

Задача 1: Парадокс Шокли-Джеймса

В 1905 году Альберт Эйнштейн предложил специальную теорию относительности, которая разрешила противоречия между классической механикой Ньютона и теорией электромагнетизма Максвелла. Детальная разработка теории привела к разрешению многих очевидных парадоксов. В то время, обсуждение сосредоточилось главным образом на проблеме распространения электромагнитных волн.

В этой задаче мы разрешим парадокс другого типа. Для довольно простой системы зарядов, рассмотренной В. Шокли и Р.П. Джеймсом в 1967 году, выполнение закона сохранения импульса требует тщательного релятивистского анализа. Если заряженная частица расположена около магнита с изменяющейся намагниченностью (то есть изменяющимся магнитным полем), то на заряд действует электрическая сила, но нет никакой очевидной противодействующей силы, приложенной к магниту. Процесс изменения намагниченности может быть сделан достаточно медленным, так что электромагнитным излучением (и уносимым им импульсом) можно пренебречь. Таким образом, мы получаем нечто вроде орудия без отдачи.

В нашем анализе достаточно простой системы мы продемонстрируем, что в релятивистской механике сложное тело может получить ненулевой момент импульса, оставаясь в то же время в состоянии покоя.

Часть I: Вычисление импульса точечной заряженной частицы (3.3 балла)

Рассмотрим круговой виток радиуса r , по которому течет ток I_1 , и второй, гораздо больший круговой виток радиуса $R \gg r$, концентрический с первым (то есть центры окружностей совпадают) и лежащий в той же самой плоскости.

- a. (1 б.) Ток I_2 , протекающий через виток 2 (больший виток), создает магнитный поток Φ_{B1} через виток 1. Найдите отношение $M_{21} = \Phi_{B1}/I_2$. Его называют коэффициентом взаимной индукции.
- b. (0.8 б.) Учитывая, что коэффициенты взаимной индукции равны $M_{12} = \Phi_{B2}/I_1 = M_{21}$, то есть виток 1 тоже создает пропорциональный магнитный поток через виток 2, получите выражение для ЭДС ε_2 , индуцированной в большей петле в результате изменения $\dot{I}_1 = dI_1/dt$ электрического тока в меньшей петле. Самоиндукцией большего витка 2 пренебречь. *Указание: индуцированная ЭДС скорости изменения магнитного потока через виток.*
- c. (0.5 б.) ЭДС индукции, найденная вами в пункте (b), появляется благодаря касательной к витку составляющей вихревого электрического поля. Получите выражение для этой касательной составляющей электрического поля E в витке радиуса R как функцию скорости изменения тока \dot{I}_1 .

Теперь удалим большой виток и вместо него рассмотрим массивный точечный заряд Q , расположенный на том же расстоянии R от витка 1, как показано в рисунке 1. Считайте, что точечный заряд не успевает значительно сместиться за время изменения тока в витке.

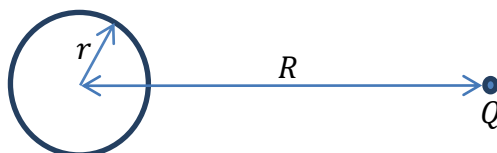


Рисунок 1: Круговой виток и точечный заряд Q .

- d. (1 б.) Найдите полный импульс Δp , полученный точечным зарядом за время, в течение которого ток в малом витке изменяется от начального значения $I_1 = I$ до конечного значения $I_2 = 0$.

Вторая часть: Вычисление импульса отдачи кругового витка с током (4.4 балла)

Исследуем происхождение импульса отдачи, используя петлю другой, не круглой формы.

- e. (1.1 б.) Для начала рассмотрим прямолинейный проводник длиной l и поперечным сечением A по которому протекает электрический ток силой I . Ток обусловлен потоком заряженных частиц с массой покоя m и зарядом q , распределенных однородно в проводнике с концентрацией n . Считайте, что заряженные частицы движутся в проводнике с одной и той же скоростью. Найдите полный релятивистский импульс p заряженных частиц в проводнике.
- f. (3.3 б.) Теперь рассмотрим квадратный виток со стороной l . На расстоянии $R \gg l$ от витка поместим точечный заряд Q ; см. рисунок 2. Пусть в витке течет ток I . Считайте, что каждый проводник в витке в целом нейтрален. Считайте, что носители заряда в проводнике могут двигаться свободно вдоль витка не взаимодействуя с кристаллической решеткой, а сталкиваясь упруго со стенками проводника и делая таким образом повороты в углах витка. Взаимодействием между носителями заряда полностью пренебречь. Предположим также, что все носители заряда в каждой стороне витка всегда движутся с одной и той же скоростью. Петля достаточно тяжела, так что ее движением можно пренебречь. Вычислите полный импульс p_{hid} носителей в витке. Его называют «скрытым» импульсом.

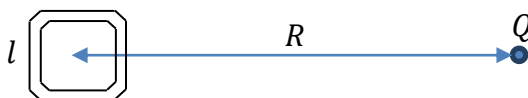


Рисунок 2: Квадратный виток с током и точечный заряд Q .

Когда ток прекращается, то этот «скрытый» импульс передается витку, и он получает импульс, равный со знаком минус импульсу, приобретенному точечным зарядом Q . Это и есть недостающая отдача, которую мы искали (заметьте, что в начальном состоянии импульс также сосредоточен в электромагнитном поле; что важно для выполнения закона сохранения импульса всей системы).

Часть III: Подведение итогов (2.3 балла)

- g. (0.8 б.) Виток с током часто характеризуются магнитным моментом $\mu = IS$, где I есть ток и S есть площадь поперечного сечения витка. Выразите ответ, полученный в пункте (d) через μ, r, R и Q . Аналогично, выразите полученный в пункте (f) ответ через μ, l, R и Q . Помните, что электрические и магнитные постоянные связаны соотношением:

$$\frac{4\pi k}{\mu_0} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

где c скорость света.

- h. (1.5 б.) В более реалистической модели, виток – это проводник, так что электрическое поле заряженной частицы Q не может в него проникнуть. Предположим, что электрический ток по прежнему обусловлен носителями заряда. Определите, какое из следующих утверждений правдиво или ложно, и обведите кружком правильный ответ в Листе Ответа. **Внимание: Вы можете оставить какое-то утверждение без ответа, но если Вы дадите хотя бы один неправильный ответ, то Вы не получите никаких баллов за весь пункт (h).**

A. (0.5 б.) Полный импульс витка с током и носителями зарядов равен нулю.

B. (0.5 б.) Поскольку ток в витке изменяется от I до нуля, значит носители заряда в проводнике замедляются, что приводит к появлению индуцированного тока в самом витке. Из-за этих индуцированных токов заряженная частица Q не получает никакого импульса.

C. (0.5 б.) При изменении силы тока в витке от I до нуля, внешний точечный заряд вызывает перераспределение носителей заряда по сечению проводника, что приводит к появлению дополнительной электрической силы. Таким образом, виток получает импульс, найденный в пункте (f).

Задача 2: Скрипящая Дверь

Скрип очень распространен в повседневной жизни, и наблюдается при закрывании дверей, при письме мелом на доске, при игре на скрипке, при ходьбе в новой обуви и других явлениях. Здесь в Израиле, причины обуславливающие скрип, вызывают сильные землетрясения, повторяющиеся один раз в несколько десятилетий. Они происходят не далеко от Мертвого моря, чуть выше самого глубокого из известных разломов в земной коре.

Физический механизм скрипа кроется в различии между коэффициентом трения покоя и коэффициентом трения скольжения. В данной задаче мы изучим этот механизм применительно к открывающейся двери.

Первая часть: Простейшая модель (7.5 баллов)

Рассмотрите следующую систему (см. рисунок 1):

К телу массой m присоединена длинная идеальная пружина с коэффициентом жесткости k , другой конец которой тянут с постоянной скоростью u . Коэффициент трения покоя и коэффициент трения скольжения о поверхность равны μ_s и μ_k , причем $\mu_k < \mu_s$.

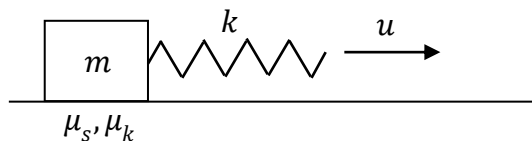


Рисунок 1: Простейшая модель для изучения скрипа

Эта простейшая модель допускает два различных режима движения:

1. Движение всегда сопровождается проскальзыванием. Назовем этот режим **чистым скольжением**.
 2. Движение, при котором происходит поочередная смена проскальзывания и покоя относительно поверхности. Это явление назовем **прерывистым скольжением**. Такое прерывистое скольжение является источником скрипящего звука, с которым мы часто сталкиваемся в повседневной жизни.
- a. (1 балл.) Рассмотрите случай, когда в начальный момент времени $t = 0$, тело тянут по полу со скоростью v_0 , и сила упругости пружины уравнивается силой трения скольжения. Принять, что $0 < v_0 < u$. При этом **удлинение пружины** будет периодически изменяться как функция времени t .
- a1. (0.6 баллов) Найдите период T_0 и амплитуду A этих колебаний.
 - a2. (0.4 балла) Изобразите качественно график зависимости удлинения пружины от времени $x(t)$ в интервале $0 < t < 3T_0$.
- b. (1.2 балла.) Рассмотрите другой случай, когда в начальный момент времени $t = 0$ тело находится в покое, а начальное удлинение пружины x , точно такое же, как в пункте (a). Изобразите качественный график зависимости скорости тела от времени $v(t)$ **относительно поверхности** в интервале $0 < t < 3T$, где T - новый период колебаний $x(t)$. Движение направо соответствует положительному знаку скорости v . Укажите на Вашем графике приблизительное положение горизонтальной линии $v = u$.

- с. (0.5 балла.) Для начальных условий пункта (b), найдите среднее по времени значение удлинения пружины \bar{x} за один период колебаний.
- d. (2.4 балла.) Для условий пункта (b), найдите период T колебаний $x(t)$.

Режим движения с **прерывистым скольжением** прекращается при достаточно больших значениях скорости u . Давайте рассмотрим один из возможных механизмов для объяснения этого явления.

- e. (2.4 балла.) Будем считать, что за каждый период колебаний T небольшое количество полной энергии колебаний рассеивается и переходит в тепло. Пусть $\eta = |\Delta A/A|$ есть относительная потеря амплитуды за один период при движении в режиме прерывистого скольжения. Полагая $\eta \ll 1$, найдите критическую скорость u_c , по достижении которой движение с **прерывистым скольжением** становится невозможным.

Затухание, рассмотренное в части (e), не надо учитывать во второй части этой задачи.

Вторая часть: Дверь со скрипом (2.5 балла)

Дверная петля представляет собой полый, открытый металлический цилиндр радиуса r , высотой h и толщиной стенок Δr . Нижнее основание цилиндра находится на металлической опоре, прикрепленной к стене (область контакта – это кольцо радиуса r и толщиной $\Delta r \ll r$) см. рисунок 2. Коэффициенты трения скольжения и трения покоя между цилиндром и его опорой равны соответственно μ_k и μ_s , причем $\mu_k < \mu_s$. Верхнее основание цилиндра жестко прикреплено к двери, которая считается абсолютно твердым телом. Обычно дверь висит на двух или трех петлях, но ее вес падает только на одну петлю – ту, которая и будет скрипеть. Цилиндр этой петли давит на свою металлическую опору с силой, равной весу всей двери, масса которой M .

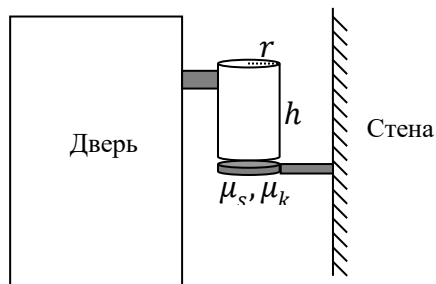


Рисунок 2: Схематический рисунок

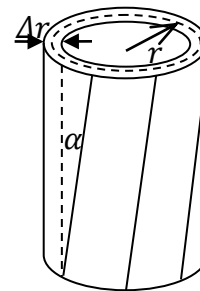


Рисунок 3: Деформированный цилиндр

Цилиндр самой петли не является абсолютно твердым телом, он подвергается деформации сдвига без изменения своей формы, так что вертикальные линейные сегменты становятся наклонными с некоторым маленьким углом α (см. рисунок 3). Сила упругости, действующая на элемент малой площади dS и обусловленная деформацией сдвига, определяется как:

$$dF = G\alpha dS,$$

где G - модуль сдвига (константа, характеризующая упругие свойства материала). Для расчетов используйте следующие значения $r = 5\text{мм}$, $h = 3\text{см}$, $\Delta r = 1\text{мм}$, $\mu_s = 0.75$. $\mu_k = 0.55$, $G = 8 \cdot 10^{10}\text{Па}$, $M = 30\text{кг}$, $g = 9.8\text{ м/с}^2$. Используйте приближение $\Delta r \ll r$.

- f. (1 балл.) Дверь начинают очень медленно поворачивать из состояния покоя. Для маленьких углов поворота двери, получите выражение для коэффициента кручения $\kappa = \tau/\theta$, где τ – вращающий момент, необходимый для поворота двери на угол θ .
- g. (1.5 балла.) При вращении двери с малой угловой скоростью происходит переход к режиму прерывистого трения, сопровождающийся испусканием звукового импульса – скрипа. Найдите угловую скорость Ω двери, при которой частота звука достигает слышимого диапазона с $f = 20\text{Гц}$. Считайте, что частота звуковых колебаний f_0 , возбуждаемых в стержне при самом скольжении велика, так что $f_0 \gg f$. Получите аналитический и численный результаты.

Задача 3: Воздушный шарик

На рисунке изображен длинный резиновый воздушный шарик, который популярен на вечеринках по случаю дней рождения. Частично надутый воздушный шар обычно разделяется на две цилиндрические области с сильно отличающимися радиусами. Используя простую модель, попробуем разобраться в причинах такого разделения.



Рисунок 1: частично надутый воздушный шарик

Воздушный шарик имеет форму однородного цилиндра (за исключением концов). Все процессы будем считать изотермическими и происходящими при комнатной температуре. Давление P в воздушном шарике превышает атмосферное давление P_0 на очень малую величину, так что воздух можно рассматривать как несжимаемую жидкость. Силой тяжести и весом воздушного шарика можно пренебречь. Процесс изменения объема воздушного шарика считайте медленным и квазистатическим. В частях (a) - (d) предполагается, что воздушный шарик надут всюду однородно по его длине. Обозначим как r_0 и L_0 начальные радиус и длину воздушного шарика до его надувания.

- a. (1.8 балла) Воздушный шарик удерживается за один из его концов, по которому поступает воздух, в то время как остальная часть шарика висит свободно. Вычислите отношение σ_L/σ_t между продольным «поверхностным» натяжением σ_L (в направлении, параллельном оси воздушного шарика) и поперечным «поверхностным» натяжением σ_t (в направлении, касательном к поперечному сечению воздушного шарика).

«Поверхностное» натяжение воздушного шарика – это сила, с которой соседние части воздушного шарика действуют друг на друга, отнесенная к единице длины границы между ними.

При малых растяжениях шарика справедлив линейный закон Гука. Будем считать, что длина воздушного шара остается постоянной и равной L_0 , в то время как «поверхностное» натяжение σ_t линейно зависит от изменения отношения r/r_0 :

$$\sigma_t = k \left(\frac{r}{r_0} - 1 \right) \quad (1)$$

- b. (1 балл) Используя формулу (1), получите выражение для зависимости давления P в воздушном шарике от его объема V . Изобразите (качественно) зависимость $P - P_0$ как функцию объема V . Исходя из закона Гука, найдите максимальное давление внутри воздушного шарика P_{max} .

В действительности отношение r/r_0 достаточно велико (см. рисунок 1), так что нужно учитывать нелинейное поведение резины и связанное с ним изменением длины воздушного шарика. Учет этих нелинейных свойств материала резины позволяет существенно уточнить формулу для давления внутри шарика, которое оказывается выше, чем результат, полученный в пункте (b). В реальном воздушном шарике график зависимости $\sigma_t(r)$ от радиуса шарика состоит из трех частей:

1. Для малых изменений r , $\sigma_t(r)$ растет по закону Гука.
2. При $r - r_0 \sim r_0$, длина воздушного шара L начинает увеличиваться, и $\sigma_t(r)$ приближается к насыщению, то есть растет очень медленно.

3. При больших значениях r резина начинает сильно сопротивляться дальнейшему растяжению, что приводит к резкому росту $\sigma_t(r)$.

Описанная выше зависимость показана на рисунке 2.

с. (1.3 балла.) Изобразите качественно график зависимости разности давлений $P - P_0$ как функцию объема V однородно надутого воздушного шара, материал резины которого ведет себя согласно рисунку 2. Укажите точки экстремумов на графике, на том же графике укажите точки, соответствующие значениям $r = 1$ см и $r = 2.5$ см. Вычислите разность давлений $P - P_0$ для этих двух значений радиуса с 10%-ой точностью.

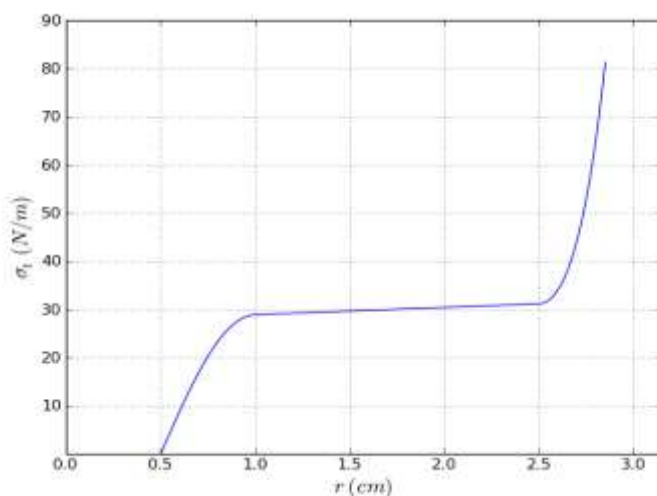


Рисунок 2: Натяжение $\sigma_t(r)$ реального шарика

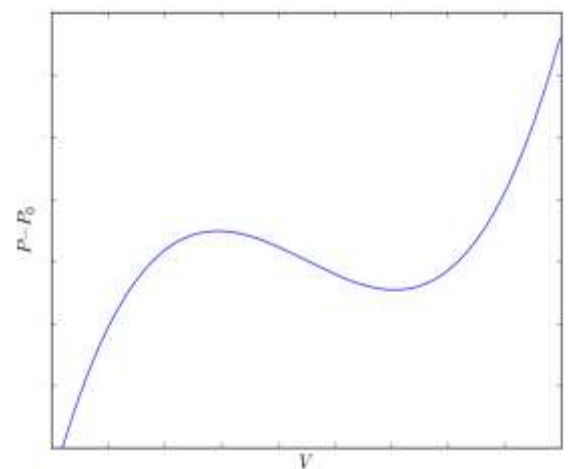


Рисунок 3: Зависимость (2).

Нелинейное поведение материала резины, исследованное в пункте (с), приводит к тому, что зависимость разности давлений $P - P_0$ внутри воздушного шарика от его объема V аппроксимируется следующей кубической зависимостью:

$$P - P_0 = a((V - u)^3 - b(V - u) + c) \quad (2)$$

где a, b, c и u – положительные константы. Пусть объем u больше, чем объем не надутого воздушного шара V_0 , а c принимает такие значения, при которых функция (2) положительна для всех $V > V_0$. См. рисунок (3).

Воздушный шарик соединен с большим воздушным резервуаром, в котором может поддерживаться контролируемое насосом давление P . Может случиться так, что некоторым значениям давления P соответствуют несколько равновесных значений V . Если воздушный шарик, находящийся в равновесии, испытывает случайные возмущения (такие как локальное растяжение внешними силами), то он может перейти в другое равновесное состояние с отличным объемом. Такой переход возможен, только если он будет энергетически выгодным для всей системы, состоящей из воздушного шарика, атмосферы и насоса, поддерживающего давление P . Пусть давление медленно увеличивается от значения P_0 , и на каждом шаге существуют достаточные возмущения. Тогда резкое увеличение объема шарика может произойти только по достижении критического давления P_c , при котором полная энергия, необходимая для перехода между

двумя равновесными состояниями равна нулю. Выше этого критического давления, переход от меньшего объема к большему, сопровождается выделением энергии и наоборот. Такие резкие переходы часто встречаются в природе, и иногда называются фазовыми переходами.

- d. (2.3 балла) Используя зависимость (2), получите выражения для P_c , объема V_1 воздушного шарика перед скачком и объема V_2 после скачка. Выразите ответы через a, b, c и u .

В реальности мальчик на дне рождения неспособен подавать достаточно воздуха для мгновенного изменения объема воздушного шарика, описанного выше. Вместо этого воздух накачивается в воздушный шарик постепенно, эффективно контролируя увеличение объема воздушного шара, а не давление в нем. В этом случае становится возможным новый тип поведения шарика. Если сложится ситуация благоприятная для минимизации полной энергии системы, то воздушный шарик разделится на две цилиндрические области с различными радиусами, длины которых будут постепенно изменяться. Энергией границы раздела можно пренебречь. Мы также пренебрежем длиной пограничного слоя (эти предположения действительны для очень длинного воздушного шара).

- e. (1 балл) Изобразите качественный график зависимости разности давлений $P - P_0$ от объема V , учитывая разделение объема шарика на две части. Укажите на осях давление $P_c - P_0$ и объемы V_1 и V_2 .
- f. (1.4 балла) Пусть шарик находится в условиях, при которых возможно его разделение на две цилиндрические области различных радиусов. Найдите длину L_{thin} более тонкой области как функция полного объема воздушного шара V . Выразите свой ответ через V_1, V_2 и радиус r_1 более тонкой области.
- g. (1.2 балла) Пусть шарик опять находится в условиях, при которых возможно его разделение на две цилиндрические области различных радиусов. Найдите удельную работу $\Delta W / \Delta L_{thin}$, которую необходимо совершить, чтобы преобразовать единицу длины тонкой области в толстую область. Выразите свой ответ через P_c, V_1, V_2 и радиус r_1 более тонкой области.