# Решения и Маркинг Схема Первого Контеста Symmetrix

**Задача №1.** Найдите квадратный трёхчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$, если $(x^2 + 3x + 2)\,P(x) + 9x + 10 = 2x^4 + 9x^3 + 8x^2$.

**Решение.** Рассмотрим

$$(x^2 + 3x + 2)P(x) + 9x + 10 = 2x^4 + 9x^3 + 8x^2$$

$$(x^2 + 3x + 2)P(x) = 2x^4 + 9x^3 + 8x^2 - 9x - 10$$

Теперь разделяем соответствующие многочлены в столбик и получаем ответ

$$\begin{array}{rrrrr}
\big( & 2x^4 + 9x^3 + 8x^2 & -\, 9x - 10\big) : \big(x^2 + 3x + 2\big) = 2x^2 + 3x - 5 \\
 & -\,2x^4 - 6x^3 - 4x^2 & \\
\hline
 & 3x^3 + 4x^2 & -\,9x \\
 & -\,3x^3 - 9x^2 & -\,6x \\
\hline
 & & -\,5x^2 - 15x - 10 \\
 & & 5x^2 + 15x + 10 \\
\hline
 & & 0
\end{array}$$

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

**Схема оценивания.**

- Ответ без решения – 3 балла
- Правильный способ доказательства с арифметической ошибкой – 3 балла

**Задача №2.** На небе бесконечное число звёзд. Астроном приписал каждой звезде пару натуральных чисел, выражающую яркость и размер. При этом каждые две звезды отличаются хотя бы в одном параметре. Докажите, что найдутся две звезды, первая из которых не меньше второй как по яркости, так и по размеру.

**Решение**. Докажем, что хотя бы один из параметров принимает бесконечное число значений. Докажем это от обратного, допустим, что оба параметра принимают только конечное число значений, тогда кол-во всевозможных звезд равно произведению кол-ва значений, которая принимает яркость, и кол-ва значений, которая принимает размер. То есть кол-во различных звезд конечное число, однако их должно быть бесконечное кол-во, противоречие. Пусть это размер. Заметим, что обязательно существует звезда с наименьшей яркостью, так как параметр яркости принимает только натуральные значения. Пусть это звезда A. Пусть размер звезды A выражается числом n. Поскольку размер принимает бесконечное количество значений, найдётся звезда B размера больше n. Она не уступает звезде A ни по яркости, ни по размеру.

**Схема оценивания.**

- Замечание, что один из параметров принимает бесконечно большие значения — 1 балл.
- Доказано, что существует звезда с наименьшей яркостью/размером — 1 балл.

**Задача №3.** Про некоторые натуральные числа $a$ и $b$ известно, что

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}\in\mathbb{N}$$

Докажите, что

$$a+b\geq \gcd(a,b)^2$$

$\gcd(a,b)$ – обозначает наибольший общий делитель чисел $a$ и $b$.

**Решение.** Пусть $\gcd(a,b)=d$, тогда $a=a_1d$ и $b=a_1d$, где $a_1$, $b_1$ - взаимно-простые натуральные числа. Тогда

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a_1d+1}{b_1d}+\frac{b_1d+1}{a_1d}=\frac{a_1^2d+a_1+b_1^2+b_1}{a_1b_1d}\in\mathbb{N}$$

То есть

$$a_1^2d+a_1+b_1^2d+b_1 \,\vdots\, a_1b_1d$$

Из чего следует,

$$a_1^2d+a_1+b_1^2d+b_1 \,\vdots\, d$$

Поэтому

$$a_1^2d+a_1+b_1^2d+b_1\equiv a_1+b_1 \pmod d$$

Следовательно

$$a_1+b_1 \,\vdots\, d(\ast)$$

Тогда

$$a_1+b_1\geq d$$

Используя $(\ast)$ получаем, что

$$a+b=(a_1+b_1)d\geq d*d=d^2=\gcd(a,b)^2$$

**Схема оценивания.**

- Получено $(\ast)$ — 3 балла.

**Задача №4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ известно, что $AH=AO$, где $H$ – ортоцентр, $O$ – центр описаной окружности треугольника $ABC$. Какие значения может принимать $\angle BAC$?

**Ответ:** $\angle BAC=60^\circ$

**Решение.** Пусть $BH$ пересекается с $AC$ в точке $N$. Пусть $\angle ACB=\gamma$. Тогда $\angle CAH=90^\circ-\gamma$.

$\angle AOB=2\angle ACB=2\gamma$, так как $\angle AOB$ центральный угол, а $\angle ACB$ вписаный угол на дуге $AB$. Тогда

$$\angle OAB=\frac{180^\circ-\angle AOB}{2}=90-\gamma$$

Следовательно

$$\angle CAH=\angle OAB$$

Также

$$\angle NHA=\angle MOA=90^\circ-\angle CAH$$

Из условия известно, что

$$AH = AO$$

Тогда треугольники $NHA$ и $MOA$ равны по стороне и двум углам. Следовательно $AN = AM$, что в свою очередь равно $\frac{AB}{2}$. Значит

$$AN = \frac{AB}{2}$$

Тогда, так как $BHN$ это прямоугольный треугольник в котором катет в два раза меньше гипотенузы, то $\angle ABH = 30^\circ$. Осталось понять, что

$$\angle BAC = 90^\circ - \angle ABH = 60^\circ$$

**Схема оценивания.**

- Доказательство того, что $\angle CAH = \angle OAB$ – 1 балл
- Доказательство того, что треугольники $NHA$ и $MOA$ равны – 2 балла