Решения и Маркинг Схема Первого Контеста Symmetrix

Задача №1. На доске записаны числа $1, 2, 3, \cdots, 27$. За ход нужно стереть 3 некоторых числа a, b, c написанных на доске и записать вместо него число $a^3 + b^3 + c^3$. Докажите, что последнее оставшееся число не может быть равно 2020^3.

Первое решение. Пусть S_n - это сумма всех числе на n-ом ходу. Докажем то, что остаток S_n от деления на 3 - инвариант. И вправду $S_{n+1} \equiv S_n \pmod 3$ эквивалентно тому, что $a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c \pmod 3$. Последнее сравнение по модулю можно доказать либо с помощью малой Теоремы Ферма, либо с помощью банального наблюдения того, что $x^3 \equiv x \pmod 3$ верно для $x \equiv 0, 1, 2 \pmod 3$.
Заметим то, что $S_1 \equiv 1 + 2 + \cdots + 30 = 465 \equiv 0 \pmod 3$. Это означает то, что последнее число на доске должно тоже делиться на 3 в силу инварианта. Поэтому 2020^3 быть последним числом не может, ибо оно не делиться на 3.

Схема оценивания.

- Найден инварианта — 2 балла.
- Доказано, что $a^3 + b^3 + c^3 \equiv a + b + c \pmod 3$ — 1 балл.

Второе решение. Второе решение. Пусть P_n - это произведение чисел на n-ом шагу. Докажем то, что после каждого шага P увеличивается хотя бы в 3 раза. И вправду $P_{n+1} \geq 3P_n$ эквивалентно тому, что $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, что верно в силу неравенства о средних. Альтернативное доказательство могло выглядеть так:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) =$$

$$= \frac{(a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)}{2} \geq 0$$

Допустим, что финальное число могло оказаться 2020^3, тогда

$$2020^3 = P_{13} \geq 3^{13} P_0 = 3^{13} 27!$$

Это неравенство неверное, можно заметить то, что

$$3^{13} 27! \geq 27! \geq 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdots 27 \geq 10^{18} = (1000000)^3 \geq 2020^3$$

Схема оценивания.

- Доказано, что произведение возрастает — 3 балла.
- 1 балл за доказательство неравенства

Задача №2. Пусть X, Y - такие точки снаружи треугольника ABC, что углы $\angle AXB$ и $\angle AYC$ прямые, а также углы $\angle BAX$ и $\angle CAY$ равны. Причем X и C находятся по разные стороны от прямой AB, точно также как и B и Y находится по разные стороны от прямой AC Докажите, что точки X, Y равноудалены от середины отрезка BC.

Решение. Пусть M, N, K - середины сторон CB, BA, AC соответственно. Заметим то, что $NB = NA = NX$ и $KC = KA = KY$ в силу того, что $\angle AXB = 90°$ и $\angle AYC = 90°$ соответственно. Также $KM = NA = NB$ и $NM = KA = KC$ в силу теорема о средней линии. Далее

$$\angle XNM = \angle XNB + \angle MNB = 2\angle XAB + \angle CAB =$$

$$= 2\angle YAC + \angle CAB = \angle YKC + \angle CKM = \angle YKM$$

После чего мы можем заключить то, что треугольники XNM и MKY равны по двум сторонам и угла между ними. Отсюда можно получить то, что $XM = MY$

Схема оценивания.

- Обазначены середин сторон AB, BC, CA — 1 балл.
- Доказано, что $KM = XN$ и $MN = KY$ — 2 балла.
- Доказано, что $\angle XNM = \angle MKY$ — 2 балла.

Задача №3. Вычислить сумму

$$\frac{3}{1! + 2! + 3!} + \frac{4}{2! + 3! + 4!} + \ldots + \frac{2020}{2018! + 2019! + 2020!}$$

Решение. Заметим то, что

$$\frac{k}{k! + (k-1)! + (k-2)!} = \frac{k}{(k-2)!\,(1 + (k-1) + (k-1)k)} =$$

$$= \frac{k}{(k-2)!\,k^2} = \frac{1}{(k-2)!\,k} = \frac{k-1}{k!} = \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} =$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \text{ для любого натурального } k \geq 3 \ (*)$$

Получаем то, что

$$\sum_{i=3}^{2020} \frac{k}{k! + (k-1)! + (k-2)!} = \sum_{i=3}^{2020} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2020!}$$

Схема оценивания.

- Получено равенство $(*)$ — 3 балла.

Задача №4. На бесконечной плоскости пасутся 100 баранов и бродит один голодный казах. Бараны и казах ходят по очереди, сначала один баран, потом человек, затем снова один из баранов, после чего снова человек. Ход заключается в том, что ходящий может передвинуться не более чем на 1 метр в любом направлении. При любом ли изначальном расположении стада и человека на плоскости, казах сможет поймать и зарезать хотя бы одного барана?

Ответ: нет.

Решение. Рассмотрим 100 параллельных прямых таких, что расстояния между любыми двумя больше чем 2 метра. Расположим каждого из 100 баранов на свою прямую. Будем называть *зоной комфорта* барана окружность радиусов в один метр с центром в точке где находится баран. Заметим то, что если бараны будут двигаться исключительно вдоль своих прямых казах не сможет находиться в зоне комфорта одновременно двух баранов. Очевидно, что для того, чтобы съесть кого то из баранов, казаху нужно на своем ходу находиться в зоне комфорта какого то из баранов. Если после какого то хода казаха, казах залез в зону комфорта какого то барана, тогда этот баран в следующем ходу должен будет ускакать от него вдоль своей прямой в противоположным от казаха направлении. Если же казах не находиться ни в чьей зоне комфорта, бараны могут пропустить свой ход (пойти на 0 метров в любом направлении). Следуя этому алгоритму, казах никогда никого не догонит.

Схема оценивания.

- Доказательство того, что чтобы казаху поймать барана ему надо после какого то из ходов находится в зоне комфорта одновременно двух баранов, чтобы поймать хоть какую то, причем если такого момента не будет не один баран не будет пойман. - 2 балла.