Второй контест Symmetrix: Младшая Лига

1. Найдите квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, если $(x^2 + 3x + 2)\,P(x) + 9x + 10 = 2x^4 + 9x^3 + 8x^2$.

2. На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

3. Про некоторые натуральные числа a и b известно, что

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N}$$

Докажите, что

$$a + b \geq \gcd(a, b)$$

$\gcd(a, b)$ – обозначает наибольший общий делитель чисел с.

4. В остроугольном треугольнике ABC известно, что $AH = AO$, где H – ортоцентр, O – центр описаной окружности треугольника ABC. Какие значения может принимать $\angle BAC$?

Symmetrix Екінші Контесті: Жастар лигасы

1. Квадраттық үшмүшелік $P(x) = ax^2 + bx + c$ табыңыз, егер $(x^2 + 3x + 2)\,P(x) + 9x + 10 = 2x^4 + 9x^3 + 8x^2$.

2. Аспанда шексіз жұлдыздар бар. Астроном әр жұлдызға жарықтық пен мөлшерді білдіретін натурал сандар жұбын жатқызды. Бұл жағдайда әр екі жұлдыз кем дегенде бір параметрде ерекшеленеді. Екі жұлдыз бар екенін дәлелдеңіз, олардың біріншісі жарықтық жағынан да, өлшемі бойынша да екіншіден кем емес.

3. a және b натурал сандар туралы белгілі

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a} \in \mathbb{N}$$

Дәлелдеңіз

$$a + b \geq \gcd(a, b)$$

$\gcd(a, b)$ – a мен b саңдарының ең үлкен ортақ бөлінгіші.

4. Өткір бұрышты ABC үшбұрышында $AH = AO$ белгілі, мұндағы H – ортоцентр, O – ABC үшбұрышының сипатталған шеңберінің орталығы. $\angle BAC$ бұрышы қандай мәндерді қабылдай алады?