_\rho = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3pz\rho}{(\rho^2+z^2)^{5/2}}$$

где $\mu_0$ - магнитная постоянная.

I.3 Пусть в некоторый момент времени магнит имеет координату $z$ и скорость его падения равна $v$. Найдите величину ЭДС $e_i$, индуцируемой магнитом в кольце. **[1.5 балла]**

I.4 Пусть эта ЭДС вызывает в кольце ток $i$. Найдите модуль магнитной силы $f_{em}$, действующей на кольцо, и выразите ее через $i$. **[1.0 балла]**

I.5 Чему равна величина модуля силы, действующей на магнит со стороны кольца? **[0.5 балла]**

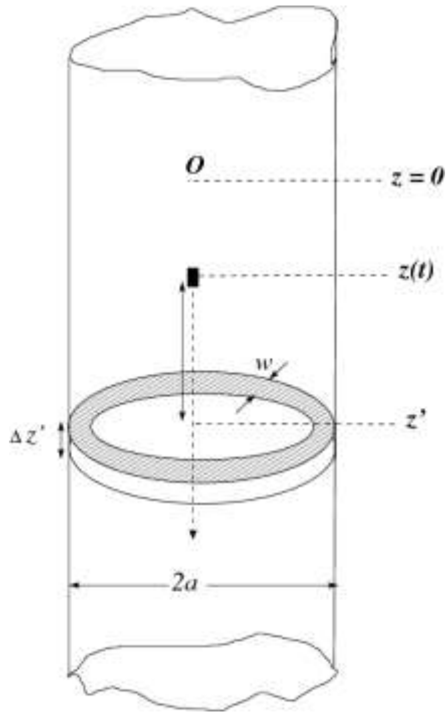
I.6 Свяжите ЭДС $e_i$, индуцируемую магнитом в кольце, с $L$, $R$ и $i$, но не решайте полученное уравнение! **[0.5 балла]**

I.7 В процессе падения магнита его потенциальная энергия в гравитационном поле уменьшается. Не проводя вычислений, укажите в виде формул три основных вида энергии, в которые переходит потенциальная энергия магнита. **[1.0 балла]**

I.8 Совершает ли механическую работу магнитное поле магнита в данном процессе? Поставьте «галочку» в нужной клетке. **[0.5 балла]**

Теперь рассчитаем коэффициент пропорциональности $k$ в уравнение (1), обусловленный трубкой. Для этого рассмотрим бесконечную трубку радиусом $a$ со стенками малой толщины $w$ и проводимостью $\sigma$. Здесь и ниже считайте, что индуктивность трубки пренебрежимо мала, а ее концы имеют координаты $z = -\infty$ и $z = \infty$ соответственно.

Разобьем трубку на большое число колец, каждое высотой $\Delta z'$, радиусом $a$, малой толщины $w$ и проводимостью $\sigma$ (см. рис. 3).




I.9 Найдите сопротивление отдельного кольца.

**[0.5 балла]**

I.10 Найдите коэффициент $k$ для бесконечной трубки и выразите его через $p, \sigma$, а также геометрические размеры кольца. Так как кольца очень тонкие, то можно считать магнитное поле внутри каждого кольца однородным и равным $B_\rho(\rho = a)$. Пусть в момент времени $t$ магнит имеет координату $z(t)$ и скорость $\dot{z}(t)$. Запишите коэффициент $k$ в виде выражения, содержащего некоторый интеграл по безразмерному параметру $u = (z - z')/a$ .

**Рисунок 1**

**[2.0 балла]**

I.11 Предположим, что коэффициент пропорциональности $k$ зависит от следующих величин:

$$k = f(\mu_0, p, R_0, a)$$

где $R_0$ - эффективное сопротивление трубки. С помощью анализа размерностей получите выражение для $k$, считая численный коэффициент в полученной формуле равным единице. **[1.0 балла]**

Подсказка: в задаче может быть полезен следующий интеграл

$$\int \frac{udu}{(u^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \frac{(a^2 + u^2)^{1-n}}{1 - n} + \text{Constant}$$

# Предел Чандрасекара

Индийский физик Субрахманян Чандрасекар (1910-1995) в одной своей известной работе 1930 г. исследовал проблему устойчивости звезд. В этой задаче вам предстоит воспроизвести упрощенный вариант его работы.

Субрахманян Чандрасекар (1910-1995)

Полезные константы

| | |
|---|---|
| Скорость света в вакууме | $c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ |
| Постоянная Планка | $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ Дж $*$ с |
| Гравитационная постоянная | $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\frac{\text{Н}*\text{м}^2}{\text{кг}^2}$ |
| Масса электрона | $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ кг |
| Масса протона | $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ кг |

**II.1.** Рассмотрим однородную звезду радиуса $R$ и массы $M$. Получите выражение для гравитационной потенциальной энергии звезды $E_G$, обусловленной ее собственным гравитационным полем (собственная гравитационная энергия). **[1.0 балла]**

**II.2.** Предположим, что звезда состоит только из полностью ионизованного водорода, а процессы термоядерного синтеза в ней прекратились. Кинетической энергией протонов можно пренебречь, а электроны подчиняются принципу запрета Паули. Оказывается, кинетическая энергия всех электронов $E_e$ может быть вычислена методами квантовой статистики и имеет вид:

$$E_e = \frac{\hbar^2 \pi^3}{10 m_e 4^{2/3}} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{7/3} \frac{{N_e}^{5/3}}{R^2}$$

где $N_e$ - полное число электронов в звезде и $\hbar = h/2\pi$. Из условия устойчивости звезды, выразите её радиус ($R_{wd}$) через её массу. Этот радиус называется радиусом «белого карлика». **[2.0 балла]**

**II.3.** Вычислите $R_{wd}$, считая, что масса звезды равна массе Солнца. ($M_S = 2{,}00 \times 10^{30}$ кг) **[1.5 балла]**

**II.4.** Предполагая, что распределение электронов по объему звезды однородно, оцените по порядку величины среднее расстояние $r_{sep}$ между электронами, используя численные значения для радиуса и массы звезды из пункта (II.3). **[1.0 балла]**

**II.5.** Оцените скорость электронов ($v$). Для этого можете воспользоваться гипотезой де – Бройля, считая, что каждый электрон представляет собой стоячую волну в одномерном ящике размером $r_{sep}$ и имеет минимально возможную энергию. **[1.0 балла]**

**II.6.** Если считать электроны ультрарелятивистскими ($E = pc$), то анализ, подобный выполненному в пункте (II.2), дает:

$$E_e^{rel} = \frac{\pi^2}{4^{4/3}}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{5/3}\frac{\hbar c}{R}{N_e}^{4/3}$$

Получите выражение для критической массы звезды $M_c$, при которой она будет находиться в состоянии равновесия. Выразите ее через постоянные, приведенные в начале данной задачи. **[1.5 балла]**

**II.7.** Пусть масса звезды $M$ больше критической массы $M_c$, полученной в пункте (II.6). Укажите, будет звезда расширяться или сжиматься, поставив «галочку» в соответствующей ячейке. **[0.5 балла]**

**II.8.** Вычислите критическую массу звезды в единицах массы Солнца $M_S$. (Замечание: полученный ответ отличается от известного результата Чандрасекара из-за использованных приближений) **[1.5 балла]**

# Фаза Панчаратнама

Данная задача посвящена интерференции, поляризации и суперпозиции двух световых лучей. Частный случай данной задачи рассмотрел индийский физик С. Панчаратнам (1934–1969).

С. Панчаратнам
(1934–1969)

Рассмотрим установку, схема которой показана на рис. 1. Два когерентных монохроматических световых луча (обозначены 1 и 2) распространяются в направлении $z$ и падают на две узкие щели, расположенные друг от друга на расстоянии $d$ ($S_1S_2 = d$). После прохождения щели, лучи интерферируют между собой и на экране $S$ наблюдается интерференционная картина. Расстояние между щелями и экраном $D$, причем $D \gg d$. Считайте, что ширина щелей $S_1$ и $S_2$ много меньше длины волны.

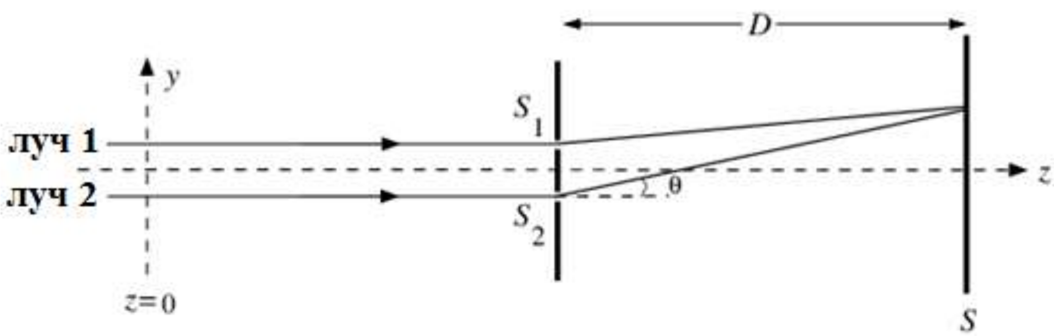



Рисунок 1

III.1. Пусть в точке $z = 0$ лучи 1 и 2 линейно поляризованы. Соответствующие векторы напряженностей электрического поля волн в этой точке равны:

$$\vec{E}_1 = \hat{\imath} E_0 \cos(\omega t) \qquad \text{.....................(1a)}$$

$$\vec{E}_2 = \hat{\imath} E_0 \cos(\omega t) \qquad \text{.....................(1b)}$$

где $\hat{\imath}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси $x$, $\omega$ - угловая частота световой волны и $E_0$ – амплитуда световой волны. Получите выражение для интенсивности света $I(\theta)$, которая будет наблюдаться на экране, где $\theta$ - угол, показанный на рис. 1. Учтите, что интенсивность света пропорциональна усредненному по времени квадрату напряженности электрического поля, а коэффициент пропорциональности считайте равным $\beta$. Пренебрегайте в дальнейшем уменьшением амплитуд напряженностей электрических полей каждой из волн вследствие их распространения от щелей к любой точке экрана. Выразите ответ через $\beta, \theta, d, E_0, c$ и $\omega$, где $c$ – скорость света.

**[1.0 балла]**

III.2. Перед щелью на пути луча 1 поместили полностью прозрачную стеклянную пластину толщиной $w$ и показателем преломления $\mu$. Найдите выражение для интенсивности света $I(\theta)$, которая будет наблюдаться на экране в этом случае. Выразите ответ через $\beta, \theta, d, E_0, c, \omega, \mu$ и $h$.

**[1.0 балла]**

III.3. Теперь перед щелью на пути луча 1 вместо прозрачной стеклянной пластинки поместили оптическое устройство, известное как пластинка в Четверть Длины Волны (ЧДВ). Это устройство изменяет поляризацию луча с линейной поляризации

$$\vec{E}_1 = \hat{\imath} E_0 \cos(\omega t)$$

на круговую поляризацию:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\hat{\imath} E_0 \cos(\omega t) + \hat{\jmath} E_0 \sin(\omega t)] \qquad (2)$$

где $\hat{\jmath}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси $y$.

Считайте, что пластинка ЧДВ не вносит дополнительной разности хода и что она абсолютно прозрачна. Круговая поляризация луча означает, что конец его вектора напряженности электрического поля описывает окружность с течением времени. При этом угол $\theta$ настолько мал, что изменением ориентации компонент напряженности электрического поля луча, даже $\hat{\jmath}$ компоненты, можно пренебречь при его распространении за щелью 1.

III.3.a. Найдите выражение для интенсивности света $I(\theta)$, которая будет наблюдаться на экране. Выразите ответ через $\beta, \theta, d, E_0, c$ и $\omega$.

III.3.b. Чему равна максимальная интенсивность ($I_{max}$)?

III.3.c. Чему равна минимальная интенсивность ($I_{min}$)?

**[2.0 балла]**

III.4.

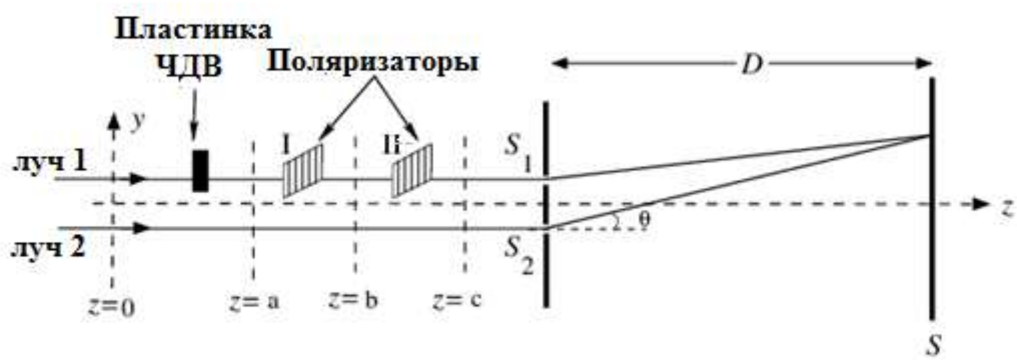



Рисунок 2

Теперь рассмотрим экспериментальную установку, показанную на рис. 2, в которой на пути луча 1 помещены

- пластинка (ЧДВ), описанная выше в пункте 3,
- линейный поляризатор (обозначен как I), помещенный между точками $z = a$ и $z = b$, который пропускает только компоненту напряженности электрического поля, параллельную вектору $\hat{\imath}'$. Единичный вектор $\hat{\imath}'$ определяется как
$$\hat{\imath}' = \hat{\imath}\cos\gamma + \hat{\jmath}\sin\gamma$$
- еще один линейный поляризатор (обозначен как II), расположенный между точками $z = b$ и $z = c$, который пропускает только компоненту напряженности электрического поля, параллельную вектору $\hat{\imath}$.

Таким образом, после прохождения поляризаторов восстанавливается начальная линейная поляризация луча 1. Считайте, что сами поляризаторы не вносят разности хода, и что они полностью прозрачны.

III.4.a. Запишите выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}_1(z = b)$ луча 1 в точке $z = b$ после его прохождения через первый поляризатор.
III.4.b. Запишите выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}_1(z = c)$ луча 1 в точке $z = $ c после его прохождения через второй поляризатор.
III.4.c. Чему равна разность фаз $\alpha$ между лучами 1 и 2 при их прохождении через щели? **[2.0 балла]**

Наиболее общим видом поляризации является эллиптическая поляризация. Обычно эллиптическую поляризацию описывают в виде суперпозиции двух ортогональных линейных поляризаций, то есть

$$\vec{E} = \hat{\imath}' E_0 \cos e \cos(\omega t) + \hat{\jmath}' E_0 \sin e \sin(\omega t), \qquad (3)$$

где единичные векторы $\hat{\imath}'$, $\hat{\jmath}'$ и данная поляризация показаны на рис. 3.

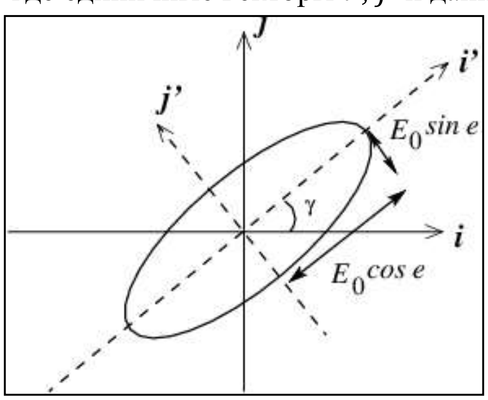



Рисунок 3

В этом случае конец вектора напряженности электрического поля волны с течением времени описывает эллипс. Величина $e$ называется эллиптичностью и определяется как:

$$\tan e = \frac{\text{Меньшая полуось эллипса}}{\text{Большая полуось эллипса}}$$

Линейная поляризация (уравнение (1)) и круговая поляризация (уравнение (2)) являются частными случаями эллиптической поляризации (уравнение (3)). Два параметра: $\gamma (\in [0, \pi])$ и $e \left(\in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right)$ полностью определяют состояние эллиптической поляризации.

Состояние поляризации также может быть представлено точкой на сфере единичного радиуса, которая называется сферой Пуанкаре. Поляризация, описанная уравнением (3), представлена точкой $P$ на сфере Пуанкаре (см. рис. 4), широта $\angle PCD = 2e$ и долгота $\angle ACD = 2\gamma$. Здесь $C$ – центр сферы.

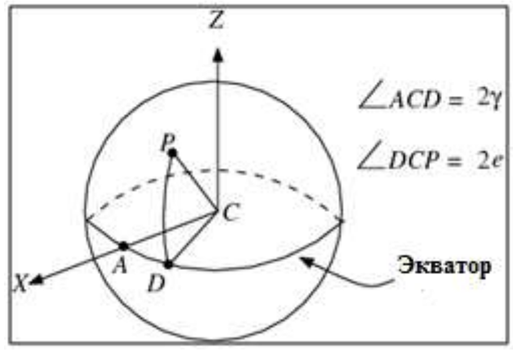



Рисунок 4

III.5. Рассмотрим точку на экваторе сферы Пуанкаре.

**III.5.a.** Запишите выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}_{\mathrm{Eq}}$, соответствующее этой точке.

**III.5.b.** Какой вид поляризация волны соответствующей этой точке?

**[0.5 балла]**

III.6. Рассмотрим точку на северном полюсе сферы Пуанкаре.

**III.6.a**. Запишите выражение для напряженности электрического поля $\vec{E}_{\mathrm{N}P}$, соответствующее этой точке.

**III.6.b**. Какой вид поляризация волны соответствующей этой точке? **[0.5 балла]**

III.7. Теперь рассмотрим три состояния поляризации луча 1, описанные в пункте III.4. Пусть начальная поляризация луча (при $z = 0$) соответствует некоторой точке $A_1$ на сфере Пуанкаре. После прохождения лучом пластинки ЧДВ, состояние его поляризации (при $z = a$) представляется другой точкой $A_2$. После первого поляризатора (при $z = b$), состояние поляризации соответствует точке $A_3$. А при $z = c$ поляризация возвращается в начальное состояние, которое представляется опять точкой $A_1$. Укажите точки $A_1, A_2$, и $A_3$ на сфере Пуанкаре.

**[1.5 балла]**

III.8. Если три точки $A_1, A_2$, и $A_3$ из пункта III.7 соединить на сфере дугами больших кругов, то на поверхности сферы получится криволинейный треугольник. (Большим кругом называется круг, центр которого совпадает с центром сферы). Разность фаз $\alpha$, полученная в пункте III.4, и площадь $S$ построенного криволинейного треугольника на сфере связаны друг с другом. Выразите $S$ через $\alpha$. Эта зависимость была получена Панчаратнамом и называется фазой Панчаратнама.

**[1.5 балла]**