Задачи

Задача №1. Внутри трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) выбрана точка M, а внутри треугольника BMC точка N так, что $AM \parallel CN$, $BM \parallel DN$. Докажите, что у треугольников ABN и CDM площади равны.

Задача №2. Дано натуральное n. В клетчатом квадрате $2n \times 2n$ каждая клетка покрашена в какой-то из $4n^2$ цветов (при этом некоторые цвета могли не использоваться). Доминошкой будем называть любой прямоугольник из двух клеток в нашем квадрате. Будем говорить, что доминошка *разноцветная*, если клетки в ней разных цветов. Пусть k — количество разноцветных доминошек среди всех доминошек в нашем квадрате. Пусть ℓ — наибольшее целое число такое, что в любом разрезании квадрата на доминошки найдётся хотя бы ℓ разноцветных доминошек. Найдите наибольшее возможное значение выражения $4\ell - k$ по всем возможным раскраскам квадрата.

Задача №3. Пусть p — простое число. Построим ориентированный граф на p вершинах, пронумерованных целыми числами от 0 до $p-1$. В графе проводится ребро из вершины x в вершину y тогда и только тогда, когда y равно остатку от деления на p числа x^2+1. Через $f(p)$ обозначим длину самого длинного ориентированного цикла в этом графе. Докажите, что $f(p)$ может принимать сколь угодно большие значения.

Задача №4. Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{Q}[x, y, z]$ — множество многочленов с рациональными коэффициентами от трёх переменных. Докажите, что для любого ненулевого многочлена $P \in \mathcal{M}$ существуют такие ненулевые многочлены $Q, R \in \mathcal{M}$, что

$$R(x^2y, y^2z, z^2x) = P(x, y, z)Q(x, y, z).$$