Second Symmetrix Contest: Senior League

1. Let ABC be a triangle. A circle passing through A and B intersects segments AC and BC at D and E, respectively. Lines AB and DE intersect at F, while lines BD and CF intersect at M. Prove that $MF = MC$ if and only if $MB \cdot MD = MC^2$.

2. Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

3. At the vertices of a regular hexagon are written six nonnegative integers whose sum is 2003^{2003}. Bert is allowed to make moves of the following form: he may pick a vertex and replace the number written there by the absolute value of the difference between the numbers written at the two neighboring vertices. Prove that Bert can make a sequence of moves, after which the number 0 appears at all six vertices.

Второй контест Symmetrix: Старшая Лига

1. Пусть ABC – это треугольник. Окружность содержащая A и B пересекает отрезки AC и BC в точках D и E соответственно. Прямые AB и DE пересекаются в точке F, когда как прямые BD м CF пересекаются в точке M. Докажите, что $MF = MC$ тогда и только тогда когда $MB \cdot MD = MC^2$.

2. Пусть a, b, c положительные вещественные числа. Докажите, что

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

3. На вершинах правильного шестиугольника записаны 6 неотрицательных целых чисел с суммой 2003^{2003}. Николай на каждом своем ходу может выбрать вершину и заменить число написанное на ней на разность чисел расположенных на двух соседних вершинах. Докажите, что Николай может исполнить последовательность ходов так, что на всех вершинах будет написано 0.