[9-10 классы] Решения IV олимпиады Symmetrix

Все задачи оцениваются в 7 баллов. Схемы-оценивания описаны под решением к каждой задаче.

1. **Условие:** В строю стоят 2020 человек, одного из которых зовут Артур. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжет. Каждый, кроме Артура сказал: “Между мной и Артуром ровно 2 лжеца.” Сколько лжецов могло быть в строю, если Артур — рыцарь?

   Ответ: 2, 3 или 4.

   Решение: Те, кто стоят рядом с Артуром, и те, кто стоят через одного человека от него, заведомо врут. Поэтому тот, между кем и Артуром стоят ровно два человека, – рыцарь. Перебирая по очереди каждого стоящего за этим рыцарем, (удаляясь от Артура), убеждаемся, что все они – также рыцари. Заметим теперь, что количество людей, стоящих в шеренге рядом с Артуром или через одного человека от него, может быть различным. Их может быть:
   1) двое, если Артур – крайний в шеренге;
   2) трое, если Артур – второй с краю;
   3) четверо во всех остальных случаях.

   Марк-схема:
   - Полностью рассмотрены все случаи — 7 баллов
   - Рассмотрены 2 случая — 3 балла
   - Рассмотрен 1 случай — 2 балла
   - Дан ответ без пояснений — 0 баллов

2. **Условие:** В вазе 1917 конфет. Согласно этикету: 1) нельзя брать больше 7 конфет за раз; 2) если в вазе еще есть конфеты, ты обязан взять хотя бы одну; 3) если после тебя ваза оказалась пуста, то это не вежливо. Гоша и Арман берут конфеты по очереди, начинает Гоша. Кто из них сможет остаться вежливым?

   Решение: Начнем рассуждать с конца. Если перед твоим ходом осталась 1 конфета, то ты вынужден быть невежливым - назовем число 1 невыгодным. Таким образом числа от 2 до 8 становятся выгодными, так как из них на своем ходу можно поставить другого человека в невыгодное положение. Далее понимаем, что 9 - тоже невыгодное число, так как оттуда мы любым своим ходом ходом оставляем для другого выгодное число. Продолжая подобные рассуждения мы поймем, что числа вида $8k + 1$ невыгодные. Так как 1917 дает остаток 5 при делении на 8, значит оно выгодное и Гоша сможет остаться вежливым (что не так то вежливо с его стороны).

Марк-схема:

- Полное решение (любым способом) — 7 баллов
  i. Корректные рассуждения, но допущена арифметическая ошибка — штраф 1 балл
- Рассмотрение выгодных/невыгодных позиций — 3 балла
- Любая другая попытка применения рассуждений с конца — 2 балла

3. **Условие:** У Тогжан и Асылбека есть по целому количеству тысяч тенге. Тогжан говорит Асылбеку: “Если ты дашь мне 3000 тенге, то у меня будет в *n* раз больше денег, чем у тебя.” На это Асылбек отвечает: “Если ты мне дашь *n* тысяч тенге, то у меня будет в 3 раза больше денег, чем у тебя.” Сколько денег у Асылбека и Тогжан?

Решение: Пусть *a, t* — количество денег которое имеется у Асылбека и Тогжан соответственно. Из условия следуют два равенства:
$t + 3000 = n \cdot (a - 3000)$;
$a + 1000 \cdot n = 3 \cdot (t - 1000 \cdot n)$.

Так как *n* - натуральное число, то:

i) $t + 3000 \geq a - 3000$, откуда $t + 6000 \geq a$ (1);
ii) $a + 1000 \cdot n > 0$, откуда $t - 1000 \cdot n > 0$, а значит $t > 1000 \cdot n$ (2).

Из (1) следует, что $t + 6000 + 1000 \cdot n \geq a + 1000 \cdot n = 3 \cdot (t - 1000 \cdot n)$, откуда $2000 \cdot n + 3000 \geq t$ (3).

Из (3) и (2) следует, что $2000 \cdot n + 6000 \geq t + 3000 > 1000 \cdot n + 3000$.
Заменяя $t + 3000$ на $n \cdot (a - 3000)$ (первое уравнение системы), получим
$2000 \cdot n + 6000 \geq n \cdot (a - 3000) > 1000 \cdot n + 3000$, откуда
$6000 \geq n \cdot (a - 5000) > 3000 - 1000 \cdot n$ (4).

Из *правой части* (4) следует, что $a > 4000 + 3000/n$. Так как *n* - натуральное число, и по условию число *a* - “целое количество тысяч”, то $a \geq 5000$.
Из *левой части* (4) следует, что $a \leq 5000 + 6000/n$. Так как *n* - натуральное число, то $a \leq 11000$.

Таким образом, $5000 \leq a \leq 11000$, то есть возможны варианты
$a = 5000$, $a = 6000$, ... $a = 11000$. Подставляя их в изначальную систему уравнений и помня о том, что *a* - натуральное а *t* - целое количество тысяч, получим следующие варианты:

$a = 5000$, $t = 11000$, $n = 7$
$a = 6000$, $t = 6000$, $n = 3$
$a = 7000$, $t = 5000$, $n = 2$
$a = 11000$, $t = 5000$, $n = 1$

Марк-схема:

- Полное корректное решение (любым способом) — 7 баллов
  1. За каждый пропущенный случай — штраф 1 балл
  2. Допущена арифметическая ошибка, не имеющая принципиального влияния на ход решения — штраф 1 балл (но не более 1)
- Получена оценка $a \le 11000$ — 4 балла
  1. получен 1 ответ — +0 баллов
  2. получено 2 ответа — +1 балл
  3. получено 3 ответа — +2 балла
  4. получено 4 ответа — +3 балла
- Составлена система уравнений, аналогичная системе из решения — 1 балл

Примечания:

i) Данную задачу можно было бы решить и без оценки $a \ge 5000$. Тогда пришлось бы перебрать всего 5 дополнительных вариантов. Поэтому за эту оценку частичных баллов не дается.
ii) Частичные баллы за ответы даются только при наличии оценки $a \le 11000$.

4. **Условие:** Группа из N человек отправилась в поход на N ночей. Каждую ночь дежурят ровно 3 человека. Каково самое большое возможное значение N, если известно, что любая пара людей дежурила вместе хотя бы в одну ночь?

Решение: Всего есть $C_n^2 = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ различных пар людей, каждая из которых должна дежурить вместе. Каждую ночь задействованы какие-то 3 из них: итого $3n$ пар. Так как в этих $3n$ парах есть хотя бы по одной из всех различных, получаем $3n \ge \frac{n \cdot (n-1)}{2} \Rightarrow n \le 7$.
Пример для расписания дежурств при $n = 7$: 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356. Разные цифры обозначают разных людей.

Марк-схема:

- Полное корректное решение (любым способом) — 7 баллов
- Оценка $n \le 7$ без примера — 4 балла
- Ответ с примером — 2 балла

- Ответ без примера — 0 баллов

5. **Условие:** Все точки плоскости с целочисленными координатами окрашены в красный или зеленый цвет. Докажите, что найдется одноцветный прямоугольник с вершинами в окрашенных точках.

   Решение: Возьмём три вертикальные прямые и девять горизонтальных. Будем рассматривать только точки пересечения этих прямых. Так как имеется лишь $2^3 = 8$ вариантов раскраски трёх точек в два цвета, то найдутся две горизонтальные прямые, на которых лежат одинаково раскрашенные тройки точек. Среди трёх точек, раскрашенных в два цвета, найдутся две одинаково раскрашенные точки. Вертикальные прямые, проходящие через эти точки, вместе с ранее выбранными двумя горизонтальными являются искомыми.

   Марк-схема:
   - Полное решение (любым способом) — 7 баллов
   - Любое упоминание принципа Дирихле — 2 балла