Математика пәні бойынша 2023-2024 оқу жылының
Республикалық оқушылар олимпиадасының III (облыстық) кезеңі

Есептер шешімі. 9-сынып, 1-тур

1. $p - q + r = \sqrt{p+q+r}$ шартын қанағаттандыратын барлық (p, q, r) жай сандардың үштіктерін табыңыз.

Жауабы. $(p, q, r) = (3, 3, 3)$.

Шешуі. $p - q + r = x$ деп алайық. Сонда $x = \sqrt{p+q+r} \geq \sqrt{6}$, осыдан $x \geq 3$. Есеп шарты бойынша $x^2 = p + q + r = x + 2q$, демек $x(x-1) = 2q$. q жай сан болғандықтан $q \mid x$ немесе $q \mid x - 1$, яғни $x - 1 \mid 2$ немесе $x \mid 2$. Бірақ бізде $x \geq 3$, демек $x - 1 \mid 2$. Осыдан $x = 3$. Онда $q = 3$. Есеп шартынан $p + r = x + q = 6$, осыдан $p = r = 3$, ал бұл жай сандар үштігі есептің шартын қанағаттандырады.

2. S — барлығы бір түзудің бойында жатпайтын жазықтықтағы $n \geq 3$ нүктеден тұратын жиын. Соңдары S-тің нүктелері болатын және осы кесіндіде S-тің басқа нүктелері жатпайтын барлық кесінділерді қарастырайық. Осындай кесінділердің барлығының ұзындықтары бірдей болып шықты. n-нің барлық мүмкін мәнін табыңыз.

Жауабы. $n = 3$.

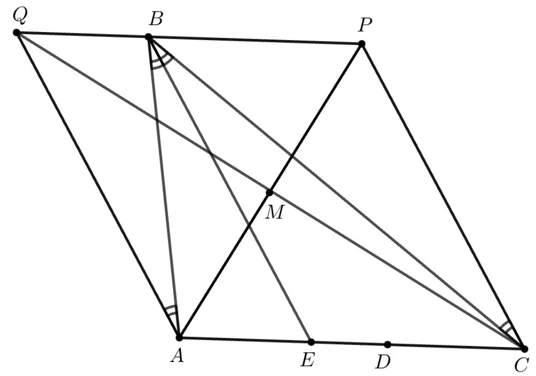
Шешуі. $n = 3$-ке мысал ретінде, төбелері теңқабырғалы үшбұрыштың төбелерімен сәйкес келетін 3 нүктені алайық; бұл 3 нүкте есептің шартын қанағаттандырады.

Енді $n \geq 4$ деп алайық. S жиынындағы ешқандай 3 нүкте бір түзудің бойында жата алмайтындығын дәлелдейік. l түзуінің бойында жататын $A, B, C \in S$ нүктелері табылсын делік. Есептің шарты бойынша барлық нүкте бұл l түзуінде жата алмайды, сол нүктелердің ішінен l-ге ең жақын X нүктесін қарастырайық. XA, XB және XC кесінділерінің біреуінде S-тің ішіндегі басқа Y нүктесі жатыр делік. Сонда Y нүктесі l-ға X-тан жақын екені анық, ал бұл X-тің анықтамасына қайшылық. Демек XA, XB, XC кесінділерінде басқа S-тің нүктелері жата алмайды. Есеп шарты бойынша $XA = XB = XC = r$, осыдан центрі X радиусы r болатын шеңбер l түзуін 3 нүктеде қиып өтеді, қарама-қайшылық.

S-тің кез келген 3 нүктесі бүр түзудің бойында жатпайды. Кез келген $A, B, C, D \in S$ нүктелерін қарастырайық. Осы 4 нүктенің кез-келген 3-і теңқабырғалы үшбұрыш қалыптастырғандықтан және де $AB = BC = CD = DA = AC = BD$ болғандықтан, $ABCD$ — ромб және $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$ екені шығады, қарама-қайшылық. Демек $n \geq 4$ болған жағдайда мұндай нүктелер табылмайды.

3. ABC үшбұрышының AC қабырғасынан $AB \cdot AD = CB \cdot CD$ болатындай D нүктесі алынған. M нүктесі BD кесіндісінің ортасы. Егер $\angle AMC = 90^\circ$ болса, онда $\angle CAM + \angle BCM = \angle ACM + \angle BAM$ теңдігін дәлелдеңіз.

Шешуі.



AM және CM сәулелерінде $AP = 2AM$ және $CQ = 2CM$ болатындай P және Q нүктелерін белгілейік. $BP \parallel AC \parallel BQ$ екендігін байқайық, демек $B \in PQ$. AM түзуі CQ-ға орта перпендикуляр болғандықтан $AC = AQ$. Дәл солай $CA = CP$. $ACPQ$ — параллелограмм болғандықтан $PQ = AC = AQ = CP$. Сонда $ACPQ$ — ромб.

AC кесіндісінде $AE = CD$ болатындай E нүктесін белгілейік. $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DA} = \frac{AE}{EC}$ болғандықтан, BE ол $\angle ABC$ бұрышының биссектрисасы болады. $QBEA$ және $BPCE$ — параллелограммдар, демек $\angle CAM - \angle BAM = \angle QAM - \angle BAM = \angle BAQ = \angle ABE = \angle EBC = \angle BCP = \angle PCM - \angle BCM = \angle ACM - \angle BCM$.

Математика пәні бойынша 2023-2024 оқу жылының
Республикалық оқушылар олимпиадасының III (облыстық) кезеңі

Есептер шешімі. 10-сынып, 1-тур

1. $x^2+y^2+z^2+xyz$ түрінде жазуға болмайтын шексіз көп бүтін сандар табылатынын дәлелдеңіз, мұнда x,y,z бүтін сандар.

Шешуі. Егер x,y,z сандарының ішінде жұп сандардың саны 2 болмаса, онда $x^2+y^2+z^2+xyz$ жұп сан, ал егер 2 болса, онда $x^2+y^2+z^2+xyz \equiv 0+0+1+0 \equiv 1 \pmod 4$. Осыдан барлық бүтін x,y,z үшін $x^2+y^2+z^2+xyz \not\equiv 3 \pmod 4$, сондықтан $4k+3$ түріндегі барлық бүтін сандарды (олар шексіз көп) $x^2+y^2+z^2+xyz$ түрінде жазуға болмайды.

2. Жібек әртүрлі a және b нақты сандарын жасырады, ал Ержан осы сандарды тапқысы келеді. Бір жүрісте Ержан коэффициенттері нақты сандар болатын дәрежесі 2024-ке тең $P(x)$ көпмүшесін ойлап табады, содан кейін Жібек оған $P(a)-P(b)$ мәнін айтады. Үш жүрісте Ержан a және b сандарын кепілді түрде таба алатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. Ержан $P_1(x)=x^{2024}, P_2(x)=x^{2024}+x$ және $P_3(x)=x^{2024}+x^2$ көпмүшелерін берсін. Бірінші жүрісте ол $a^{2024}-b^{2024}$ мәнін табады, ал екінші жүрісінде $a-b$ мәнін таба алады, себебі $a^{2024}-b^{2024}$ мәнін оған дейін біледі. Үшінші жүрісінде екіншідегідей a^2-b^2 мәнін таба алады. Есептің шарты бойынша $a-b\neq 0$, демек Ержан $a+b=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$ санын таба алады. $c=a+b$ және $d=a-b$ сандарын біле тұра, ол $a=(c+d)/2$ және $b=(c-d)/2$ сандарын әлбетте табады.

3. ABC үшбұрышында AL, BM, CN биссектрисалары мен AD, BE, CF биіктіктері жүргізілген. Егер DEF үшбұрышының ауданы LMN үшбұрышының ауданынан көп болса, онда ABC үшбұрышы доғалбұрышты болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. S_{XYZ} арқылы $\triangle XYZ$ үшбұрышының ауданын белгілейік. Кері жорайық. Егер $\triangle ABC$ тікбұрышты болса, онда $S_{DEF}=0$, ал бұл дұрыс емес. Сондықтан $\triangle ABC$ сүйірбұрышты. $AB=c, AC=b, BC=a$, $\angle A=\alpha, \angle B=\beta, \angle C=\gamma$ болсын. Синустар теоремасы бойынша $a=2R\sin\alpha, b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$, мұнда R — ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі. $S_{ABC}=1$ деп санасақ болады.

Келесі әйгілі формулаларды қолданамыз:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \cos x = \sin(90^\circ - x),$$

$$\cos x+\cos y+\cos z = -\cos(x+y+z) + 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}. \quad (*)$$

(*)-дан $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2} = 1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ шығады. Дәл солай $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma = -1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

$$S_{AEF} = \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AC} = \cos^2\alpha.$$

Тұра осылай S_{BDF} және S_{CDE} табамыз. Содан

$$S_{DEF} = 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma = \frac{-1-\cos 2\alpha-\cos 2\beta-\cos 2\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \quad (1)$$

Дәл солай

$$S_{AMN} = \frac{AM}{AC}\cdot\frac{AN}{AB} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Тұра осылай S_{BLN} және S_{CML} табамыз. $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ формулаларын қолданамыз:

$$S_{LMN} = 1-\frac{bc}{(a+b)(a+c)}-\frac{ac}{(a+b)(b+c)}-\frac{ab}{(a+c)(b+c)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}} \geq$$

$$\geq 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Коши теңсіздігі бойынша

$$\sqrt{\cos\alpha\cos\beta} \leq \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leq$$

$$\leq \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Дәл солай басқа теңсіздіктерді алып, оларды көбейтіп келесі теңсіздікті аламыз

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

(1), (2) және (3)-тен $S_{DEF} \leq S_{LMN}$ екені шығады, қарама-қайшылық.

Математика пәні бойынша 2023-2024 оқу жылының
Республикалық оқушылар олимпиадасының III (облыстық) кезеңі

Есептер шешімі. 11-сынып, 1-тур

1. Кез келген $m \geq n \geq 2024$ натурал сандары үшін $f_m(n) = f_{m-n}(m)$ теңдігі орындалатындай барлық $f : N \to N$ функцияларын табыңыз. (N — натурал сандар жиыны, $f_0(k) = k$ және барлық бүтін $l \geq 1$ үшін $f_l(k) = f(f_{l-1}(k))$.)

Жауабы. Мұндай функциялар жоқ.

Шешуі. $m = n \geq 2024$ сандарын қойсақ, $f_n(n) = f_0(n) = n$ (1) шығады. $m = n+1 \geq 2025$ қойсақ, $f_{n+1}(n) = f(n+1)$ (2) деген шығады. (1) мен (2)-ден $f(n) = f(f_n(n)) = f_{n+1}(n) = f(n+1)$ теңдігі барлық $n \geq 2024$ үшін дұрыс болады, яғни кез келген $a, b \geq 2024$ сандары үшін $f(a) = f(b)$.

$M = \max(f(1), \ldots, f(2023), f(2024)) + 1$ деп алайық. Онда барлық k натурал саны үшін $f(k) < M$ теңсіздігі орындалады. Алайда (1)-ші шарттан біз $f(f_{M-1}(M)) = f_M(M) = M$ екені шығады, ал бұл теңдік орындала алмайды. Демек мұндай функциялар жоқ.

2. x, y, t натурал сандары $x^2 + 257 = y^t$ және $2 \leq t \leq 48$ шарттарын қанағаттандырады. t жай сан екенін дәлелдеңіз.

Шешуі. t құрама сан деп болжайық, ал p оның ең кіші жай бөлгіші болсын. Демек $p \leq \sqrt{t}$, осыдан $p < 7$. $k = t/p > 1$ және $y^k = z$ болсын.

1) $p = 2$. Есеп шарты бойынша $257 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x) \Longrightarrow z - x = 1, z + x = 257 \Longrightarrow y^k = z = 129$, ал бұл мүмкін емес.

2) $p = 3$. Егер $x \equiv 1 \pmod 2$ болса, онда $z^3 = x^2 + 257 \equiv 2 \pmod 4$ деген шығады, ал бұл дұрыс емес. Демек $2 \mid x$ және $z^3 \equiv 1 \pmod 4$, осыдан $z \equiv 1 \pmod 4$. $z^2 + z + 1 \equiv 3 \pmod 4$ болғандықтан, $z^2 + z + 1$ санын бөлетін $p \equiv 3 \pmod 4$ жай саны табылады. $y^2 + 16^2 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$ саны p-ға бөлінгендіктен, Жирар теоремасы бойынша $p \mid y, 16$, ал бұл орындала алмайды, қарама-қайшылық.

3) $p = 5$. Онда $z^5 \equiv 0, 1, -1 \pmod{11}$ және $x^2 + 257 \equiv 2, 4, 5, 7, 8, 9 \pmod{11}$, ал бұл мүмкін емес.

3. ABC үшбұрышында AL, BM, CN биссектрисалары мен AD, BE, CF биіктіктері жүргізілген. Егер DEF үшбұрышының ауданы LMN үшбұрышының ауданынан көп болса, онда ABC үшбұрышы доғалбұрышты болатынын дәлелдеңіз.

Шешуі. S_{XYZ} арқылы $\triangle XYZ$ үшбұрышының ауданын белгілейік. Кері жорайық. Егер $\triangle ABC$ тікбұрышты болса, онда $S_{DEF} = 0$, ал бұл дұрыс емес. Сондықтан $\triangle ABC$ сүйірбұрышты. $AB = c, AC = b, BC = a$, $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$ болсын. Синустар теоремасы бойынша $a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta$ и $c = 2R\sin\gamma$, мұнда R — ABC үшбұрышына сырттай сызылған шеңбердің центрі. $S_{ABC} = 1$ деп санасақ болады.

Келесі әйгілі формулаларды қолданамыз:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \cos x = \sin(90^\circ - x),$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = -\cos(x+y+z) + 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}. \quad (*)$$

(*)-дан $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2} = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ шығады. Дәл солай $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

$$S_{AEF} = \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AF}{AC} = \cos^2\alpha.$$

Тура осылай S_{BDF} және S_{CDE} табамыз. Содан

$$S_{DEF} = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = \frac{-1 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \quad (1)$$

Дәл солай

$$S_{AMN} = \frac{AM}{AC} \cdot \frac{AN}{AB} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Тура осылай S_{BLN} және S_{CML} табамыз. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ формулаларын қолданамыз:

$$S_{LMN} = 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha + \sin\gamma)(\sin\beta + \sin\gamma)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}} \geq$$

$$\geq 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Коши теңсіздігі бойынша

$$\sqrt{\cos\alpha\cos\beta} \leq \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leq$$

$$\leq \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Дәл солай басқа теңсіздіктерді алып, оларды көбейтіп келесі теңсіздікті аламыз

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

(1), (2) және (3)-тен $S_{DEF} \le S_{LMN}$ екені шығады, қарама-қайшылық.

III (областной) этап Республиканской олимпиады школьников
по математике. 2023-2024 учебный год

Решения задач. 9 класс, 1 тур

1. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r) такие, что $p - q + r = \sqrt{p+q+r}$.

Ответ. $(p, q, r) = (3, 3, 3)$.

Решение. Обозначим $p - q + r = x$. Тогда $x = \sqrt{p+q+r} \ge \sqrt{6}$, откуда $x \ge 3$. По условию $x^2 = p + q + r = x + 2q$, откуда $x(x-1) = 2q$. Так как q простое, то $q \mid x$ или $q \mid x - 1$, т.е. $x - 1 \mid 2$ или $x \mid 2$. Но $x \ge 3$, поэтому $x - 1 \mid 2$. Значит $x = 3$, откуда $q = 3$. Тогда из условия $p + r = x + q = 6$, значит $p = r = 3$, что удовлетворяет условию.

2. Пусть S — множество, состоящее из $n \ge 3$ точек на плоскости, не все из которых лежат на одной прямой. Рассмотрим все отрезки с концами из S, на которых не лежат другие точки из S. Оказалось, что все такие отрезки имеют равные длины. Найдите все возможные значения n.

Ответ. $n = 3$.

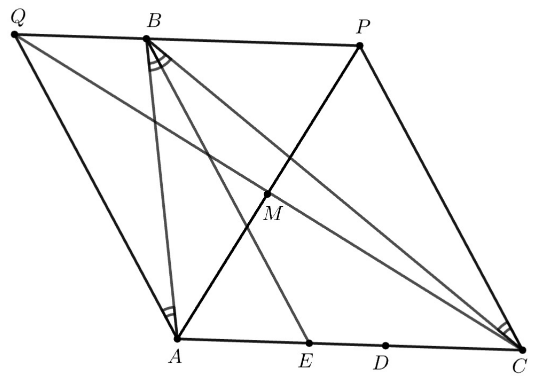
Решение. Пример для $n = 3$: расположим точки так, чтобы они образовывали правильный треугольник; такая расстановка удовлетворяет условию.

Пусть теперь $n \ge 4$. Докажем, что никакие 3 точки S не лежат на одной прямой. Допустим нашлись такие точки $A, B, C \in S$, лежащие на прямой l. Поскольку все точки не лежат на одной прямой, то найдётся точка, не лежащая на прямой l. Рассмотрим такую точку X не лежащую на l, расстояние от которой до l минимальная. Предположим, что хотя бы один из отрезков XA, XB и XC содержит внутреннюю точку $Y \in S$. БОО $Y \in XA$. Тогда расстояние от Y до l меньше чем расстояние от X до l, что противоречит выбору X. По условию $XA = XB = XC = r$, то есть окружность с центром X и радиусом r пересекает прямую l в 3 точках, противоречие.

Значит никакие 3 точки S не лежат на одной прямой, то есть любая прямая содержит не более 2 точек из S. Рассмотрим любые 4 точки $A, B, C, D \in S$. Так как любые 3 из этих точек образует правильный треугольник и $AB = BC = CD = DA = AC = BD$, то $ABCD$ — ромб, причем $\angle ABC + \angle BCD + \angle CDA + \angle DAB = 4 \cdot 60^\circ = 240^\circ < 360^\circ$, противоречие. Значит таких точек при $n \ge 4$ не существует.

3. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что $AB \cdot AD = CB \cdot CD$. Точка M — середина отрезка BD. Докажите, что если $\angle AMC = 90^\circ$, то $\angle CAM + \angle BCM = \angle ACM + \angle BAM$.

Решение.



На лучах AM и CM отметим точки P и Q так, что $AP = 2AM$ и $CQ = 2CM$. Заметим, что $BP \parallel AC \parallel BQ$, откуда $B \in PQ$. Так как AM серединный перпендикуляр к CQ, то $AC = AQ$. Аналогично $CA = CP$. Так как $ACPQ$ — параллелограмм, то $PQ = AC = AQ = CP$. Следовательно $ACPQ$ — ромб.

Отметим на отрезке AC точку E так, что $AE = CD$. Тогда BE — биссектриса угла $\angle ABC$, так как $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{DA} = \frac{AE}{EC}$. $QBEA$ и $BPCE$ — параллелограммы, поэтому $\angle CAM - \angle BAM = \angle QAM - \angle BAM = \angle BAQ = \angle ABE = \angle EBC = \angle BCP = \angle PCM - \angle BCM = \angle ACM - \angle BCM$, ч.т.д.

III (областной) этап Республиканской олимпиады школьников
по математике. 2023-2024 учебный год

Решения задач. 10 класс, 1 тур

1. Докажите, что существует бесконечно много целых чисел, не представимых в виде $x^2 + y^2 + z^2 + xyz$, где x, y, z — целые числа.

Решение. Заметим, что если количество четных чисел среди x, y, z не равно 2, то $x^2+y^2+z^2+xyz$ — четно, а если равно 2, то $x^2+y^2+z^2+xyz \equiv 0+0+1+0 \equiv 1 \pmod 4$. Значит $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \not\equiv 3 \pmod 4$ при всех целых x, y, z, откуда все числа вида $4k+3$ (их бесконечно много) не представимы в виде $x^2+y^2+z^2+xyz$.

2. Жибек загадывает два различных действительных числа a и b, а Ержан пытается их найти. За один ход Ержан придумывает многочлен $P(x)$ степени 2024 с действительными коэффициентами, после чего Жибек сообщает ему значение $P(a) - P(b)$. Докажите, что за три хода Ержан сможет гарантированно найти числа a и b.

Решение. Ержан придумывает многочлены $P_1(x) = x^{2024}, P_2(x) = x^{2024} + x$ и $P_3(x) = x^{2024} + x^2$. В первом ходе он узнает значение $a^{2024} - b^{2024}$, а во втором узнает значение $a - b$, поскольку значение $a^{2024} - b^{2024}$ уже известно. В третьем ходе как и во втором он узнает значение $a^2 - b^2$. Так как по условию $a - b \neq 0$, то Ержан может определить значение $a+b = \dfrac{a^2 - b^2}{a - b}$. Зная числа $c = a+b$ и $d = a-b$ Ержан сможет определить числа $a = (c + d)/2$ и $b = (c - d)/2$.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM, CN и высоты AD, BE, CF. Докажите, что если площадь треугольника DEF больше площади треугольника LMN, то треугольник ABC тупоугольный.

Решение. Через S_{XYZ} обозначим площадь $\triangle XYZ$. От противного. Если $\triangle ABC$ прямоугольный, то $S_{DEF} = 0$, что неверно. Значит $\triangle ABC$ остроугольный. Обозначим $AB = c, AC = b, BC = a$, $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$. По теореме синусов $a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta$ и $c = 2R\sin\gamma$, где R — радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Можно считать, что $S_{ABC} = 1$.

Будем использовать следующие известные формулы:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \cos x = \sin(90^\circ - x),$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = -\cos(x+y+z) + 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}. \quad (*)$$

Из (*) следует, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2} = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Аналогично $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Заметим, что

$$S_{AEF} = \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AC} = \cos^2\alpha.$$

Аналогично найдем S_{BDF} и S_{CDE}. Тогда

$$S_{DEF} = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = \frac{-1 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \quad (1)$$

Аналогично

$$S_{AMN} = \frac{AM}{AC}\cdot\frac{AN}{AB} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично найдем S_{BLN} и S_{CML}. Тогда используя $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ получим

$$S_{LMN} = 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}} \geq$$

$$\geq 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

По неравенству Коши

$$\sqrt{\cos\alpha\cos\beta} \leq \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leq$$

$$\leq \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Аналогично получив другие неравенства и перемножив их получим, что

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получим, что $S_{DEF} \leq S_{LMN}$, противоречие.

III (областной) этап Республиканской олимпиады школьников
по математике. 2023-2024 учебный год

Решения задач. 11 класс, 1 тур

1. Найдите все функции $f : N \to N$ такие, что $f_m(n) = f_{m-n}(m)$ при всех натуральных $m \geq n \geq 2024$. (N — множество натуральных чисел, $f_0(k) = k$ и $f_l(k) = f(f_{l-1}(k))$ при всех целых $l \geq 1$.)

Ответ. Таких функции нет.

Решение. Подставим $m = n \geq 2024$, тогда $f_n(n) = f_0(n) = n$ (1). Теперь подставив $m = n+1 \geq 2025$ получим $f_{n+1}(n) = f(n+1)$ (2). Из (1) и (2) получим, что $f(n) = f(f_n(n)) = f_{n+1}(n) = f(n+1)$ при всех $n \geq 2024$, то есть $f(a) = f(b)$ при всех $a, b \geq 2024$.

Обозначим $M = \max(f(1), \ldots, f(2023), f(2024)) + 1$. Тогда $f(k) < M$ для любого натурального k. Но при $n = M$ из (1) получим, что $f(f_{M-1}(M)) = f_M(M) = M$, что невозможно. Значит таких функции не существует.

2. Натуральные числа x, y, t таковы, что $x^2 + 257 = y^t$ и $2 \leq t \leq 48$. Докажите, что число t — простое.

Решение. Предположим, что t — составное и p наименьший простой делитель t. Тогда $p \leq \sqrt{t}$, откуда $p < 7$. Обозначим $k = t/p > 1$ и $y^k = z$.

1) $p = 2$. По условию $257 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x) \Longrightarrow z - x = 1, z + x = 257 \Longrightarrow y^k = z = 129$, что невозможно.

2) $p = 3$. Если $x \equiv 1 \pmod 2$, то $z^3 = x^2 + 257 \equiv 2 \pmod 4$, что невозможно. Значит $2 \mid x$ и $z^3 \equiv 1 \pmod 4$, откуда $z \equiv 1 \pmod 4$. Так как $z^2+z+1 \equiv 3 \pmod 4$, то найдется простое число $p \equiv 3 \pmod 4$ такое, что $p \mid z^2 + z + 1$. Следовательно $y^2 + 16^2 = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1)$ делится на p. По теореме Жирара $p \mid y, 16$, противоречие.

3) $p = 5$. Тогда $z^5 \equiv 0, 1, -1 \pmod{11}$ и $x^2 + 257 \equiv 2, 4, 5, 7, 8, 9 \pmod{11}$, что невозможно.

3. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AL, BM, CN и высоты AD, BE, CF. Докажите, что если площадь треугольника DEF больше площади треугольника LMN, то треугольник ABC тупоугольный.

Решение. Через S_{XYZ} обозначим площадь $\triangle XYZ$. От противного. Если $\triangle ABC$ прямоугольный, то $S_{DEF} = 0$, что неверно. Значит $\triangle ABC$ остроугольный. Обозначим $AB = c, AC = b, BC = a$, $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$. По теореме синусов $a = 2R\sin\alpha, b = 2R\sin\beta$ и $c = 2R\sin\gamma$, где R — радиус описанной окружности $\triangle ABC$. Можно считать, что $S_{ABC} = 1$.

Будем использовать следующие известные формулы:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x, \cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \cos x = \sin(90^\circ - x),$$

$$\cos x + \cos y + \cos z = -\cos(x+y+z) + 4\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{z+x}{2}. \quad (*)$$

Из (*) следует, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2} = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$. Аналогично $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

Заметим, что

$$S_{AEF} = \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AC} = \cos^2\alpha.$$

Аналогично найдем S_{BDF} и S_{CDE}. Тогда

$$S_{DEF} = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma = \frac{-1 - \cos 2\alpha - \cos 2\beta - \cos 2\gamma}{2} =$$

$$= 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \quad (1)$$

Аналогично

$$S_{AMN} = \frac{AM}{AC}\cdot\frac{AN}{AB} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогично найдем S_{BLN} и S_{CML}. Тогда используя $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ получим

$$S_{LMN} = 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$\frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{(\sin\alpha+\sin\beta)(\sin\alpha+\sin\gamma)(\sin\beta+\sin\gamma)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}} \geq$$

$$\geq 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

По неравенству Коши

$$\sqrt{\cos\alpha\cos\beta} \leq \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leq$$

$$\leq \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Аналогично получив другие неравенства и перемножив их получим, что

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получим, что $S_{DEF} \leq S_{LMN}$, противоречие.