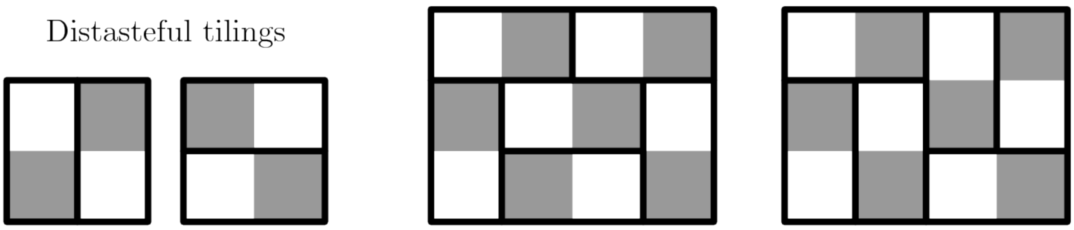
Третий контест Symmetrix: Старшая Лига

1. Даны две окружности ω_1 и ω_2 пересекающиеся в точках X и Y. Пусть ℓ_1 – это прямая, которая проходит через центр ω_1 и пересекает ω_2 в точках P и Q, и ℓ_2 – это прямая, которая проходит через центр ω_2 и пересекает ω_1 в точках S и R, Докажите, что если точки P, Q, R и S лежат на одной окружности, то центр этой окружности находится на прямой XY.

2. Пусть n – положительное целое число. Найдите размер наибольшего подмножества множества $\{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ не содержащее таких трёх элементов a, b, c (не обязательно различных), что $a+b+c=0$.

3. Мы определяем многоугольник шахматной доски как многоугольник, стороны которого расположены вдоль линий вида $x = a$ или $y = b$, где a и b – целые числа. Эти линии делят внутренность на единичные квадраты, которые попеременно окрашиваются в серый и белый цвета, так что соседние квадраты имеют разные цвета. Чтобы выложить многоугольник на шахматной доске с помощью домино, нужно точно покрыть многоугольник неперекрывающимися прямоугольниками размером 1×2. Наконец, стильная мозаика – это та, которая позволяет избежать двух конфигураций домино, показанных слева внизу. Показаны две мозаики прямоугольника размером 3×4; первый выполнен стильно, а второй – нет, из-за вертикальных домино в правом верхнем углу.



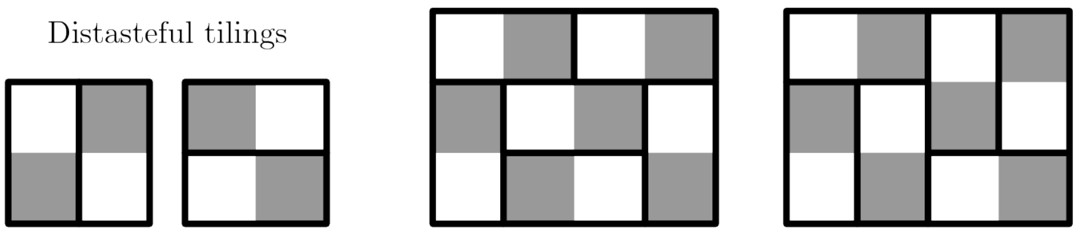
а) Докажите, что если многоугольник шахматной доски можно разложить с помощью домино, то это можно сделать стильно.
б) Докажите, что такая стильная мозаика уникальна.

Third Symmetrix Contest: Senior League

4. Given circles ω_1 and ω_2 intersecting at points X and Y, let ℓ_1 be a line through the center of ω_1 intersecting ω_2 at points P and Q and let ℓ_2 be a line through the center of ω_2 intersecting ω_1 at points R and S. Prove that if P, Q, R and S lie on a circle then the center of this circle lies on line XY.

5. Let n be a positive integer. Determine the size of the largest subset of $\{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ which does not contain three elements a, b, c (not necessarily distinct) satisfying $a + b + c = 0$.

6. We define a chessboard polygon to be a polygon whose sides are situated along lines of the form $x = a$ or $y = b$, where a and b are integers. These lines divide the interior into unit squares, which are shaded alternately grey and white so that adjacent squares have different colors. To tile a chessboard polygon by dominoes is to exactly cover the polygon by non-overlapping 1×2 rectangles. Finally, a tasteful tiling is one which avoids the two configurations of dominoes shown on the left below. Two tilings of a 3×4 rectangle are shown; the first one is tasteful, while the second is not, due to the vertical dominoes in the upper right corner.



a) Prove that if a chessboard polygon can be tiled by dominoes, then it can be done so tastefully.
b) Prove that such a tasteful tiling is unique.