Задача №1. Дано натуральное число n. Пусть $p, q > n$ — нечетные простые числа. Докажите, что все натуральные числа от 1 до n можно покрасить в два цвета так, чтобы для любых различных одноцветных чисел x, y число $(xy - 1)$ не делилось ни на p, ни на q.

Задача №2. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Некоторая окружность проходит через точки A и B, и пересекает боковые стороны AD и BC в точках E и F, соответственно. Отрезки AF и BE пересекаются в точке G, а описанные окружности треугольников ADG и BCG пересекаются во второй раз в точке H. Докажите, что если $DG = CG$, то H является точкой пересечения высот треугольника ABG.

Задача №3. Пусть $n > 1$ — целое число. В гостинице n номеров, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$; в i-м номере i комнат, при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Каждую неделю в гостиницу заезжает очередная группа из n семей; каждая семья заранее заявляет натуральное число — минимальное количество комнат в номере, которое ей необходимо. Перед каждым заездом, когда предыдущая группа выехала, портье подсчитывает количество A способов выдать каждой семье по отдельному номеру так, чтобы все их требования были выполнены. Затем он записывает число A в свою записную книжку. Докажите, что в записной книжке у портье есть не более 2^{n-1} различных ненулевых чисел.

Задача №4. Пусть $\{a_n\}_{n\geq 1}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Известно, что для любого n, a_n нельзя представить в виде $c_1 a_1 + \cdots + c_{n-1} a_{n-1}$, где $c_i \in \{0, 1\}$. Для натурального числа m, через $f(m)$ обозначим количество элементов последовательности $\{a_n\}_{n\geq 1}$, не превосходящих m. Для всех натуральных m и k докажите, что
$$f(m) \leq a_k + \frac{m}{k+1}.$$