Решения и Маркинг Схема III Контеста Symmetrix

Задача №1. В каждой клетке полоски длины 100 стоит по фишке. Можно за 1 рубль поменять местами любые две соседние фишки, а также можно бесплатно поменять местами любые две фишки, между которыми стоят ровно три фишки. За какое наименьшее количество рублей можно переставить фишки в обратном порядке?

Решение. *Оценка.* Каждая фишка должна поменять чётность своего номера. Бесплатная операция не меняет чётность, а платная меняет её у двух фишек. Поэтому потребуется хотя бы 50 рублей.

Пример. Занумеруем фишки по порядку числами от 0 до 99. Покрасим клетки в четыре цвета: $abcdabcd\dots d$. Бесплатная операция меняет фишки в соседних одноцветных клетках. Поэтому в клетках одного цвета фишки можно бесплатно переставить в любом порядке. Поменяем фишки во всех парах bc и da — это 49 платных операций. В клетках цвета b и c фишки уже можно расставить нужным образом бесплатно. В клетках цвета a и d сделаем так, чтобы фишки 0 и 99 встали рядом. Поменяем их последней платной операцией и дорасставим все фишки в нужном порядке.

Схема оценивания.

- Показана и обоснована оценка – 2 балла
- Правильно приведен пример – 3 балла

Задача №2. Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 < b$ и $b^2 < c$ и $c^2 < a$. Докажите, что все три числа a, b и c меньше 1.

Решение. Докажем, от противного. Пусть $a \geq 1$. Тогда $b > a^2 \geq 1$. Значит, $b > 1$ и $b^2 > b > 1$ Тогда из условия можно понять, что $\ > b^2 > 1$. Значит, $\ > 1$ и $^2 > c$. Тогда можем получить такую цепочку неравенств

$$a > c^2 > c > b^2 > b > a^2 \geq a$$

то есть $a > a$. Противоречие. Значит, нет среди a, b и c нет чисел больше или равных 1.

Схема оценивания.

- Доказано, что если одно из трех чисел хотя бы 1, то все три хотя бы 1 — 3 балла.

Задача №3. Пусть I - центр вписаной окружности треугольника, в котором $\angle BAC = 60°$, а прямые BI и CI пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках X и Y соответственно. Докажите, что треугольники YAX и BIC равны.

Решение. BI является биссектрисой $\angle ABC$, так как I центр вписаной окружности. Значит X является серединной дуги AC, так как X это точка пересечения биссектрисы угла и описаной окружности. Тогда по лемме о трезубце получаем, что

$$AX = IX = CX$$

Рассмотрим треугольник CXI, он равнобедренный, так как $IX = CX$. Также $\angle CXI = \angle CAB = 60°$, как вписаные. Следовательно треугольник CXI является равностороним. Тогда

$$AX = IX = CX = CI(*)$$

Аналогично, по лемме о трезубце для CI получим, что

$$AY = IY = BY = BI(**)$$

$AX = IX$, $AY = IY$ и XY - общая сторона $\rightarrow$ треугольник AXY и IXY равны по трем сторонам. Тогда $\angle XAY = \angle XIY = \angle CIB$(как вертикальные) Из $(*)$ и $(**)$ мы знаем, что $AX = CI$ и $AY = BI$. Также мы доказали, что $\angle XAY = \angle CIB \rightarrow$ треугольник YAX равен треугольнику BIC по двум сторону и углу между ними.

Схема оценивания.

- Получено $(*)$ и $(**)$ — 1 балл.
- Получено, что $\angle XAY = \angle CIB$ — 1 балл.

Задача №4. Определите все $m, n \in \mathbb{N}$ и $p \in \mathbb{P}$, такие что

$$(m^3 + n)(m + n^3) = p^3$$

Ответ: $m, n = 1, 2, 2, 1$

Решение. Без ограничения общности пусть $m \geq n$. Очевидно, что $m = n$, иначе куб простого числа будет равен квадрату другого чилса. Получаем, что $m^3 + n = p^2$, а также $n^3 + m = p$. Из этого следует $m = p - n^3$, тогда $-n^9 + n = (p - n^3)^3 + n = p^2 \equiv 0 \pmod p$. Тогда $-n(n-1)(n+1)(n^2+1)(n^4+1) \equiv \pmod p$.

- Если $p|n$, $p|n-1$, $p|n+1$, или $p|n^2+1$ тогда $n^2 + 1 \geq p = n^3 + m > n^3$, из чего следует, что $n = 1$
- Если $p|n^4 + 1$, тогда $p|n(n^3 + m) - (n^4 + 1) = mn - 1$. Стоить заметить, что тогда $m^2 \geq mn > mn - 1 \geq p = m^3 + n$. Противоречие.

Если $n = 1$, тогда $m + 1 = p$. Из чего следует, что $m^3 + 1 = (m+1)(m^2 - m + 1) = p(m^2 - m + 1) = p^2$. Получаем $m^2 - m + 1 = m + 1$ или $m = 2$.

Схема оценивания.

- Доказательство того, что $p|n^9 - n$ – 1 балл
- Рассмотрение случая когда $p|n$, $p|n-1$, $p|n+1$, или $p|n^2+1$ – 1 балл
- Рассмотрение случая когда $p|n^4 + 1$ – 2 балла