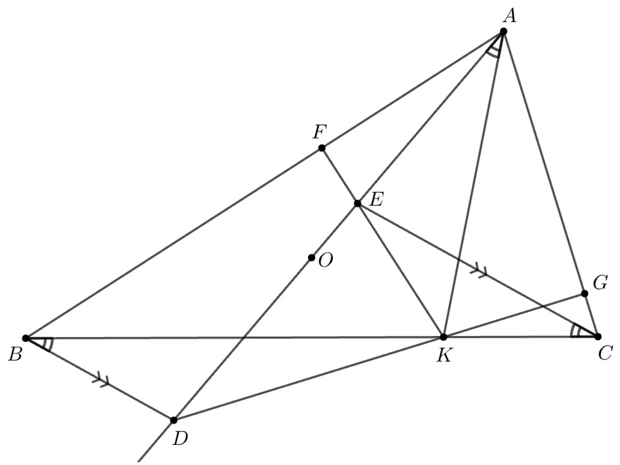
Математика пәні бойынша 2023-2024 оқу жылының
Республикалық оқушылар олимпиадасының III (облыстық) кезеңі

Есептер шешімі. 9-сынып, 2-тур

4. ABC сүйірбұрышты үшбұрышы центрі O болатын шеңберге іштей сызылған. BC қабырғасынан K нүктесі алынып, одан AB және AC қабырғаларына сәйкесінше KF және KG перпендикулярлары түсірілген. AO түзуі KG және KF түзулерін сәйкесінше D және E нүктелерінде қияды. $BD \parallel CE$ екенін дәлелдеңіз.

Шешуі.



$\angle C = \gamma$ деп белгілейік. Онда $\angle AOB = 2\gamma$ және $\angle AEF = 90^\circ - \angle BAO = 90^\circ - \dfrac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \gamma = \angle ACK$. Демек A, K, E, C нүктелері бір шеңбер бойында жатады. Дәл солай A, K, D, B нүктелері де бір шеңбер бойында жатады. Сонда $\angle KCE = \angle KAE = \angle KAD = \angle KBD$, осыдан $BD \parallel CE$.

5. Қандай оң рационал сандарды $\dfrac{x^{20}y^{23}}{z^{2024}}$ түрінде жазуға болады, мұнда x, y, z натурал сандар?

Жауабы. Барлық оң рационал сандар.

Шешуі. Барлық оң рационал сандарды осындай түрде жазуға болатындығын дәлелдейік. $y = z^{87}$ деп алайық, сонда

$$\frac{x^{20}y^{23}}{z^{2024}} = \frac{x^{20}}{z^{23}}.$$

Кез келген натурал p және q сандары үшін

$$\frac{p}{q} = \frac{(p^{15}q^8)^{20}}{(p^{13}q^7)^{23}}$$

теңдігі орындалады, осыдан барлық оң рационал сандарды берілген түрде жазуға болады.

6. $abc = 1$ болатындай оң нақты a, b, c сандары берілген. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a+b+c) \geq 4(ab+bc+ca).$$

Шешуі. Коши теңсіздігі бойынша

$$\frac{a^3}{b} + c \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b} \cdot c} = 2 \cdot \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Дәл солай

$$\frac{b^3}{c} + a \geq 2 \cdot \frac{b}{c}, \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{a} + b \geq 2 \cdot \frac{c}{a}. \quad (3)$$

(1), (2) және (3)-тен

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a+b+c) \geq 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right). \quad (4)$$

$x, y, z > 0$ сандарын $a = x/y, b = z/x, c = y/z$ болатындай етіп алайық. Сонда бізге келесі теңсіздікті дәлелдесек жеткілікті

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ab + bc + ca \Longleftrightarrow \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \Longleftrightarrow$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x. \quad (5)$$

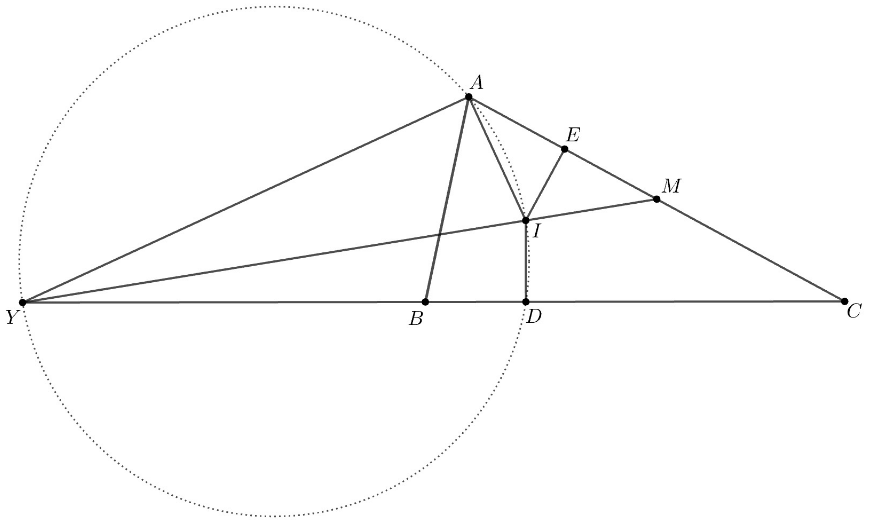
Коши теңсіздігі бойынша $\dfrac{x^3+x^3+y^3}{3} \geq x^2y$, $\dfrac{y^3+y^3+z^3}{3} \geq y^2z$ және $\dfrac{z^3+z^3+x^3}{3} \geq z^2x$. Соңғы үш теңсіздікті қосып (5)-ші теңсіздікті аламыз.

Математика пәні бойынша 2023-2024 оқу жылының
Республикалық оқушылар олимпиадасының III (облыстық) кезеңі

Есептер шешімі. 10-сынып, 2-тур

4. $BC = 2AB$ болатын ABC үшбұрышы берілген, ал I нүктесі іштей сызылған шеңбердің центрі. $\angle BAC$ бұрышының сыртқы биссектрисасы BC түзуін Y нүктесінде қияды. YI түзуі AC кесіндісінің ортасынан өтетінін дәлелдеңіз.

Шешуі.



$YI \cap AC = M$ деп алайық. $\angle A = 2\alpha$ және $\angle C = \gamma$ деп белгілейтін болсақ, $\angle YAC = 90 + \alpha$ болады. I нүктесінен BC және AC қабырғаларына сәйкесінше ID және IE перпендикулярларын түсірейік. $\angle IAY = \angle IDY = 90^\circ$ болғандықтан, A, I, D, Y нүктелері бір шеңбер бойында жатады. Синустар Теоремасы бойынша

$$\frac{CY}{AY} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\sin\angle CYM}{\sin\angle AYM} = \frac{\sin\angle DYI}{\sin\angle AYI} = \frac{ID}{AI} = \frac{IE}{AI} = \sin\alpha. \quad (2)$$

(1) мен (2)-ні қолдана отырып

$$\frac{S_{CYM}}{S_{AYM}} = \frac{\frac{1}{2}CY \cdot YM \cdot \sin\angle CYM}{\frac{1}{2}AY \cdot YM \cdot \sin\angle AYM} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\gamma} = \frac{BC}{2AB} = 1,$$

теңдігін табамыз, демек M — AC кесіндісінің ортасы (S_{PQR} — PQR үшбұрышының ауданы).

5. $abc = 1$ болатындай оң нақты a, b, c сандары берілген. Келесі теңсіздікті дәлелдеңіз

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a + b + c) \geq 4(ab + bc + ca).$$

Шешуі. Коши теңсіздігі бойынша

$$\frac{a^3}{b} + c \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b} \cdot c} = 2 \cdot \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Дәл солай

$$\frac{b^3}{c} + a \geq 2 \cdot \frac{b}{c}, \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{a} + b \geq 2 \cdot \frac{c}{a}. \quad (3)$$

(1), (2) және (3)-тен

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a + b + c) \geq 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right). \quad (4)$$

$x, y, z > 0$ сандарын $a = x/y, b = z/x, c = y/z$ болатындай етіп алайық. Сонда бізге келесі теңсіздікті дәлелдесек жеткілікті

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ab + bc + ca \iff \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \iff$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x. \quad (5)$$

Коши теңсіздігі бойынша $\dfrac{x^3 + x^3 + y^3}{3} \geq x^2y$, $\dfrac{y^3 + y^3 + z^3}{3} \geq y^2z$ және $\dfrac{z^3 + z^3 + x^3}{3} \geq z^2x$. Соңғы үш теңсіздікті қосып (5)-ші теңсіздікті аламыз.

6. 126 адамнан тұратын қоғамдық ұйымда 189 комитет құрылды (әрбір комитет кемінде екі адамнан тұрады, бір адам бірнеше комитетте бола алады). Осымен қатар, кез келген екі комитеттің құрамы бірдей емес. Сайланғаннан кейін, өзі мүшелікте болған барлық комитеттерден шығып кететін, ұйым төрағасын сайлау керек. Сайлаудан кейін кем дегенде 188 комитеттің құрамы қос-қостан әртүрлі болатындай төрағаны таңдауға болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Адамдарды 1-ден 126-ға дейінгі сандармен нөмірлейік, ал әр комитетті $S = \{1, 2, \ldots, 126\}$ жиынының ішкі жиыны түрінде көрсетеміз. Осы ішкі жиындарды $A_1, A_2, \ldots, A_{189}$ деп белгілейік. Кері жорайық, әрбір $x \in S$ үшін $A_1 \setminus \{x\}, \ldots, A_{189} \setminus \{x\}$ арасында әртүрлі жиындардың саны 187-ден аспасын. Егер $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\}$ болса, онда $A = B \cup \{x\}$ немесе $B = A \cup \{x\}$. Сондықтан $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\} = C \setminus \{x\}$ болатындай әртүрлі A, B, C жиындары табылмайды.

189 төбеден тұратын (төбелер ішкі жиындарға сәйкес келеді) G графын құрайық. Әрбір $x \in S$ үшін $A_i = A_j \setminus \{x\}, A_k = A_l \setminus \{x\}$ болатындай дәл екі (A_i, A_j) және (A_k, A_l) ішкі жиындар жұбын алып, (i, j) және (k, l) қабырғаларын жүргізейік. Сонда графта $2 \cdot 126 = 252$ қабырға бар. Кез келген екі (графтағы көрші төбе) ішкі жиын дәл бір элементте ерекшеленген үшін, бұл графта ұзындығы тақ болатын цикл жоқ, демек кез келген циклдың ұзындығы 4-тен кем емес.

Олардың арасында қабырға бойынша қиылыспайтын P_1, P_2, P_3 үш жол болатын (u, v) төбелері табылсын деп болжайық. $x \in A_u \setminus A_v$ болсын. Сонда $i = 1, 2, 3$ үшін P_i $A_{s_i} = A_{t_i} \setminus \{x\}$ болатындай (s_i, t_i) төбелерін қамтиды, ал бұл графтың құрылысына қарама-қайшы. Ал бұл кез келген екі циклдың ортақ қабырғасы жоқ екенін білдіреді.

G-да n — байланыс компоненттердің саны, m — ешқандай циклға кірмейтін қабырғалар саны, ал $c_1, \ldots, c_k \geq 4$ — циклдердің ұзындықтары болсын. Сонда $252 = m + c_1 + \cdots + c_k$ және

$$189 = n + m + (c_1 - 1) + \cdots + (c_k - 1) \geq 1 + \frac{3m}{4} + \frac{3c_1}{4} + \cdots + \frac{3c_k}{4} = 1 + \frac{3 \cdot 252}{4} = 190,$$

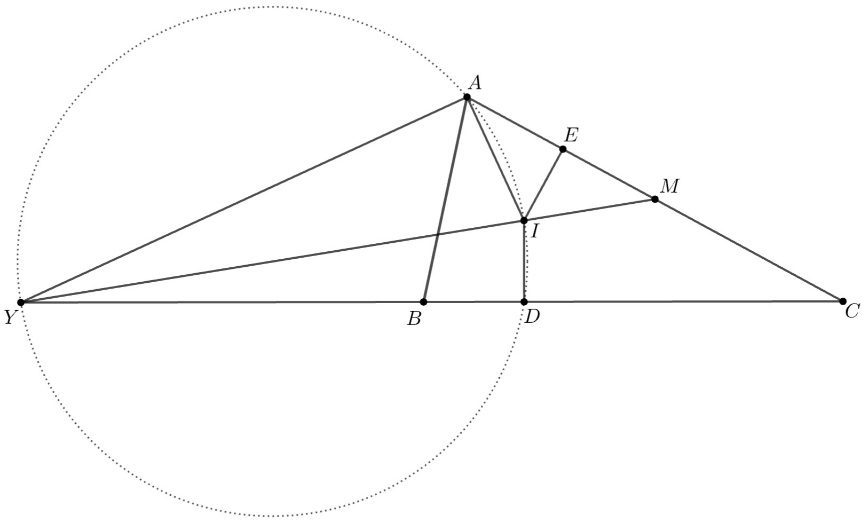
қарама-қайшылық. ($189 = n + m + (c_1 - 1) + \cdots + (c_k - 1)$ теңдігі келесі тұжырымнан шығады: егер біз ұзындығы c_i болатын циклды бір төбеге дейін қыссақ, онда біз төбелер саны $(c_i - 1)$-ге азаяды, ал барлық циклды қысқаннан кейін соңында әр байланыс компоненті ағаш болады.)

Математика пәні бойынша 2023-2024 оқу жылының
Республикалық оқушылар олимпиадасының III (облыстық) кезеңі

Есептер шешімі. 11-сынып, 2-тур

4. $BC = 2AB$ болатын ABC үшбұрышы берілген, ал I нүктесі іштей сызылған шеңбердің центрі. $\angle BAC$ бұрышының сыртқы биссектрисасы BC түзуін Y нүктесінде қияды. YI түзуі AC кесіндісінің ортасынан өтетінін дәлелдеңіз.

Шешуі.



$YI \cap AC = M$ деп алайық. $\angle A = 2\alpha$ және $\angle C = \gamma$ деп белгілейтін болсақ, $\angle YAC = 90 + \alpha$ болады. I нүктесінен BC және AC қабырғаларына сәйкесінше ID және IE перпендикулярларын түсірейік. $\angle IAY = \angle IDY = 90^\circ$ болғандықтан, A, I, D, Y нүктелері бір шеңбер бойында жатады. Синустар Теоремасы бойынша

$$\frac{CY}{AY} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\sin\angle CYM}{\sin\angle AYM} = \frac{\sin\angle DYI}{\sin\angle AYI} = \frac{ID}{AI} = \frac{IE}{AI} = \sin\alpha. \quad (2)$$

(1) мен (2)-ні қолдана отырып

$$\frac{S_{CYM}}{S_{AYM}} = \frac{\frac{1}{2}CY \cdot YM \cdot \sin\angle CYM}{\frac{1}{2}AY \cdot YM \cdot \sin\angle AYM} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\gamma} = \frac{BC}{2AB} = 1,$$

теңдігін табамыз, демек M — AC кесіндісінің ортасы (S_{PQR} — PQR үшбұрышының ауданы).

5. Теріс емес нақты a, b, c, d сандары $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \geq a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$ шартын қанағаттандырады. $abcd < 1.61$ екенін дәлелдеңіз.

Шешуі. $X = abcd$, $Y = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ және $Z = a^2+b^2+c^2+d^2$ деп алайық. Есептің берілгені бойынша $Y \geq Z = 12$. Коши теңсіздігі бойынша

$$Z = (a-b)^2 + (c-d)^2 + 2(ab+cd) \geq 2|(a-b)(c-d)| + 4\sqrt{X}. \quad (1)$$

Дәл солай

$$Z \geq 2|(b-c)(d-a)| + 4\sqrt{X}. \quad (2)$$

(1) мен (2)-ші теңсіздіктерді көбейтеміз

$$144 = Z^2 \geq 16X + 4Y + 8\sqrt{X}(|(a-b)(c-d)| + |(b-c)(d-a)|) \geq$$

$$\geq 16X + 4Y + 16\sqrt{XY} \geq 16X + 48 + 16\sqrt{12X} \implies$$

$$6 \geq X + \sqrt{12X} \implies 9 \geq (\sqrt{X} + \sqrt{3})^2 \implies X \leq (3-\sqrt{3})^2 = 12 - 6\sqrt{3}.$$

Енді $12 - 6\sqrt{3} < 1.61$ екендігін дәлелдесек жеткілікті. Бұл дегеніміз $12 - 6\sqrt{3} < 1.61 \iff 10.39 < 6\sqrt{3} \iff 107.9521 < 108$, демек дұрыс.

6. 126 адамнан тұратын қоғамдық ұйымда 189 комитет құрылды (әрбір комитет кемінде екі адамнан тұрады, бір адам бірнеше комитетте бола алады). Осымен қатар, кез келген екі комитеттің құрамы бірдей емес. Сайланғаннан кейін, өзі мүшелікте болған барлық комитеттерден шығып кететін, ұйым төрағасын сайлау керек. Сайлаудан кейін кем дегенде 188 комитеттің құрамы қос-қостан әртүрлі болатындай төрағаны таңдауға болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Адамдарды 1-ден 126-ға дейінгі сандармен нөмірлейік, ал әр комитетті $S = \{1, 2, \ldots, 126\}$ жиынының ішкі жиыны түрінде көрсетеміз. Осы ішкі жиындарды $A_1, A_2, \ldots, A_{189}$ деп белгілейік. Кері жорайық, әрбір $x \in S$ үшін $A_1 \setminus \{x\}, \ldots, A_{189} \setminus \{x\}$ арасында әртүрлі жиындардың саны 187-ден аспасын. Егер $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\}$ болса, онда $A = B \cup \{x\}$ немесе $B = A \cup \{x\}$. Сондықтан $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\} = C \setminus \{x\}$ болатындай әртүрлі A, B, C жиындары табылмайды.

189 төбеден тұратын (төбелер ішкі жиындарға сәйкес келеді) G графын құрайық. Әрбір $x \in S$ үшін $A_i = A_j \setminus \{x\}, A_k = A_l \setminus \{x\}$ болатындай дәл екі (A_i, A_j) және (A_k, A_l) ішкі жиындар жұбын алып, (i, j) және (k, l) қабырғаларын жүргізейік. Сонда графта $2 \cdot 126 = 252$ қабырға бар. Кез келген екі (графтағы көрші төбе) ішкі жиын дәл бір элементте ерекшеленген үшін, бұл графта ұзындығы тақ болатын цикл жоқ, демек кез келген циклдың ұзындығы 4-тен кем емес.

Олардың арасында қабырға бойынша қиылыспайтын P_1, P_2, P_3 үш жол болатын (u, v) төбелері табылсын деп болжайық. $x \in A_u \setminus A_v$ болсын. Сонда $i = 1, 2, 3$ үшін P_i $A_{s_i} = A_{t_i} \setminus \{x\}$ болатындай (s_i, t_i) төбелерін қамтиды, ал бұл графтың құрылысына қарама-қайшы. Ал бұл кез келген екі циклдың ортақ қабырғасы жоқ екенін білдіреді.

G-да n — байланыс компоненттердің саны, m — ешқандай циклға кірмейтін қабырғалар саны, ал $c_1, \ldots, c_k \geq 4$ — циклдердің ұзындықтары болсын. Сонда $252 = m + c_1 + \cdots + c_k$ және

$$189 = n + m + (c_1 - 1) + \cdots + (c_k - 1) \geq 1 + \frac{3m}{4} + \frac{3c_1}{4} + \cdots + \frac{3c_k}{4} = 1 + \frac{3 \cdot 252}{4} = 190,$$

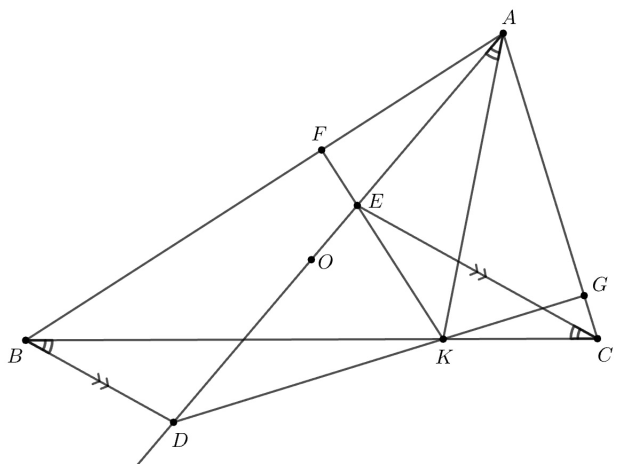
қарама-қайшылық. ($189 = n+m+(c_1-1)+\cdots+(c_k-1)$ теңдігі келесі тұжырымнан шығады: егер біз ұзындығы c_i болатын циклды бір төбеге дейін қыссақ, онда біз төбелер саны $(c_i - 1)$-ге азаяды, ал барлық циклды қысқаннан кейін соңында әр байланыс компоненті ағаш болады.)

III (областной) этап Республиканской олимпиады школьников
по математике. 2023-2024 учебный год

Решения задач. 9 класс, 2 тур

4. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O. На стороне BC взята точка K, из которой опущены перпендикуляры KF и KG на стороны AB и AC, соответственно. Прямая AO пересекает прямые KG и KF в точках D и E соответственно. Докажите, что $BD \parallel CE$.

Решение.



Обозначим $\angle C = \gamma$. Тогда $\angle AOB = 2\gamma$, следовательно $\angle AEF = 90^\circ - \angle BAO = 90^\circ - \dfrac{180^\circ - \angle AOB}{2} = \gamma = \angle ACK$. Откуда точки A, K, E, C лежат на одной окружности. Аналогично точки A, K, D, B лежат на одной окружности. Тогда $\angle KCE = \angle KAE = \angle KAD = \angle KBD$, следовательно $BD \parallel CE$.

5. Какие положительные рациональные числа можно представить в виде $\dfrac{x^{20}y^{23}}{z^{2024}}$, где x, y, z — натуральные числа?

Ответ. Все положительные рациональные числа.

Решение. Докажем, что любое положительное рациональное число представимо в таком виде. В любом представлении будем полагать $y = z^{87}$, тогда

$$(x^{20}y^{23})/z^{2024} = x^{20}/z^{23}.$$

Для любых натуральных p и q имеем

$$\frac{p}{q} = \frac{(p^{15}q^8)^{20}}{(p^{13}q^7)^{23}},$$

откуда любое положительное рациональное число представимо в данном виде.

6. Даны положительные действительные числа a, b, c такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a+b+c) \geq 4(ab+bc+ca).$$

Решение. По неравенству Коши

$$\frac{a^3}{b} + c \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b} \cdot c} = 2 \cdot \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Аналогично

$$\frac{b^3}{c} + a \geq 2 \cdot \frac{b}{c}, \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{a} + b \geq 2 \cdot \frac{c}{a}. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получим, что

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a+b+c) \geq 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right). \quad (4)$$

Пусть $x, y, z > 0$ такие числа, что $a = x/y, b = z/x, c = y/z$. Тогда нам достаточно доказать, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ab + bc + ca \Longleftrightarrow \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \Longleftrightarrow$$

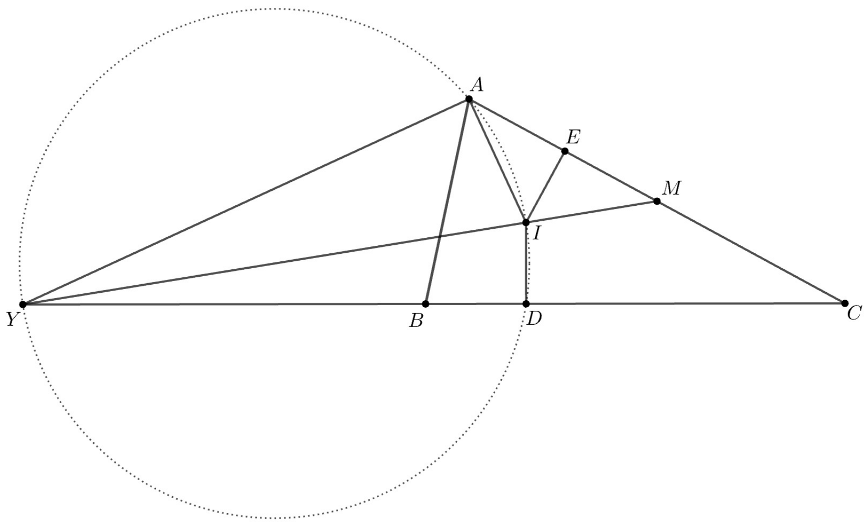
$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x. \quad (5)$$

По неравенству Коши $\dfrac{x^3 + x^3 + y^3}{3} \geq x^2y$, $\dfrac{y^3 + y^3 + z^3}{3} \geq y^2z$ и $\dfrac{z^3 + z^3 + x^3}{3} \geq z^2x$. Складывая последние три неравенства получим (5).

Решения задач. 10 класс, 2 тур

4. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 2AB$, а точка I — центр вписанной окружности. Внешняя биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает прямую BC в точке Y. Докажите, что прямая YI проходит через середину отрезка AC.

Решение.



Пусть $YI \cap AC = M$. Обозначим $\angle A = 2\alpha$ и $\angle C = \gamma$, тогда $\angle YAC = 90 + \alpha$. Из точки I опустим перпендикуляры ID и IE на стороны BC и AC соответственно. Так как $\angle IAY = \angle IDY = 90^\circ$, то точки A, I, D, Y лежат на одной окружности. По теореме синусов получим

$$\frac{CY}{AY} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\sin\angle CYM}{\sin\angle AYM} = \frac{\sin\angle DYI}{\sin\angle AYI} = \frac{ID}{AI} = \frac{IE}{AI} = \sin\alpha. \quad (2)$$

Используя (1) и (2) получим, что

$$\frac{S_{CYM}}{S_{AYM}} = \frac{\frac{1}{2}CY\cdot YM\cdot\sin\angle CYM}{\frac{1}{2}AY\cdot YM\cdot\sin\angle AYM} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\gamma} = \frac{BC}{2AB} = 1,$$

откуда M — середина AC (S_{PQR} — площадь треугольника PQR).

5. Даны положительные действительные числа a, b, c такие, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a+b+c) \geq 4(ab+bc+ca).$$

Решение. По неравенству Коши

$$\frac{a^3}{b} + c \geq 2\sqrt{\frac{a^3}{b}\cdot c} = 2\cdot\frac{a}{b}. \quad (1)$$

Аналогично

$$\frac{b^3}{c} + a \geq 2\cdot\frac{b}{c}, \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{a} + b \geq 2\cdot\frac{c}{a}. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получим, что

$$\left(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) + (a+b+c) \geq 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right). \quad (4)$$

Пусть $x, y, z > 0$ такие числа, что $a = x/y, b = z/x, c = y/z$. Тогда нам достаточно доказать, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq ab + bc + ca \Longleftrightarrow \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} \geq \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \Longleftrightarrow$$

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x. \quad (5)$$

По неравенству Коши $\dfrac{x^3+x^3+y^3}{3} \geq x^2y$, $\dfrac{y^3+y^3+z^3}{3} \geq y^2z$ и $\dfrac{z^3+z^3+x^3}{3} \geq z^2x$. Складывая последние три неравенства получим (5).

6. В общественной организации, насчитывающей 126 человек, сформировано 189 комитетов (в каждом комитете состоит не менее двух человек, человек может состоять в нескольких комитетах). При этом никакие два комитета не совпадают по составу. Нужно выбрать председателя организации, который после избрания должен покинуть все комитеты, в которых он состоял. Докажите, что можно выбрать председателя так, чтобы после выборов не менее 188 комитетов будут попарно различны по составу.

Решение. Пронумеруем людей от 1 до 126, а каждый комитет представим как подмножество $S = \{1, 2, \ldots, 126\}$. Обозначим эти подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{189}$.

От противного, пусть для каждого $x \in S$ среди $A_1 \setminus \{x\}, \dots, A_{189} \setminus \{x\}$ не более 187 различных. Заметим, что если $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\}$, то $A = B \cup \{x\}$ или $B = A \cup \{x\}$. Поэтому не найдутся различных множеств A, B, C, для которых $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\} = C \setminus \{x\}$.

Построим граф G с 189 вершинами (вершины соответствуют подмножествам). Для каждого элемента $x \in S$ выберем ровно две пары подмножеств (A_i, A_j) и (A_k, A_l) такие, что $A_i = A_j \setminus \{x\}, A_k = A_l \setminus \{x\}$ и проведем ребра (i, j) и (k, l). Тогда в графе $2 \cdot 126 = 252$ ребер. Так как любые два (смежных в графе) подмножества различаются ровно в одном элементе, то в графе нет циклов нечетной длины, т.е. длина любого цикла не меньше 4.

Предположим, что найдутся вершины (u, v), между которыми есть три непересекающихся по ребрам пути P_1, P_2, P_3. Пусть $x \in A_u \setminus A_v$. Тогда для $i = 1, 2, 3$ P_i содержит вершины (s_i, t_i) такие, что $A_{s_i} = A_{t_i} \setminus \{x\}$, что противоречит построению графа. Значит любые два цикла не имеют общего ребра.

Пусть в G n компонентов связности, m — количество ребер, не входящих в циклы, а $c_1, \dots, c_k \geq 4$ — длины циклов. Тогда $252 = m + c_1 + \dots + c_k$ и

$$189 = n + m + (c_1 - 1) + \dots + (c_k - 1) \geq 1 + \frac{3m}{4} + \frac{3c_1}{4} + \dots + \frac{3c_k}{4} = 1 + \frac{3 \cdot 252}{4} = 190,$$

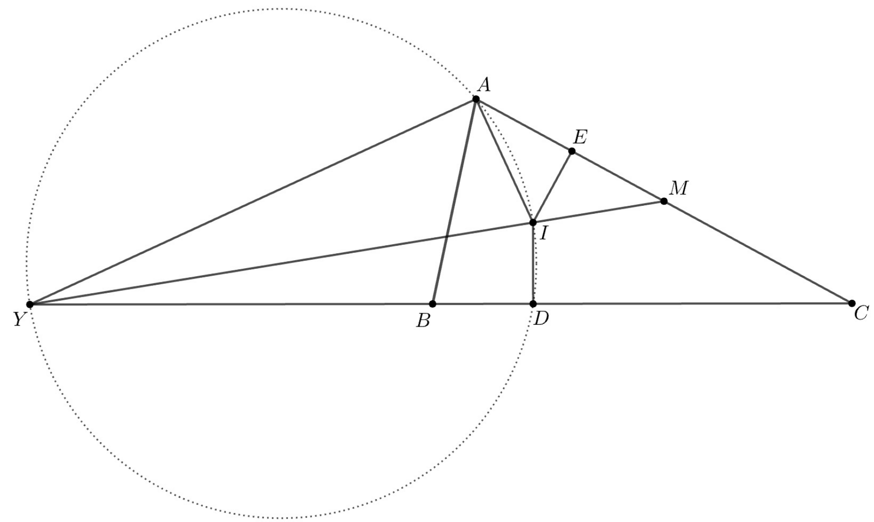
противоречие. (Равенство $189 = n + m + (c_1 - 1) + \dots + (c_k - 1)$ следует из того, что если мы будем сжимать цикл длины c_i до одной вершины, то мы уменьшаем к-во вершин на $c_i - 1$, а в итоге после всех сжатии каждая компонента связности будет деревом.)

III (областной) этап Республиканской олимпиады школьников
по математике. 2023-2024 учебный год

Решения задач. 11 класс, 2 тур

4. Дан треугольник ABC, в котором $BC = 2AB$, а точка I — центр вписанной окружности. Внешняя биссектриса угла $\angle BAC$ пересекает прямую BC в точке Y. Докажите, что прямая YI проходит через середину отрезка AC.

Решение.



Пусть $YI \cap AC = M$. Обозначим $\angle A = 2\alpha$ и $\angle C = \gamma$, тогда $\angle YAC = 90 + \alpha$. Из точки I опустим перпендикуляры ID и IE на стороны BC и AC соответственно. Так как $\angle IAY = \angle IDY = 90^\circ$, то точки A, I, D, Y лежат на одной окружности. По теореме синусов получим

$$\frac{CY}{AY} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}, \quad (1)$$

$$\frac{\sin \angle CYM}{\sin \angle AYM} = \frac{\sin \angle DYI}{\sin \angle AYI} = \frac{ID}{AI} = \frac{IE}{AI} = \sin \alpha. \quad (2)$$

Используя (1) и (2) получим, что

$$\frac{S_{CYM}}{S_{AYM}} = \frac{\frac{1}{2} CY \cdot YM \cdot \sin \angle CYM}{\frac{1}{2} AY \cdot YM \cdot \sin \angle AYM} = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \gamma} = \frac{BC}{2AB} = 1,$$

откуда M — середина AC (S_{PQR} — площадь треугольника PQR).

5. Неотрицательные действительные числа a, b, c, d таковы, что $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a) \geq a^2+b^2+c^2+d^2 = 12$. Докажите, что $abcd < 1.61$.

Решение. Обозначим $X = abcd$, $Y = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$ и $Z = a^2+b^2+c^2+d^2$. По условию $Y \geq Z = 12$. По неравенству Коши

$$Z = (a-b)^2 + (c-d)^2 + 2(ab+cd) \geq 2|(a-b)(c-d)| + 4\sqrt{X}. \quad (1)$$

Аналогично

$$Z \geq 2|(b-c)(d-a)| + 4\sqrt{X}. \quad (2)$$

Перемножив (1) и (2) получим, что

$$144 = Z^2 \geq 16X + 4Y + 8\sqrt{X}(|(a-b)(c-d)| + |(b-c)(d-a)|) \geq$$

$$\geq 16X + 4Y + 16\sqrt{XY} \geq 16X + 48 + 16\sqrt{12X} \implies$$

$$6 \geq X + \sqrt{12X} \implies 9 \geq (\sqrt{X}+\sqrt{3})^2 \implies X \leq (3-\sqrt{3})^2 = 12 - 6\sqrt{3}.$$

Достаточно доказать, что $12 - 6\sqrt{3} < 1.61 \iff 10.39 < 6\sqrt{3} \iff 107.9521 < 108$, что верно.

6. В общественной организации, насчитывающей 126 человек, сформировано 189 комитетов (в каждом комитете состоит не менее двух человек, человек может состоять в нескольких комитетах). При этом никакие два комитета не совпадают по составу. Нужно выбрать председателя организации, который после избрания должен покинуть все комитеты, в которых он состоял. Докажите, что можно выбрать председателя так, чтобы после выборов не менее 188 комитетов будут попарно различны по составу.

Решение. Пронумеруем людей от 1 до 126, а каждый комитет представим как подмножество $S = \{1, 2, \ldots, 126\}$. Обозначим эти подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{189}$. От противного, пусть для каждого $x \in S$ среди $A_1 \setminus \{x\}, \ldots, A_{189} \setminus \{x\}$ не более 187 различных. Заметим, что если $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\}$, то $A = B \cup \{x\}$ или $B = A \cup \{x\}$. Поэтому не найдутся различных множеств A, B, C, для которых $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\} = C \setminus \{x\}$.

Построим граф G с 189 вершинами (вершины соответствуют подмножествам). Для каждого элемента $x \in S$ выберем ровно две пары подмножеств (A_i, A_j) и (A_k, A_l) такие, что $A_i = A_j \setminus \{x\}, A_k = A_l \setminus \{x\}$ и проведем ребра (i, j) и (k, l). Тогда в графе $2 \cdot 126 = 252$ ребер. Так как любые два (смежных в графе) подмножества различаются ровно в одном элементе, то в графе нет циклов нечетной длины, т.е. длина любого цикла не меньше 4.

Предположим, что найдутся вершины (u, v), между которыми есть три непересекающихся по ребрам пути P_1, P_2, P_3. Пусть $x \in A_u \setminus A_v$. Тогда для $i = 1, 2, 3$ P_i содержит вершины (s_i, t_i) такие, что $A_{s_i} = A_{t_i} \setminus \{x\}$, что противоречит построению графа. Значит любые два цикла не имеют общего ребра.

Пусть в G n компонентов связности, m — количество ребер, не входящих в циклы, а $c_1, \ldots, c_k \geq 4$ — длины циклов. Тогда $252 = m + c_1 + \cdots + c_k$ и

$$189 = n + m + (c_1 - 1) + \cdots + (c_k - 1) \geq 1 + \frac{3m}{4} + \frac{3c_1}{4} + \cdots + \frac{3c_k}{4} = 1 + \frac{3 \cdot 252}{4} = 190,$$

противоречие. (Равенство $189 = n + m + (c_1 - 1) + \cdots + (c_k - 1)$ следует из того, что если мы будем сжимать цикл длины c_i до одной вершины, то мы уменьшаем к-во вершин на $c_i - 1$, а в итоге после всех сжатии каждая компонента связности будет деревом.)